

4. Panasenko, E. V. & Pokutniy, O. O. (2015). Controllability of boundary-value problems for Lyapunov equations in Hilbert space. Visnik Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki, No. 3, pp. 212-220 (in Ukrainian).
5. Brayson, A. (1972). Applied optimal control theory. Moskow: Mir.
6. Boychuk, O. A. & Krivosheya, S. A (2001). A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation. Differential Equations, Vol.37, No. 4, pp. 464-471.
7. Boichuk, A. A., Zhuravlyev, V. F. & Samoilenko, A. M. (1995). Generalized-inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Kyiv: Institut matematiki NANU.
8. Boichuk, A. A. & Samoilenko, A. M. (2016). Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems. II edition, De Gruyter.
9. Bhatia Rajendra, (1997). A note on the Lyapunov equation. Linear algebra and its applications. No. 259, pp. 71-76.
10. Bondarev, A. N. & Laptinskii, V. N. (2011). Multipoint boundary-value problem for the Lyapunov equation in the case of strong degeneration of the boundary conditions. Differential Equations, Vol. 47, No. 6, pp. 778-786.
11. Panasenko, E. V. & Pokutnyi, O. O. (2017). Boundary-value problems for the Lyapunov equation in Banach spaces. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 223, No. 3, pp. 298-304.

УДК 539.3

## **МІШАНА ЗАДАЧА ФРИКЦІЙНОГО КОНТАКТУ КОАКСІАЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ТА ПРУЖНОГО ЗАПОВНІЮВАЧА**

Попадюк І. Й., к. ф.-м. н., старший науковий співробітник

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова, 3 б, м. Львів, 79060, Україна*

igorpopadyuk60@gmail.com

З метою розробки інженерної методики розрахунку оболонкових бурових амортизаторів, проведено механіко-математичне моделювання оболонкового пружного елемента. Сформульовано та розв'язано мішану контактну задачу. Визначено критерій розташування зон проковзування та зчеплення на поверхнях контакту.

*Ключові слова: оболонка, заповнювач, тертя, контакт, моделювання, проковзування, зчеплення.*

## **СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК И УПРУГОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ**

Попадюк И. И., к. ф.-м. н., старший научный сотрудник

*Институт прикладных проблем механики и математики  
им. Я. С. Подстригача НАН Украины,  
ул. Наукова, 3 б, г. Львов, 79060, Украина*

С целью разработки инженерной методики расчёта оболочечных буровых амортизаторов, проведено механико-математическое моделирование оболочечного упругого элемента. Сформулирована и решена смешанная контактная задача. Определён критерий размещения зон проскальзывания и сцепления на поверхностях контакта.

*Ключевые слова: оболочка, заполнитель, трение, контакт, моделирование, проскальзывание, сцепление.*

## MIXED PROBLEM OF FRICTIONAL INTERACTION OF A COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS WITH AN ELASTIC FILLER

Popadyuk I. Y., Ph.D. in Physics and Maths, senior scientific co-worker

*Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics,  
Ukrainian National Academy of Sciences,  
Naukova str., 3 b, Lviv, 79060, Ukraine.*

In the contemporary industry, a significant role is played by vibrational processes. The operation of all machines and mechanisms without exception is directly connected with the appearance of vibrations. In most cases, vibrations decrease the strength, reliability, and durability of industrial machines, mechanisms, and structures and exert harmful influence on the health of the personnel. Thus, the problem of vibroinsulation proves to be quite urgent both from the viewpoint of engineering and for the labor protection. One of the ways used for the solution of the formulated problem is connected with the application of vibroprotecting devices, such as shock absorbers, dampers, dynamic vibration absorbers, etc. This is why the research and design works and theoretical investigations in the field of development of new means of vibroprotection and methods for their numerical analyses are of crucial importance. Note that new promising vibroinsulators were designed at the Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics on the basis of a new type of vibration-protecting devices based on the so-called shell elastic elements. As the main distinctive feature of structures of this type, we can mention the application of thin-wall elements (shells, plates, and bars) as the principal bearing and actuating elements. From the viewpoint of design, these are deformable shell systems with dry friction. In the mechano-mathematical modeling of the behavior of elastic elements under (generally speaking, nonmonotonic) loading, we get a class of nonlinear nonconservative mixed contact problems of the frictional interaction of thin shells with deformable fillers. Many boring devices of vibration insulation which are used for drilling of oil and gas wells are included an internal shell assigned for various technological requirements. That is why, the necessity of mechanical and mathematical modelling of system of a coaxial cylindrical shells divided by the elastic filler is existed. The mixed problem of frictional interaction in this system has been investigated in presented work with allowance for the Coulomb friction. The analytical description of the stress-strain state has been obtained by using the applied models. The obtained results make it possible to extend the range of applicability of the methods used for the numerical analyses of shell vibroinsulators and perform a more accurate analysis of the influence of the elastic characteristics of the materials of the shells and the filler on durability of the analyzed system.

*Key words: shell, filler, friction, interaction, modelling, sliding, adhesion.*

### ВСТУП

Буріння нафтових і газових свердловин пов'язане з виникненням значних вібрацій. В Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України розроблені перспективні конструкції бурових амортизаторів, пружні елементи яких є оболонковими системами з пружним заповнювачем [1]. Детальний огляд публікацій, присвячених дослідженню динамічних систем з різноманітними законами тертя, здійснено у статті [2]. При механіко-математичному моделюванні поведінки пружних елементів виникає клас конструктивно нелінійних неконсервативних мішаних контактних задач про фрикційну взаємодію тонких оболонок з деформівним заповнювачем. Загальні підходи до формулювання та розв'язування таких задач, розроблені для спрощених одновимірних моделей, представлено в монографії [3]. Постановки, методи і розв'язки деяких задач цього класу для циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем та результати експериментальних досліджень подано в роботах авторів [4-6]. Наявність у багатьох бурових засобах віброзахисту внутрішньої оболонки (так званого «ствола»), призначеної для різноманітних технологічних потреб, диктує необхідність дослідження системи коаксіальних циліндричних оболонок, розділених пружним деформівним заповнювачем (рис. 1), в умовах фрикційного контакту.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

