13. Shats'kyy, I., Perepichka, V., Dalyak, T. & Shcherbiy, A. (2000). Mat. problemy mekhaniky neodnoridnykh struktur. (vol. 2). Problems of plates and shells theory with interconnected boundary conditions on slits. L'viv, pp. 51-54.

14. Dempsey, J. P., Shektman, I. I. & Slepyan, L. L. (1998). Closure of a through crack in a plate under bending. International Journal or Solids and Structures, Vol. 35, pp. 4077-4089.

15. Opanasovych, V. & Yatsyk, I. (2009). Reissner's plate bending with two collinear through-the-thickness cracks of different length taking into account contact region width of their faces**.** Mashynoznavstvo, Iss. 4(142), pp. 18-25.

16. Sulym, H. T., Opanasovych, V. K. & Yatsyk, I. M. (2015). Reissner's plate bending containing two not coaxial identical through-the-thickness cracks taking into account contact zone width of their faces. Visnyk TNTU, Vol. 80, No. 4, pp. 7-19.

17. Timoshenko, S. P. & Voynovsky-Krieger, S. (1966). Plates and shells. Moscow: Nauka.

18. Mushelishvili, N. I. (1966). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka.

19. Mazurak, L. P. & Berezhnitskiy, L. T. (1990). Bending of transversally isotropic plates with defects of cracks type. Kiev: Naukova Dumka.

20. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. & Datsyshyn, A. P. (1976). Distribution of stresses around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka.

УДК 517.9

ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА В ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА

Панасенко Є. В., к. ф.-м. н., доцент

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

panasenko.yevgeniy@gmail.com

У статті розглянуто двоточкову крайову задачу в критичному випадку для матричних диференціальних рівнянь типу Ляпунова. Досліджено задачу в припущенні, що оператор, який описує однорідну лінійну крайову задачу, є нетеровим. Запропоновано підхід до знаходження серед розв'язків крайової задачі того розв'язку, який мінімізує деякий функціонал.

Ключові слова: крайова задача, еволюційний оператор, псевдообернена матриця, функціонал.

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

Панасенко Е. В., к. ф.-м. н., доцент

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

panasenko.yevgeniy@gmail.com

В статье рассмотрена двухточечная краевая задача в критическом случае для матричных дифференциальных уравнений типа Ляпунова. Исследована задача в предположении, что оператор, который описывает линейную краевую задачу, является нетеровым. Предложен подход к нахождению среди решений краевой задачи того решения, которое минимизирует некоторый функционал.

Ключевые слова: краевая задача, эволюционный оператор, псевдообратная матрица, функционал.

A PROBLEM OF OPTIMIZATION OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR LYAPUNOV EQUATIONS IN HILBERT SPACE

Panasenko Y. V., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

Zaporizhzhya National University,
66, Zhykovsky str., Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

panasenko.yevgeniy@gmail.com

The paper is devoted to the investigation of the two-point boundary-value problem in the critical case. This problem has many applications of the theory of boundary-value problems for differential equations. Under the assumption that the corresponding generating operator is Noether's operator the given boundary-value problem is studied. The set of solutions are constructed with the help of the theory of pseudoinvertible operators. An approach is used to construct the set of solutions with the ones of the boundary-value problem that minimizes some functional is proposed.

It should be noted that such equations are used in the games theory and the variational calculations. Many papers exist where in wich matrix Riccati equations and operator differential Riccati equations are investigated. As a rule such equations are investigated in the regular case when are the given problem has a unique solution. In the nonregular case such equation was investigated (in the periodic case) in the works of Boichuk O.A., Krivosheya S.A. [1, 6]. It should be noted that this equation are investigated in operator, matrix case or in the operator-differential case.

Riccati equation plays an important role in the theory of optimal control, calculus of variations, physics and many others applications. It should be noted that in general many papers are devoted to obtaining the conditions of solvability in the regular case. There are also papers [1-3, 6-8] in witch this equation is investigated in finite-dimensional case and papers in witch equation is investigated in the infinite-dimensional case [4, 11].

The paper presents the examples of finite system of such equations. We find the Necessary and sufficient conditions of the existence of solutions of boundary-value problem for Lyapunov equation in the Hilbert space are found. On the basis of this material the boundary-value problem using a pseudoinverse matrix theory is solved. Among the solutions of the boundary-value problem for Lyapunov equation, a solution that minimizes some functional is found.

It was shown that can be applied for studies functional to a minimum, can apply the theory of pseudoinverse matrix [7, 8]. The proposed approach can be applied to study of boundary-value problems for operator-differential equations of general type.

Key words: boundary-value problem, evolutionary operator, pseudoinverse matrix, functional.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Дослідженню крайових задач для диференціальних рівнянь як у скінченновимірному, так і у нескінченновимірному випадках присвячена величезна кількість робіт [4, 6-8, 10]. Серед останнього класу добре відомим є рівняння Ляпунова [1, 3, 4, 9]. У статті розглядається задача оптимізації крайової задачі для операторно-диференціального рівняння Ляпунова в просторі Гільберта. Наша робота є продовженням роботи авторів [4].

Розглянемо таку крайову задачу:

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), \tag{1}$$

$$\ell Z(\cdot) = \alpha, \tag{2}$$

де $Z(t)$ є невідомою оператор-функцією з простору $C([a;b]; H_1)$; $A(t), B(t) \in C([a;b]; L(H_1, H_2))$; оператор-функція $\Phi(t)$ є шляхом у просторі лінійних та обмежених операторів $L(H_1, H_2)$. $\Phi(t)$ – неперервне відображення відрізка $[a;b]$ у простір $L(H_1, H_2)$, тобто $\Phi(t) \in C([a;b]; L(H_1, H_2))$; лінійний обмежений оператор ℓ переводить оператор-функцію $Z(t)$ у простір Гільберта H_2, тобто $\ell : C([a;b]; L(H_1)) \to H_2$; α – елемент з простору H_2.

Серед розв'язків крайової задачі (1), (2) для рівняння Ляпунова шукається такий розв'язок, який мінімізує функціонал $J[C]$:

$$J[C]=\left\|\frac{1}{b-a}\int_a^b Z(t,C)dt-H\right\|\to\min_C , \tag{3}$$

де H – постійний обмежений оператор.

Матричне рівняння такого вигляду відіграє важливу роль у теорії лінійних Гамільтонових систем, варіаційному численні та оптимальному керуванні і широко використовується в теорії ігор [5].

У праці [6] отримано критерій розв'язності періодичної крайової задачі для матричного рівняння Ріккаті в термінах жорданової структури матриць A та B й у нерегулярному випадку. У праці [11] досліджено крайову задачу на керованість для рівняння Ляпунова в просторі Гільберта.

ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ, ЯКИЙ МІНІМІЗУЄ ФУНКЦІОНАЛ У ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА

Розглянемо лінійний оператор K_τ^t, який переводить оператор-функцію $\Phi(t)$ з простору $C([a;b];L(H_1,H_2))$ в оператор-функцію $K_\tau^t[\Phi]\in C([a;b]\times[a;b];L(H_1,H_2))$ вигляду

$$K_\tau^t[\Phi]=X(t)X^{-1}(t)\Phi(\tau)V^{-1}(t)V(t), \tag{4}$$

де $X(t)$, $V(t)$ – еволюційні оператори таких операторно-диференційних рівнянь

$$\dot H(t)=A(t)H(t),\ H(0)=I ,$$

$$\dot Y(t)=B(t)Y(t),\ Y(0)=I ,$$

відповідно.

За допомогою цього оператора можна представити загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$Z(t)=K_a^t[M]+\int_a^t K_\tau^t[\Phi]d\tau , \tag{5}$$

де довільний оператор $M\in L(H_1,H_2)$. Позначимо через $\tilde Z(t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1), який має вигляд:

$$\tilde Z(t)=\int_a^t K_\tau^t[\Phi]d\tau . \tag{6}$$

Підставимо (5) у крайову умову (2) та отримаємо таке операторне рівняння відносно оператора M :

$$LM=\alpha-\ell\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau , \tag{7}$$

де оператор L діє за правилом $LM=\ell K_a^{\cdot}[M]: L(H_1,H_2)\to H_2$. Покажемо, що за певних додаткових умов на оператор L, дане рівняння має розв'язки.

Відповідно, розв'язки рівняння (7) існують тоді й тільки тоді [8], коли

$$P_{N(L^*)}\left[\alpha-\ell\int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right]=0 . \tag{8}$$

Тут $P_{N(L^*)}$ – проектор на ядро оператора L^*, спряженого до оператора L. Ця умова гарантує належність правої частини рівняння (7) $\left[\alpha - \ell\int\limits_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] \in R(L)$ множині значень оператора L.