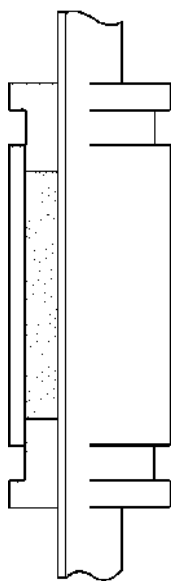


Рис. 1

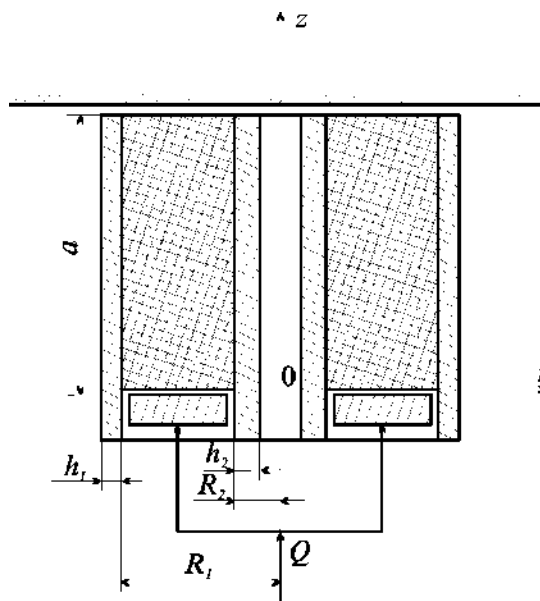


Рис. 2

Симетрія конструкції дозволяє розглянути половину системи (рис. 2). Маємо пружний порожнистий циліндр зовнішнього  $R_1$  і внутрішнього  $R_2$  радіусів і довжини  $a$ , який заповнює простір між коаксіально встановленими зовнішньою (радіуса  $R_1$  і товщини  $h_1$ ) і внутрішньою (радіуса  $R_2$  і товщини  $h_2$ ) тонкими оболонками. На один із торців циліндра через абсолютно жорсткий гладкий поршень передається зовнішнє немонотонне за часом навантаження  $Q$ ; другий торець циліндра, разом із оболонками, гладко впирається в жорстку перепону. Заповнювач і оболонки взаємодіють із сухим тертям.

Дослідження проводимо у вказаних на рис. 2 циліндричних координатах. Крайові умови в напруженнях для порожнистого нескінченного циліндра будуть

$$\sigma_r|_{r=R_i} = \sigma_i, \quad \tau_{rz}|_{r=R_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

Тут  $\sigma_i, \tau_i$  – задані на поверхнях  $r = R_i, i = 1, 2$  нормальні і дотичні напруження.

Модельні співвідношення для порожнистого циліндра отримаємо, вважаючи, що в кожному поперечному ( $z = const$ ) перерізі заповнювача переміщення визначаються як суперпозиція розв’язків задачі Ламе про радіальний стиск порожнистого циліндра і задачі про осьовий стиск стержня при дії дотичних напружень на циліндричних поверхнях. Маємо

$$u_r = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left( \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^2 R_2^2}{r} (1 + \nu) + (\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2) (1 - \nu) r - \nu (R_1^2 - R_2^2) r \sigma_z \right), \tag{2}$$

$$u_z = \frac{-2\nu(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{E(R_1^2 - R_2^2)} (z - a) + \frac{1}{E} (z - a) \sigma_z. \tag{3}$$

Рівняння рівноваги заповнювача має вигляд

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = 0. \tag{4}$$

Запишемо співвідношення (2) на поверхнях  $r = R_i, i = 1, 2$ , продиференціюємо (3) по  $z$  і усереднимо рівняння рівноваги (4) по поперечному перерізу, одержимо необхідні початкові співвідношення для заповнювача, записані у зручному для подальшого дослідження вигляді

$$\frac{w_1}{R_1} = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left( [R_2^2(1+\nu) + R_1^2(1-\nu)]\sigma_1 - 2R_2^2\sigma_2 \right) - \frac{\nu}{E}\sigma_\zeta; \quad (5)$$

$$\frac{w_2}{R_2} = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \times \left( -[R_1^2(1+\nu) + R_2^2(1-\nu)]\sigma_2 + 2R_1^2\sigma_1 \right) - \frac{\nu}{E}\sigma_\zeta; \quad (6)$$

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{2\nu(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{E(R_1^2 - R_2^2)} + \frac{1}{E}\sigma_\zeta; \quad (7)$$

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} (R_1\tau_1 - R_2\tau_2) = 0. \quad (8)$$

Тут  $\zeta = z/a \in [0, 1]$ ;  $w_i$  – радіальні переміщення на поверхнях  $r = R_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу заповнювача.

Пружну рівновагу оболонок описуємо співвідношеннями безмоментної теорії: рівняння рівноваги

$$\frac{dN_\zeta^{(i)}}{d\zeta} + (-1)^i a\tau_i = 0; \quad N_\beta^{(i)} = (-1)^i R_i\sigma_i; \quad (9)$$

фізичні співвідношення (закон Гука)

$$\varepsilon_\zeta^{(i)} = \frac{1}{a} \frac{du_i}{d\zeta} = \frac{1}{E_i h_i} [N_\zeta^{(i)} - \nu_i N_\beta^{(i)}]; \quad \varepsilon_\beta^{(i)} = \frac{w^{(i)}}{R_i} = \frac{1}{E_i h_i} [N_\beta^{(i)} - \nu_i N_\zeta^{(i)}], \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Тут:  $N_\zeta^{(i)}$ ,  $N_\beta^{(i)}$  – мембранні зусилля;  $u_i$ ,  $w^{(i)}$  – осьові та радіальні переміщення оболонок;  $E_i$ ,  $\nu_i$  – пружні характеристики їх матеріалів;  $\sigma_i$ ,  $\tau_i$  – нормальні і дотичні контактні напруження, задані на внутрішній поверхні першої і на зовнішній поверхні другої оболонок.

На торцях заповнювача і оболонок виконуються умови

$$\sigma_\zeta(0) = -P \equiv -\frac{Q}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}, \quad N_\zeta^{(i)}(0) = 0; \quad (11)$$

$$u(1) = 0, \quad u_i(1) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

де  $u$  – осьове переміщення заповнювача.