За виконання умови розв'язності (8), операторне рівняння (7) має множину розв'язків вигляду:

$$M = L^+\left[\alpha - \ell\int\limits_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] + P_{N(L)}C, \tag{9}$$

де C – довільний лінійний обмежений оператор $(C \in L(H_1, H_2))$, $P_{N(L)}$ – проектор на ядро оператора L. Підставивши оператор M в (5), отримаємо загальний розв'язок (1), (2) у вигляді:

$$Z(t,C) = K_a^t\left[P_{N(L)}C\right] + G([\Phi,\alpha])(t), \tag{10}$$

де узагальнений оператор Гріна визначається так

$$G([\Phi,\alpha])(t) = \int\limits_a^t K_\tau^t[\Phi]d\tau - K_a^t\left[\ell\int\limits_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] + K_a^t\left[L^+\alpha\right] \tag{11}$$

Теорема 1. Нехай оператор L є узагальнено-оборотним. Тоді крайова задача (1),(2) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли $R(L) = \overline{R(L)}$ й виконується умова (8). За виконання умови (8) розв'язки крайової задачі (1),(2) мають вигляд (10) для довільного оператора $C \in L(H_1, H_2)$.

Серед розв'язків (10) крайової задачі (1), (2) для рівняння Ляпунова знайдемо той розв'язок, який мінімізує функціонал (3) $J[C] = \left\|\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b Z(t,C)dt - H\right\| \to \min\limits_C$, де H – постійний обмежений оператор. Позначимо через $\overline{Z}(C) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b Z(t,C)dt$. Якщо $\min\limits_C$ досягається, то відповідно, умова (3) еквівалентна знаходженню розв'язків рівняння:

$$\overline{Z}(C) = H. \tag{12}$$

Якщо [7] $P_{N(\overline{Z}^*)}H = 0$, то $\inf\limits_{[a;b]} C = 0$ і досягається на

$$C = \overline{Z}^+ H. \tag{13}$$

Якщо $P_{N(\overline{Z}^*)}H \neq 0$, то рівняння (12) нерозв'язне, однак воно завжди має псевдорозв'язок C^+, який мінімізує відхил $\left\|\tilde{Z}(C) - H\right\|$ у розв'язку рівняння (12) і серед усіх C, на яких відхил $\left\|\tilde{Z}(C) - H\right\|$ досягає найменшого значення. Рівняння (12) завжди має один і тільки один найкращий псевдорозв'язок C^+ у сенсі найменших квадратів. Незважаючи на те, що псевдорозв'язок єдиний, розв'язок рівняння (12) у значенні найменших квадратів має вигляд:

$$C^+ = \overline{Z}^+ H + P_{N(Q)}\overline{C}. \tag{14}$$

ПРИКЛАД

Нехай задана крайова задача для матричного диференціального рівняння типу Ляпунова вигляду (1), (2) з компонентами: $A = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$ $B = \mathrm{diag}\{0,1,0,1\}$, $\Phi(t) = \mathrm{diag}\left\{e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}\right\}$, $\alpha = \mathrm{diag}\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{44}\}$ – діагональні матриці; крайова умова має вигляд – $\ell Z(\cdot) = Z(0) - Z(\ln 16) = \alpha$; $Z = Z(t)$ є невідомою матрицею.

Еволюційні оператори $X(t)$, $V(t)$ дорівнюють:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{3}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{4}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{1}{5}t} \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Матриця $K_\tau^t[\Phi] = X(t)X^{-1}(t)\Phi(\tau)V^{-1}(t)V(t)$ дорівнює

$$K_\tau^t[\Phi] = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{4}{3}t + \frac{1}{6}\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{6}{5}t + \frac{3}{10}\tau} \end{pmatrix}.$$

За допомогою оператора $K_\tau^t[\cdot]$ можна представити загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді $Z(t) = K_0^t[M] + \int\limits_0^t K_\tau^t[\Phi]d\tau$, де M – матриця з невідомими компонентами, які треба знайти. Оскільки, за умовою задачі A і B – діагональні матриці, то для зручності будемо шукати матрицю M у вигляді діагональної матриці $M = \mathrm{diag}\{m_{11}, 0, m_{33}, 0\}$. Знайдемо оператор $K_0^t[M]$ за формулою (4):

$$K_0^t[M] = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\tau} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\tau} m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор L діє за правилом $LM = \ell K_a^{\cdot}[M]$:

$$L = \begin{pmatrix} -3m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Цей оператор немає оберненого L^{-1}, але існує псевдообернений оператор

$$L^{+}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3m_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{3m_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проектори $P_{N(L)}$ і $P_{N(L^*)}$ у цьому випадку будуть дорівнювати: $P_{N(L)}=\operatorname{diag}\{0,1,0,1\}$, $P_{N(L^*)}=\operatorname{diag}\{0,1,0,1\}$.