Фрикційну взаємодію оболонок і заповнювача описуємо співвідношеннями одностороннього контакту

$$w = w^{(i)}, \quad \sigma_i < 0, \quad i = 1, 2, \quad \zeta \in [0, 1] \quad (13)$$

і законом сухого тертя, записаним у такій формі:

область проковзування на обидвох поверхнях контакту

$$\tau_i = (-1)^j f_i \sigma_i, \quad u > u_i, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad \zeta \in [0, \alpha_k]; \quad (14)$$

область проковзування-зчеплення (проковзування на одній поверхні, зчеплення – на другій)

$$u = u_k, \quad u > u_m, \quad |\tau_k| < -f_k \sigma_k, \quad \tau_m = (-1)^k f_m \sigma_m, \quad k \neq m, \quad \zeta \in [\alpha_k, \alpha_m]; \quad (15)$$

область зчеплення на обидвох поверхнях контакту

$$u = u_i, \quad |\tau_i| < -f_i \sigma_i, \quad i = 1, 2, \quad \zeta \in (\alpha_m, 1). \quad (16)$$

Тут:  $f_i$  – коефіцієнти тертя на поверхнях  $r = R_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\alpha_k$  – координата кінця області загального проковзування;  $\alpha_m$  – координата початку області загального зчеплення. Координати точок будемо знаходити, задовольняючи умови неперервності осьових напружень. Позначимо

$$\sigma^{(3)} = \sigma_\zeta; \quad \sigma^{(s)} = \frac{N_\zeta^{(s)}}{R_s}, \quad s = 1, 2.$$

Умови неперервності в цих позначеннях будуть

$$\sigma^{(s)}(\alpha_k - 0) = \sigma^{(s)}(\alpha_k + 0), \quad s = \overline{1, 3}; \quad (17)$$

$$\sigma^{(s)}(\alpha_m - 0) = \sigma^{(s)}(\alpha_m + 0), \quad s = \overline{1, 3}. \quad (18)$$

Записаний у формі (14)-(16) закон сухого тертя потребує деяких пояснень. Індекс  $k$  тут може приймати значення 1 або 2 (індекс  $m$  відповідно значення 2 або 1) залежно від того, на якій із контактуючих поверхонь швидше досягається початок області зчеплення. Наприклад, якщо  $k = 1$ , то  $m = 2$ , і в області проковзування – зчеплення цей варіант буде означати зчеплення на зовнішній поверхні заповнювача і проковзування на внутрішній. Якщо, навпаки,  $m = 1$ ,  $k = 2$ , то маємо другий варіант: зчеплення на внутрішній поверхні заповнювача і проковзування на зовнішній. Критерій для вибору варіанта в явному вигляді безпосередньо в процесі розв’язування задачі отримати не вдалося. Знаходження координат точок  $\alpha_k$ ,  $\alpha_m$  розділу областей пов’язане з умовами (17), (18) неперервності осьових напружень, що призводить до числового пошуку коренів трансцендентних рівнянь. Отже, і критерій вибору варіанта буде отриманий у результаті розв’язування трансцендентних рівнянь.

Проінтегруємо рівняння рівноваги (8), (9). З урахуванням крайових умов (11), маємо

$$\sigma_\zeta = -P - \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_0^\zeta (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta; \quad (19)$$

$$N_\zeta^{(i)} = (-1)^j a \int_0^\zeta \tau_i d\zeta, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (20)$$

Підставляючи вирази для мембранних зусиль (9), (20) у закон Гука (10), отримуємо осьові деформації і радіальні переміщення оболонок через невідомі контактні напруження

$$\varepsilon_\zeta^{(i)} = (-1)^j \frac{R_i}{E_i h_i} \left( v_i \sigma_i + \frac{a}{R_i} \int_0^\zeta \tau_i d\zeta \right), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j; \quad (21)$$

$$\frac{w^{(i)}}{R_i} = (-1)^i \frac{R_i}{E_i h_i} \left( \sigma_i + v_i \frac{a}{R_i} \int_0^\zeta \tau_i d\zeta \right), \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Підставляючи вираз (19) для осьових напружень заповнювача в формулу (7), отримуємо осьові деформації заповнювача

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{1}{E} \left[ \frac{2\nu(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} + P + \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_0^\zeta (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta \right]. \quad (23)$$

Введемо позначення деяких безрозмірних величин

$$\varepsilon_i = \frac{ER_i}{E_i h_i}, \quad r_i^2 = \frac{R_i^2}{R_1^2 - R_2^2}, \quad l_i = \frac{a}{R_i}, \quad \chi_i = (-1)^i (1 + \nu) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2.$$

Підставляючи вирази для радіальних переміщень заповнювача (5), (6) і оболонок (10) в умови одностороннього контакту (13), отримуємо

$$\begin{aligned} (2r_i^2 + \chi_i)\sigma_i - 2r_j^2\sigma_j + l_i(2\nu r_i^2 + \nu_i \varepsilon_i) \int_0^\zeta \tau_i d\zeta - 2\nu l_j r_j^2 \int_0^\zeta \tau_j d\zeta + (-1)^j \nu P = 0, \\ i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad \zeta \in (0, 1). \end{aligned} \quad (24)$$

### ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ

Тепер перейдемо до запису ключових рівнянь і отримання розв'язків контактної задачі окремо в кожній області.

**Область проковзування на обидвох поверхнях контакту**  $\zeta \in [0, \alpha_k)$ . Беручи до уваги закон Кулона (14), із рівнянь (22) отримуємо

$$\begin{aligned} (2r_i^2 + \chi_i)\sigma_i - 2r_j^2\sigma_j + f_i l_i (2\nu r_i^2 + \nu_i \varepsilon_i) (-1)^j \int_0^\zeta \sigma_i d\zeta - \\ - 2\nu f_j l_j r_j^2 (-1)^i \int_0^\zeta \sigma_j d\zeta + (-1)^j \nu P = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (25)$$

Продиференціюємо рівняння (25) і приведемо отриману систему звичайних диференціальних рівнянь до нормального вигляду

$$\frac{d\sigma_i}{d\zeta} = \sum_n a_{in} \sigma_n; \quad i, n = 1, 2. \quad (26)$$

Крайові умови для системи (26) отримаємо з рівняння (25) при  $\zeta = 0$

$$\sigma_i(0) = (-1)^j \frac{\chi_j \nu}{\chi_o} P; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (27)$$

У формулах (26), (27) введені позначення

$$\begin{aligned} \chi_o &= -\chi_1 \chi_2 - 2r_1^2 \chi_2 - 2r_2^2 \chi_1; \\ a_{nm} &= (-1)^n f_m l_m \left[ (2\nu r_m^2 + \nu_m \varepsilon_m) \chi_n + 2\nu_m r_n^2 \varepsilon_m \right] / \chi_o; \\ a_{nm} &= (-1)^n 2r_m^2 f_m l_m (\nu_m \varepsilon_m - \nu \chi_m) / \chi_o; \quad n, m = 1, 2; \quad n \neq m. \end{aligned}$$

Розв'язок задачі (26), (27) має такий вигляд:

$$\sigma_i = P \sum_n K_{in} e^{\lambda_n \zeta}, \quad \tau_i = (-1)^j f_i P \sum_n K_{in} e^{\lambda_n \zeta}; \quad i, j, n = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (28)$$

Тут введені позначення

$$\lambda_n = \left[ a_{11} + a_{22} + (-1)^n \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{21}a_{12}} \right] / 2;$$

$$K_{in} = \left( -\frac{a_{11} - \lambda_n}{a_{12}} \right)^{\delta_{2i}} (a_{11}\chi_2 - a_{12}\chi_1 - \lambda_n\chi_2)(-1)^m \frac{v}{\chi_o(t_1 - t_2)};$$

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $m, n, i = 1, 2$ ;  $m \neq n$ .

Напружено-деформований стан системи в області проковзування визначається підстановкою знайдених контактних напружень у вихідні співвідношення. Для радіальних переміщень і осьових деформацій на основі формул (21)-(23) маємо

$$\frac{w_i}{R_i} = \frac{PR_i}{E_i h_i} \sum_n K_{in} \left[ (-1)^i e^{\lambda_n \zeta} - \frac{v_i f_i l_i}{\lambda_n} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) \right], \tag{29}$$

$$\varepsilon_\zeta^{(i)} = \frac{PR_i}{E_i h_i} \sum_n K_{in} \left[ (-1)^j v_i e^{\lambda_n \zeta} + \frac{f_i l_i}{\lambda_n} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) \right], \tag{30}$$

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{P}{E} \left\{ 1 + 2 \sum_i \sum_n r_i^2 K_{in} \left[ v (-1)^j e^{\lambda_n \zeta} + \frac{f_i l_i}{\lambda_n} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) \right] \right\}; \quad i, j, n = 1, 2; \quad i \neq j. \tag{31}$$

Осьові напруження в заповнювачі і осьові мембранні зусилля в оболонках будуть

$$\sigma_\zeta = -P \left\{ 1 + 2 \sum_n \sum_m f_m l_m r_m^2 K_{mn} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) / \lambda_n \right\}; \quad \frac{N_\zeta^{(i)}}{R_i} = P f_i l_i \sum_n K_{in} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) / \lambda_n;$$

$$i, m, n = 1, 2. \tag{32}$$

Запишемо осьові напруження (32) у кінці області проковзування

$$\sigma^{(s)}(\alpha_k) = \sum_{n=1}^3 g_{sn} e^{\lambda_n \alpha_k}, \quad s = \overline{1, 3}. \tag{33}$$

Тут  $\lambda_3 = 0$ ;

$$g_{sn} = P \left\{ \begin{array}{ll} f_s l_s K_{sn} / \lambda_n; & n = 1, 2 \\ -f_s l_s \sum_r K_{sr} / \lambda_r; & n = 3 \end{array} \right\}, \quad r, s = 1, 2;$$

$$g_{3n} = -P \left\{ \begin{array}{ll} 2 \sum_m f_m l_m r_m^2 K_{mn} / \lambda_n, & n = 1, 2 \\ 1 - 2 \sum_r \sum_m f_m l_m r_m^2 K_{mr} / \lambda_r, & n = 3 \end{array} \right\}, \quad r, m = 1, 2.$$

**Область проковзування-зчеплення**  $\zeta \in [\alpha_k, \alpha_m]$ .

Як уже зазначалось у коментарях до форми запису закону сухого тертя, можливі два варіанти граничних умов у цій області. Для того, щоб уникнути зайвої громіздкості, дослідження проводимо одразу для обидвох варіантів.

Співвідношення (19), (20) для осьових напружень і зусиль у розглядуваній області мають вигляд:

$$\sigma_\zeta = \sigma_\zeta(\alpha_k) - \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_{\alpha_k}^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta;$$

$$N_{\zeta}^{(i)} = N_{\zeta}^{(s)}(\alpha_k) + (-1)^j a \int_{\alpha_k}^{\zeta} \tau_i d\zeta, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (34)$$

Умови одностороннього контакту (13) з урахуванням закону тертя (15) і співвідношень (34) будуть:

$$\begin{aligned} & (2r_i^2 + \chi_i) \sigma_i - 2r_j^2 \sigma_j + l_i (2vr_i^2 + v_i \varepsilon_i) \int_{\alpha_k}^{\zeta} [\delta_{ik} \tau_i + \delta_{jk} (-1)^j f_i \sigma_i] d\zeta - \\ & - 2vl_j r_j^2 \int_{\alpha_k}^{\zeta} [\delta_{jk} \tau_j + \delta_{ik} (-1)^i f_j \sigma_j] d\zeta = \\ & = (-1)^j \left[ v \sigma_{\zeta}(\alpha_k) - v_i \varepsilon_i N_{\zeta}^{(s)}(\alpha_k) / R_i \right]; \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (35)$$

Оскільки на торці системи, який гладко впирається в жорстку перепону, виконуються умови (12), то у формулюваннях закону тертя (15) умови рівності осьових переміщень можна замінити умовами сумісності осьових деформацій. Відповідно, маємо

$$\varepsilon_{\zeta} = \varepsilon_{\zeta}^{(k)}, \quad \zeta \in (\alpha_k, \alpha_m). \quad (36)$$

Осьові деформації в розглядуваній області отримаємо, підставляючи співвідношення для осьових напружень і зусиль (34) у вихідні формули (7), (10)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\zeta} &= -\frac{1}{E} \left[ \frac{2v(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} - \sigma_{\zeta}(\alpha_k) + \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_{\alpha_k}^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta \right]; \\ \varepsilon_{\zeta}^{(k)} &= \frac{R_k}{E_k h_k} \left( \frac{N_{\zeta}^{(k)}(\alpha_k)}{R_k} - (-1)^k \left( v_k \sigma_k + \frac{a}{R_k} \int_{\alpha_k}^{\zeta} \tau_k d\zeta \right) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Підставляючи отримані вирази (37) в умову (36), маємо

$$\begin{aligned} & (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \sigma_k - 2vr_m^2 \sigma_m + l_k (2r_k^2 + \varepsilon_k) \int_{\alpha_k}^{\zeta} \tau_k d\zeta - 2l_m r_m^2 (-1)^k f_m \int_{\alpha_k}^{\zeta} \sigma_m d\zeta = \\ & = (-1)^m \left[ \sigma_{\zeta}(\alpha_k) - \varepsilon_k N_{\zeta}^{(k)}(\alpha_k) / R_k \right], \quad k \neq m. \end{aligned} \quad (38)$$

Отже, отримана система трьох ключових рівнянь – два рівняння (35) і одне (38) (залежно від варіанта  $k$  – фіксоване число).