Умова розв'язності (8) виконується при $\alpha_{22}=-384+192\sqrt[3]{2}$, $\alpha_{44}=-\dfrac{640}{3}+\dfrac{160}{3}\sqrt[5]{16}$ та довільних $\alpha_{11}\in R$ і $\alpha_{33}\in R$. Отже, загальний розв'язок рівняння (1) можна виписати у вигляді:

$$Z(t,C)=\begin{pmatrix} -\dfrac{e^{\frac{1}{2}t}(\alpha_{11}+16\ln 2)}{3m_{11}}+e^{\frac{1}{2}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}e^{\frac{4}{3}t}-6e^{\frac{4}{3}t}+6e^{\frac{3}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{e^{\frac{1}{4}t}(\alpha_{33}+8)}{m_{33}}-4e^{\frac{1}{4}t}+4e^{\frac{1}{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}e^{\frac{6}{5}t}-\dfrac{10}{3}e^{\frac{6}{5}t}+\dfrac{10}{3}e^{\frac{3}{2}t} \end{pmatrix}$$

Підставивши знайдену матрицю $Z(t,C)$ в крайову умову, з'ясовуємо, що $m_{11}=1$, $m_{33}=1$. Оскільки α_{11} і α_{33} довільні, то покладемо $\alpha_{11}=\alpha_{33}=0$. Отже, функція $Z(t,C)$ дорівнює:

$$Z(t,C)=\begin{pmatrix} -\dfrac{16}{3}e^{\frac{1}{2}t}\ln 2+e^{\frac{1}{2}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}e^{\frac{4}{3}t}-6e^{\frac{4}{3}t}+6e^{\frac{3}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12e^{\frac{1}{4}t}+4e^{\frac{1}{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}e^{\frac{6}{5}t}-\dfrac{10}{3}e^{\frac{6}{5}t}+\dfrac{10}{3}e^{\frac{3}{2}t} \end{pmatrix}.$$

Серед розв'язків $Z(t,C)$ крайової задачі (1), (2) знайдемо такий розв'язок, який мінімізує функціонал $J[C]$ вигляду (3). У ролі матриці H візьмемо діагональну матрицю $H=\operatorname{diag}\{h_{11},h_{22},h_{33},h_{44}\}$.

$$J[C]=\left\|\frac{1}{b-a}\int_a^b Z(t,C)dt-H\right\|=$$

$$=\left\|\operatorname{diag}\left\{-\frac{3}{\ln 2}-h_{11},\frac{1}{4\ln 2}\left(-\frac{3}{4}c_{22}+\frac{513}{2}+24c_{22}\sqrt[3]{2}-144\sqrt[3]{2}\right)-h_{22},\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{6}{\ln 2}-h_{33},\frac{1}{4\ln 2}\left(-\frac{5}{6}c_{44}+\frac{1285}{9}+\frac{40}{3}c_{44}\sqrt[5]{16}-\frac{400}{9}\sqrt[5]{16}\right)-h_{44}\right\}\right\|\to\min_C .$$

Застосовуючи метод найменших квадратів, можна знайти c_{22} і c_{44}. У цьому випадку маємо:

$$c_{22} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8h_{22}\ln 2 + 282\sqrt[3]{2} - 5113}{32\sqrt[3]{2} - 1},$$

$$c_{44} = -\frac{2}{15} \cdot \frac{576h_{44}\sqrt[5]{16}\ln 2 - 20960\sqrt[5]{16} + 12800\sqrt[5]{8} - 36h_{44}\ln 2 + 1285}{32\sqrt[5]{16} - 512\sqrt[5]{8} - 1}.$$

Узявши, наприклад, $h_{22} = h_{44} = 1$, маємо, що при $c_{22} \approx -2{,}451794702$ і $c_{44} \approx -2{,}797995711$ розв'язок $Z(t, C)$ крайової задачі (1), (2) мінімізує функціонал $J[C]$.

ВИСНОВКИ

У дослідженні розглянута задача оптимізації крайової задачі для рівняння Ляпунова в просторі Гільберта. Ця теорія працює як у критичному так й у регулярному випадку [7, 8].

Показано, що для дослідження функціоналів на мінімум можна застосовувати теорію псевдообертання [7, 8]. Запропонований підхід можна застосовувати до дослідження крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь загального типу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бойчук О. А., Кривошея С.А. Критерій розв'язності матричних рівнянь типу Ляпунова. *Укр. мат. журн*. 1998. Т. 50, № 8. С. 1021–1026.
2. Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Москва: Наука, 1970. 534 с.
3. Чуйко С. М. О решении матричных уравнений Ляпунова. *Вісник ХНУ імені В. Н. Каразіна, серія Математика, прикладна математика і механіка*. 2014. № 1120. С. 85–94.
4. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Керованість крайових задач для рівнянь Ляпунова в просторі Гільберта. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2015. № 3. С. 212–220.
5. Брайсон А., Ю-ши Хо. Прикладная теория оптимального управления. Москва: Мир, 1972. 544 с.
6. Boichuk A. A., Krivosheya S. A. A Critical Periodic Boundary-Value Problem for a Matrix Riccati Equation. *Differential Equations*. 2001. Vol. 37, № 4. P. 464–471.
7. Бойчук А. А., Журавлёв В. Ф., Самойленко А. М. Обобщённо-обратные операторы и нётеровы краевые задачи. Киев: Институт математики НАНУ, 1995. 320 с.
8. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. II edition, De Gruyter, 2016. 296 p.
9. Bhatia Rajendra. A note on the Lyapunov equation. *Linear algebra and its applications*. 1997. Vol. 259. P. 71–76.
10. Bondarev A. N., Laptinskii V. N. Multipoint Boundary-Value Problem for the Lyapunov Equation in the Case of Strong Degeneration of the Boundary Conditions. *Differential Equations*. 2011. Vol. 47, № 6. P. 778–786.
11. Panasenko E. V., Pokutnyi O. O. Boundary-value problems for the Lyapunov equation in Banach spaces. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 223, № 3. P. 298–304.

REFERENCES

1. Boychuk, O. A. & Krivosheya, S. A. (1998). Criterion of the solvability of the matrix equations of Lyapunov type. Ukrainskyy matematychnyy zhurnal, Vol. 50, No. 8, pp. 1021-1026 (in Russian).
2. Kreyn, M. G. (1970). Stability of solutions of differential equations in a Banach space. Moskow: Nauka.
3. Chuyko, S. M. (2014). About solutions of the matrix Lyapunov equations. Visnik HNU imeni V.N. Karazina, seriya Matematika, prikladna matematika i mehanika, No. 1120, pp. 85-94 (in Russian).

4. Panasenko, E. V. & Pokutniy, O. O. (2015). Controllability of boundary-value problems for Lyapunov equations in Hilbert space. Visnik Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki, No. 3, pp. 212-220 (in Ukrainian).
5. Brayson, A. (1972). Applied optimal control theory. Moskow: Mir.
6. Boychuk, O. A. & Krivosheya, S. A (2001). A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation. Differential Equations, Vol.37, No. 4, pp. 464-471.
7. Boichuk, A. A., Zhuravlyev, V. F. & Samoilenko, A. M. (1995). Generalized-inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Kyiv: Institut matematiki NANU.
8. Boichuk, A. A. & Samoilenko, A. M. (2016). Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems. II edition, De Gruyter.
9. Bhatia Rajendra, (1997). A note on the Lyapunov equation. Linear algebra and its applications. No. 259, pp. 71-76.
10. Bondarev, A. N. & Laptinskii, V. N. (2011). Multipoint boundary-value problem for the Lyapunov equation in the case of strong degeneration of the boundary conditions. Differential Equations, Vol. 47, No. 6, pp. 778-786.
11. Panasenko, E. V. & Pokutnyi, O. O. (2017). Boundary-value problems for the Lyapunov equation in Banach spaces. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 223, No. 3, pp. 298-304.

УДК 539.3

МІШАНА ЗАДАЧА ФРИКЦІЙНОГО КОНТАКТУ КОАКСІАЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ТА ПРУЖНОГО ЗАПОВНЮВАЧА

Попадюк І. Й., к. ф.-м. н., старший науковий співробітник

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3 б, м. Львів, 79060, Україна

igorpopadyuk60@gmail.com

З метою розробки інженерної методики розрахунку оболонкових бурових амортизаторів, проведено механіко-математичне моделювання оболонкового пружного елемента. Сформульовано та розв’язано мішану контактну задачу. Визначено критерій розташування зон проковзування та зчеплення на поверхнях контакту.

Ключові слова: оболонка, заповнювач, тертя, контакт, моделювання, проковзування, зчеплення.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК И УПРУГОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ

Попадюк И. И., к. ф.-м. н., старший научный сотрудник

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины, ул. Наукова, 3 б, г. Львов, 79060, Украина

С целью разработки инженерной методики расчёта оболочечных буровых амортизаторов, проведено механико-математическое моделирование оболочечного упругого элемента. Сформулирована и решена смешанная контактная задача. Определён критерий размещения зон проскальзывания и сцепления на поверхностях контакта.

Ключевые слова: оболочка, заполнитель, трение, контакт, моделирование, проскальзывание, сцепление.