Виключимо з двох рівнянь (35) з допомогою формул (38) невідому величину  $\int_{\alpha_k}^{\zeta} \tau_k d\zeta$ ,

продиференціюємо знайдені співвідношення і зведемо отриману систему звичайних диференціальних рівнянь до нормального вигляду

$$\frac{d\sigma_i}{d\zeta} = \sum_n b_{in}^k \sigma_n; \quad i = 1, 2. \quad (39)$$

Тут введено позначення

$$b_{in}^k = \frac{(B_{ij}^k D_{ji}^k - C_{ij}^k A_{ji}^k) \delta_{in} + (B_{ij}^k C_{ji}^k - D_{ij}^k A_{ji}^k) \delta_{jn}}{A_{ij}^k A_{ji}^k - B_{ij}^k B_{ji}^k}; \quad i, j, n = 1, 2; \quad j \neq i.$$

$$A_{ij}^k = (2r_i^2 + \chi_i)(2r_k^2 + \varepsilon_k) - (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \delta_{ik} - 4v^2 r_k^2 r_i^2 \delta_{jk};$$



$$B_{ij}^k = -2r_j^2 (2r_k^2 + \varepsilon_k) + 2vr_j^2 (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) (\delta_{jk} + \delta_{ik});$$

$$C_{ij}^k = (-1)^k f_i l_i \left[ (2vr_i^2 + v_i \varepsilon_i) (2r_k^2 + \varepsilon_k) - 4vr_i^2 r_j^2 \right] \delta_{ik}; \quad D_{ij}^k = -(-1)^i f_j l_j 2r_j^2 \varepsilon_k (v - v_k) \delta_{ik}.$$

Крайові умови для системи рівнянь (39) отримаємо підстановкою в рівняння (35), (38)  $\zeta = \alpha_k$

$$(2r_i^2 + \chi_i) \sigma_i(\alpha_k) - 2r_j^2 \sigma_j(\alpha_k) = (-1)^j \left[ v \sigma_\zeta(\alpha_k) - v_i \varepsilon_i N_\zeta^{(i)}(\alpha_k) / R_i \right], \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (40)$$

$$(2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \sigma_k(\alpha_k) - 2vr_m^2 \sigma_m(\alpha_k) = (-1)^m \left[ \sigma_\zeta(\alpha_k) - \varepsilon_k N_\zeta^{(k)}(\alpha_k) / R_k \right], \quad k \neq m. \quad (41)$$

Розв'язок рівняння (40) буде

$$\begin{aligned} \sigma_i(\alpha_k) = & \frac{(-1)^i}{\chi_o} \left[ v \chi_j \sigma_\zeta(\alpha_k) - (2r_j^2 + \chi_j) v_i \varepsilon_i \times \right. \\ & \left. \times \frac{N_\zeta^i(\alpha_k)}{R_i} + 2r_j^2 v_j \varepsilon_j \frac{N_\zeta^j(\alpha_k)}{R_j} \right]; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (42)$$

Невідомі контактні напруження знаходимо із системи (39) з урахуванням крайових умов (42):

$$\sigma_i = \sum_n C_{in}^k(\alpha_k) e^{\lambda_n^k(\zeta - \alpha_k)}; \quad i, n = 1, 2.$$

Тут позначено:

$$\begin{aligned} \lambda_n^k = & \left[ b_{11}^k + b_{22}^k + (-1)^n \sqrt{(b_{11}^k - b_{22}^k)^2 + 4b_{12}^k b_{21}^k} \right] / 2; \quad C_{in}^k(\alpha_k) = (-1)^n \left( -\frac{b_{11}^k - \lambda_n^k}{b_{12}^k} \right)^{\delta_{2i}} \times \\ & \times \delta_{1k} \frac{\sigma_1(\alpha_k)(b_{11}^k - \lambda_s^k) + \sigma_2(\alpha_k) b_{12}^k}{\lambda_2^k - \lambda_1^k} + (-1)^s \left( \frac{b_{22}^k - \lambda_n^k}{b_{21}^k} \right)^{\delta_{1i}} \delta_{2k} \frac{\sigma_1(\alpha_k) b_{21}^k + \sigma_2(\alpha_k)(b_{22}^k - \lambda_s^k)}{\lambda_2^k - \lambda_1^k}; \\ & i, s, n = 1, 2; \quad s \neq n. \end{aligned}$$

Для визначення невідомої координати  $\alpha_k$  підставимо співвідношення (42) у невикористану крайову умову (41), отримаємо

$$\sum_{s=1}^3 d_{ks} \sigma^{(s)}(\alpha_k) = 0, \quad (43)$$

де

$$\begin{aligned} d_{k1} = & \varepsilon_k \left[ 2r_k^2 \chi_m (1 - v_k v) + (2r_m^2 + \chi_m) (\chi_k - v_k^2 \varepsilon_k) \right]; \quad d_{k2} = (v_k \varepsilon_k - v \chi_k) 2r_m^2 v_m \varepsilon_m; \\ & d_{k3} = (1 - v^2) \chi_o + (v_k \varepsilon_k - v \chi_k) v \chi_m; \quad k \neq m. \end{aligned}$$

Тепер використаємо умову неперервності осьових напружень у точці  $\alpha_k$ . З урахуванням виразів (17) підставимо формулу (33) у співвідношення (43). Маємо трансцендентне рівняння відносно невідомої  $\alpha_k$

$$\sum_{s=1}^3 \sum_{n=1}^3 d_{ks} g_{sn} e^{\lambda_n^k \alpha_k} = 0, \quad (44)$$

яке розв'язується лише числово.

Осьові напруження в області проковзування-зчеплення будуть

$$\sigma^{(s)} = \sum_{n=1}^3 h_{sn}(\alpha_k) e^{\lambda_n^k(\zeta - \alpha_k)}, \quad s = \overline{1,3}, \quad (45)$$

де  $\lambda_3^k = 0$ . Тут позначено:

$$h_{sn}(\alpha_k) = \left\{ \begin{array}{l} (-1)^s \left\{ \frac{\delta_{sk}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) C_{kn}^k(\alpha_k) - \right. \\ \left. - \left[ 2vr_m^2 \frac{\delta_{sk}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \left( \frac{\delta_{sk} 2r_m^2}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{sm} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (-1)^k \frac{f_m l_m}{\lambda_n^k} \right] C_{mn}^k(\alpha_k) \right\}, \quad n = 1, 2; \\ \frac{N_\zeta^{(s)}(\alpha_k)}{R_s} + \sum_j (-1)^s (-1)^k \left( \frac{2r_m^2 \delta_{sk}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{sm} \right) \times \\ \times \frac{f_m l_m}{\lambda_j^k} C_{mj}^k(\alpha_k), \quad n = 3; \quad j = 1, 2; \quad s = 1, 2. \end{array} \right\},$$

$$h_{3n}(\alpha_k) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^m}{2r_k^2 + \varepsilon_k} \left[ 2r_k^2 (2vr_k^2 + v_k \varepsilon) C_{kn}^k(\alpha) + 2r_m^2 \times \right. \\ \left. \times (-2vr_k^2 + \varepsilon_k f_m l_m (-1)^k / \lambda_n^k) \right], \quad n = 1, 2; \\ \sigma_\zeta(\alpha_k) + \frac{\varepsilon_k}{2r_k^2 + \varepsilon_k} 2r_m^2 f_m l_m \sum_j C_{mj}^k(\alpha_k) / \lambda_j^k, \\ n = 3; \quad j = 1, 2; \quad k \neq m. \end{array} \right\}.$$

Радіальні переміщення і осьові деформації оболонок подаються виразами

$$\frac{w_i}{R_i} = \frac{R_i}{E_i h_i} \left\{ -v_i \frac{N_\zeta^{(i)}(\alpha_k)}{R_i} + (-1)^i \sum_{n=1}^3 \left[ \left[ \left[ 1 - \frac{v_i \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \right] \times C_{in}^k(\alpha_k) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + v_i \left[ \frac{2vr_m^2 \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \left( \frac{2r_m^2}{2r_k^2 + \varepsilon_k} \delta_{ik} + \delta_{im} \right) (-1)^k \frac{f_m l_m}{\lambda_n^k} \right] \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times C_{mn}^k(\alpha_k) \right\} e^{\lambda_n^k(\zeta - \alpha_k)} - \left( \frac{2r_m^2 \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{im} \right) \times (-1)^k \frac{v_i f_m l_m C_{mn}^k(\alpha_k)}{\lambda_n^k} \right] \right\}; \quad (46)$$

$$\varepsilon_\zeta^{(i)} = \frac{R_i}{E_i h_i} \left\{ \frac{N_\zeta^{(i)}(\alpha_k)}{R_i} - (-1)^i \sum_{n=1}^3 \left[ \left[ \left[ v_i - \frac{\delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \right] \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times C_{in}^k(\alpha_k) + \left[ \frac{2vr_m^2 \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \left( \frac{2r_m^2}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{im} \right) (-1)^k \frac{f_m l_m}{\lambda_n^k} \right] \times C_{mn}^k(\alpha_k) \right] \right\} \times \right. \\ \left. \times e^{\lambda_n^k(\zeta - \alpha_k)} - \left( \frac{2r_m^2 \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{im} \right) (-1)^k \frac{f_m l_m C_{mn}^k(\alpha_k)}{\lambda_n^k} \right] \right\}; \quad i = 1, 2; \quad k \neq m. \quad (47)$$

Осьова деформація заповнювача має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\zeta} = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{\zeta}(\alpha_k) + \sum_{n=1}^3 \left[ \left\{ 2\nu \sum_i (-1)^i r_i^2 C_{in}^k(\alpha_k) + \frac{(-1)^k 2r_k^2}{2r_k^2 + \varepsilon_k} (2\nu r_k^2 + \nu_k \varepsilon_k) C_{kn}^k(\alpha_k) + \left[ (-1)^k \frac{4r_k^2 r_m^2 \nu}{2r_k^2 + \varepsilon_k} - \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{(-1)^k 2r_k^2}{2r_k^2 + \varepsilon_k} (2\nu r_k^2 + \nu_k \varepsilon_k) C_{kn}^k(\alpha_k) + \left[ (-1)^k \frac{4r_k^2 r_m^2 \nu}{2r_k^2 + \varepsilon_k} - \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{2r_m^2 \varepsilon_k}{2r_k^2 + \varepsilon_k} f_m l_m / \lambda_n^k \right] C_{mn}^k(\alpha_k) \right\} e^{\lambda_n^k (\zeta - \lambda_k)} + \frac{2r_m^2 \varepsilon_k}{2r_k^2 + \varepsilon_k} f_m l_m C_{mn}^k(\alpha_k) / \lambda_n^k / \lambda_n^k \right\}; \quad k \neq m. \quad (48) \end{aligned}$$

**Область зчеплення на обидвох поверхнях контакту**  $\zeta \in (\alpha_m, 1]$ . Співвідношення (19), (20) для осьових напружень і зусиль у цій області мають вигляд:

$$\sigma_{\zeta} = \sigma_{\zeta}(\alpha_m) - \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_{\alpha_m}^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta; \quad N_{\zeta}^{(i)} = N_{\zeta}^{(i)}(\alpha_m) - (-1)^i a \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau d\zeta; \quad i = 1, 2. \quad (49)$$

Співвідношення (13) з урахуванням виразів (49) будуть

$$\begin{aligned} (2r_i^2 + \chi_i) \sigma_i - 2r_j^2 \sigma_j + l_i (2\nu r_i^2 + \nu_i \varepsilon_i) \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta - 2\nu l_j r_j^2 \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_j d\zeta = \\ = (-1)^j \left[ \nu \sigma_{\zeta}(\alpha_m) - \nu_i \varepsilon_i N_{\zeta}^{(i)}(\alpha_m) / R_i \right]; \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (50) \end{aligned}$$

Умови сумісності осьових деформацій будуть

$$\varepsilon_{\zeta} = \varepsilon_{\zeta}^{(i)}; \quad i = 1, 2, \quad \zeta \in (\alpha_m, 1]. \quad (51)$$

Осьові деформації в розглядуваній області одержимо, підставляючи співвідношення для осьових напружень і зусиль (49) у вихідні формули (7), (10)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\zeta} = -\frac{1}{E} \left[ \frac{2\nu (\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} - \sigma_{\zeta}(\alpha_m) + \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_{\alpha_m}^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta \right]; \\ \varepsilon_{\zeta}^{(i)} = \frac{R_i}{E_i h_i} \left( \frac{N_{\zeta}^{(i)}(\alpha_m)}{R_i} - (-1)^i \left( \nu_i \sigma_i + \frac{a}{R_i} \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta \right) \right); \quad i = 1, 2. \quad (52) \end{aligned}$$

Підставляючи отримані вирази (52) в умови (51), маємо

$$\begin{aligned} (2\nu r_i^2 + \nu_i \varepsilon_i) \sigma_i - 2\nu r_j^2 \sigma_j + l_i^2 (2r_i^2 + \varepsilon_i) \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta - 2l_j r_j^2 \times \\ \times \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_j d\zeta = (-1)^j \left[ \sigma_{\zeta}(\alpha_m) - \varepsilon_i N_{\zeta}^{(k)}(\alpha_m) / R_i \right], \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (53) \end{aligned}$$

Отже, отримана система чотирьох ключових рівнянь (50), (53). Права частина отриманої системи рівнянь не залежить від  $\zeta$ , тобто, це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно

чотирьох невідомих констант  $\sigma_i$ ,  $l_i \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta$ ,  $i = 1, 2$ . Зазначимо, що співвідношення вигляду

$l_i \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta = \text{const}$  призводять до особливостей типу  $\delta$ -функції у виразах для  $\tau_i$ , а тому і до

розриву осьових напружень  $\sigma_\zeta$  і зусиль  $N_\zeta^{(i)}$ , які у цьому конкретному випадку зобов'язані бути неперервними. Тому необхідно прийняти  $l_i \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta = 0$ , звідки випливає  $\tau_i(\zeta) = 0$ ;  $i = 1, 2$ ;  $\zeta \in [\alpha_m, 1]$ , і система рівнянь (50), (53) набуває вигляду

$$(2r_i^2 + \chi_i)\sigma_i - 2r_j^2\sigma_j = (-1)^j \times \left[ v\sigma_\zeta(\alpha_m) - v_i\varepsilon_i N_\zeta^{(i)}(\alpha_m)/R_i \right]; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \quad (54)$$

$$(2vr_i^2 + v_i\varepsilon_i)\sigma_i - 2vr_j^2\sigma_j = (-1)^j \times \left[ \sigma_\zeta(\alpha_m) - \varepsilon_i N_\zeta^{(k)}(\alpha_m)/R_i \right]; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (55)$$

Знайдемо із рівняння (54) контактні напруження

$$\sigma_i = \frac{(-1)^i}{\chi_0} \left[ v\chi_j\sigma_\zeta(\alpha_m) - (2r_j^2 + \chi_j)v_i\varepsilon_i \frac{N_\zeta^{(i)}(\alpha_m)}{R_i} + 2r_j^2v_j\varepsilon_j \frac{N_\zeta^{(j)}(\alpha_m)}{R_j} \right]; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j \quad (56)$$

і підставимо їх у рівняння (55), отримаємо

$$\sum_{s=1}^3 d_{is}\sigma^{(s)}(\alpha_m) = 0; \quad i = 1, 2. \quad (57)$$

Маємо дві умови, з яких одна ( $i = k$ ) виконується автоматично, оскільки вона відповідає рівнянню (43), котре вже використане в аналізі області проковзування-зчеплення при виводі трансцендентного рівняння (44) для визначення невідомої  $\alpha_k$ . Отже, для визначення невідомої  $\alpha_m$  маємо одне з двох рівнянь (57) для  $i = m$

$$\sum_{s=1}^3 d_{ms}\sigma^{(s)}(\alpha_m) = 0. \quad (58)$$

Використовуючи умови (18) у точці  $\alpha_m$ , із виразів (45) отримуємо

$$\sigma^{(s)}(\alpha_m) = \sum_{n=1}^3 h_{sn}(\alpha_k) e^{\lambda_n^k(\alpha_m - \alpha_k)}, \quad s = \overline{1, 3}. \quad (59)$$

Підставляючи вирази (59) в рівняння (58), маємо

$$\sum_{s=1}^3 \sum_{n=1}^3 d_{ms} h_{sn}(\alpha_k) e^{\lambda_n^k(\alpha_m - \alpha_k)} = 0, \quad k \neq m.$$

Звідси за умови, що координата  $\alpha_k$  уже відома (знайдена числово з трансцендентного рівняння (44)), можна вирахувати величину  $\alpha_m$ , причому, якщо варіант у зоні проковзування-зчеплення вже вибрано, тобто, індекси  $k, m$  мають конкретні значення, то координата початку зони зчеплення  $\alpha_m$  знаходиться аналітично.

Контактні нормальні напруження при відомій  $\alpha_m$  можна отримати підстановкою осьових напружень (59) у формули (56). Маючи контактні напруження, із вихідних формул легко визначити всі характеристики напружено-деформованого стану системи в області  $\zeta \in [\alpha_m, 1]$ . З іншого боку, враховуючи сталість усіх напружень і деформацій в області зчеплення і беручи до уваги умову неперервності осьових напружень для цілої області контакту  $\zeta \in [0, 1]$ , усі компоненти напружено-деформованого стану можна отримати з формул (46)-(48), записаних для області проковзування-зчеплення, якщо покласти в них  $\zeta = \alpha_m$ . Враховуючи об'ємність цих формул, тут відтворювати їх не будемо.

## ВИСНОВКИ. ФОРМУЛЮВАННЯ КРИТЕРІЮ ВИБОРУ ВАРІАНТА ГРАНИЧНИХ УМОВ НА КОНТАКТУЮЧИХ ПОВЕРХНЯХ

Отже, у поданій статті отримано розв'язок мішаної контактної задачі про фрикційну взаємодію коаксіальних безмоментних оболонок з деформівним заповнювачем. Визначено контактні напруження, з використанням яких отримано основні характеристики напружено-деформованого стану системи – вирази (29)-(32), (45)-(48). Тепер, маючи ці результати, можна перейти до формулювання критерію вибору варіанта граничних умов на контактуючих поверхнях в області проковзування-зчеплення.

Як видно з отриманих результатів, контактні напруження  $\sigma_i$ , а, значить, і колові мембранні зусилля  $N_{\beta}^{(i)}$ , неперервні вздовж усієї області контакту. Враховуючи умови (17), (18) неперервності осьових напружень, неперервність контактних напружень і мембранних зусиль, із формул (7), (10) можна зробити висновок про неперервність осьових деформацій при  $\zeta \in [0, 1]$ . Конкретно для точки  $\alpha_k$  маємо

$$\varepsilon_{\zeta}(\alpha_k - 0) = \varepsilon_{\zeta}(\alpha_k + 0); \quad \varepsilon_{\zeta}^{(i)}(\alpha_k - 0) = \varepsilon_{\zeta}^{(i)}(\alpha_k + 0).$$

Отже, координату точки розділу зон проковзування ( $\zeta \in [0, \alpha_k)$ ) і проковзування-зчеплення ( $\zeta \in [\alpha_k, \alpha_m]$ ) можна знайти з розв'язку задачі для області проковзування – формули (30), (31). Для цього достатньо прирівняти осьові деформації заповнювача (31) до осьових деформацій кожної оболонки окремо. Отримаємо два трансцендентних рівняння відносно  $\alpha_k$ ,  $k=1, 2$ , кожне з яких у силу монотонності осьових деформацій оболонок і заповнювача має єдиний, причому додатний, корінь. Ці рівняння будуть

$$\sum_n \left\{ \left[ (2\nu r_1^2 + \nu_1 \varepsilon_1) K_{1n} - 2\nu r_2^2 K_{2n} \right] e^{\lambda_n \alpha_1} + \left[ (2r_1^2 + \varepsilon_1) f_1 l_1 K_{1n} + 2f_2 l_2 r_2^2 K_{2n} \right] \frac{e^{\lambda_n \alpha_1} - 1}{\lambda_n} \right\} = -1;$$

$$\sum_n \left\{ \left[ 2\nu r_1^2 K_{1n} - (2\nu r_2^2 + \nu_2 \varepsilon_2) K_{2n} \right] e^{\lambda_n \alpha_2} + \left[ 2f_1 l_1 r_1^2 K_{1n} + (2r_2^2 + \varepsilon_2) f_2 l_2 K_{2n} \right] \frac{e^{\lambda_n \alpha_2} - 1}{\lambda_n} \right\} = -1.$$

У результаті розв'язування цих рівнянь отримуємо дві величини –  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ , причому більша з них нас не цікавить, оскільки знайдена з некоректної умови. Дійсно, якщо на одній із оболонок уже досягнута точка  $\alpha_k$ , тобто виконано умови ідеального контакту, то координату  $\alpha_m$  точки початку області зчеплення на другій оболонці потрібно шукати з розв'язку задачі для області проковзування-зчеплення. Беручи до уваги умови неперервності осьових деформацій

$$\varepsilon_{\zeta}(\alpha_k - 0) = \varepsilon_{\zeta}(\alpha_k + 0); \quad \varepsilon_{\zeta}^{(i)}(\alpha_m - 0) = \varepsilon_{\zeta}^{(i)}(\alpha_m + 0),$$

підставляючи у формули (47), (48)  $\zeta = \alpha_m$  і вже знайдене  $\alpha_k$  та прирівнюючи отримані співвідношення, будемо мати трансцендентне рівняння на невідому координату  $\alpha_m$ . Розв'язок цього рівняння при відомому номері варіанта знаходиться аналітично.

Тепер, нарешті, сформулюємо шуканий критерій. Номер варіанта (або значення індексу  $k$ ) відповідає значенню індексу меншого з коренів записаних трансцендентних рівнянь.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Шопа В. М., Величкович А. С., Величкович С. В., Шацький І. П., Попадюк І. Й. Оболонкові пружини. Івано-Франківськ: Факел, 2002. 92 с.
2. Awrejcewicz J., Olejnik P. Analysis of dynamic systems with various friction laws. *Appl. Mech. Rev. Trans. ASME*. 2005. Vol. 58. P. 389–411.

3. Никитин Л. В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. Москва: Московский Лицей, 1998. 272 с.
4. Величкович А. С., Попадюк И. И., Шопя В. М. Экспериментальные исследования оболочечного упругого элемента для буровых средств виброзащиты. *Химическое и нефтегазовое машиностроение*. 2010. № 9. С. 16–20. **English translation:** *Chemical and Petroleum Engineering*. New York: Springer 2011. Vol. 46, No. 9-10. P. 518–524.
5. Шопя В. М., Попадюк І. Й., Бедзір О. О. Змішані задачі фрикційного контакту коаксіальних циліндричних оболонок і деформівного заповнювача. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 1998. 41, № 3. С. 103–108.
6. Попадюк І. Й., Шацький І. П., Шопя В. М., Величкович А. С. Фрикційна взаємодія циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем при немонотонному навантаженні. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2014. 57, № 2. С. 187–194. **English translation:** *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 215, No. 2, May, 2016.

#### REFERENCES

1. Shopa, V. M., Velychkovych, A. S., Velychkovych, S. V., Shats'kyi, I. P. & Popadyuk, I. I. (2002). Shell Springs. Ivano-Frankivs'k: Fakel.
2. Awrejcewicz, J. & Olejnik, P. (2005). Analysis of dynamic systems with various friction laws. *Appl. Mech. Rev. Trans. ASME*, Vol. 58, pp. 389–411.
3. Nikitin, L. V. (1998). Statics and Dynamics of Solid Bodies with External Dry Friction. Moscow: Moskovskii Litsei.
4. Velichkovich, A. S., Popadyuk, I. I. & Shopa, V. M. (2010). Experimental study of the shell flexible component for drilling vibration damping devices. *Khim. Neftegaz. Mashinostr.*, No. 9, pp. 16–20. **English translation:** (2011). *Chem. Petrol. Eng.*, 46, No. 9–10, pp. 518–524.
5. Shopa, V. M., Popadyuk, I. Yo. & Bedzir, O. O. (1998). Mixed problems of frictional interaction of a coaxial cylindrical shells and deformative filler. *Math meth. ta phys.-mech. polya*, **41**, No. 3, pp. 103–108.
6. Popadyuk, I. Yo., Shats'kyi, I. P., Shopa, V. M. & Velichkovich, A. S. (2014). Frictional interaction of a cylindrical shell with deformative filler under non-monotonic loading. *Math meth. ta phys.-mech. polya*, **57**, No. 2, pp. 187–194. **English translation:** (2016). *J. of Math. Sci.*, Vol. 215, No. 2.

УДК 536.2

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ДВУХСЛОЙНЫХ СРЕДАХ

<sup>1</sup>Пышнограев Ю. Н., к. ф.-м. н., <sup>2</sup>Штанько А. И., <sup>3</sup>Пышнограев Е. Ю.

<sup>1,2</sup>*Запорожская государственная инженерная академия,  
просп. Соборный, 226, Запорожье, 69006, Украина*

<sup>3</sup>*ООО «Яндекс»,  
ул. Льва Толстого, 16, Москва, 119021, Россия*

pyshnograevyuri@gmail.com, anna.shtanko177@gmail.com, efim@fastmail.com

Рассмотрена математическая модель, описывающая конвективную теплопроводность двухслойной среды. Методом конечных интегральных преобразований проведено поэтапное решение задачи. Получен набор собственных значений и соответствующих им ортогональных собственных функций. Исходная задача приведена к обыкновенному дифференциальному уравнению. Решение задачи получено в виде функционального ряда.

*Ключевые слова:* теплопроводность, конвекция, двухслойная среда, интегральное преобразование, собственная функция.