

УДК 519.688:519.6:514.752

## АЛГОРИТМ ПОИСКА ОСОБЫХ ТОЧЕК ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Аль-Атамнех Б. Г. М., аспирант

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

bega\_88@mail.ru

Предложен алгоритм построения сеточной модели геометрической области, описанной неявно с помощью функционального представления. Описаны реализованные подходы к оптимизации полученной сеточной модели по двум критериям: соотношению длин (площадей) соседних граничных сегментов и величине угла между ними. Приведены примеры построения сеточных моделей для нескольких плоских геометрических областей.

*Ключевые слова: математическая модель, геометрическая область, R-функция, FREP, сеточная модель, параллельные вычисления.*

## АЛГОРИТМ ПОШУКУ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК ГЕОМЕТРИЧНОЇ ОБЛАСТІ, ЗАДАНОЇ НЕЯВНОЮ ФУНКЦІЄЮ

Аль-Атамнех Б. Г. М., аспірант

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

bega\_88@mail.ru

Запропоновано алгоритм побудови сіткової моделі геометричної області, описаної неявно за допомогою функціонального подання. Описано реалізовані підходи до оптимізації отриманої сіткової моделі за двома критеріями: співвідношенням довжин (площ) сусідніх граничних сегментів і величиною кута між ними. Наведені приклади побудови сіткових моделей для кількох плоских геометричних областей.

*Ключові слова: математична модель, геометрична область, R-функція, FREP, сіткова модель, паралельні обчислення.*

## ALGORITHM OF SEARCHING FOR SPECIAL POINTS OF THE GEOMETRIC REGION, AS SET BY THE IMPLICIT FUNCTION

Al-Atamneh B. G. M., postgraduate

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

bega\_88@mail.ru

Numerical analysis of various classes of boundary value problems requires the generation of grid (discrete) models of geometric regions of complex shape. For example, the use of the finite element method is based on assuming the existence of a finite element model of the investigated region. The problem of constructing grid models can be divided into two independent tasks: 1) formalization of the description of the initial geometric domain (construction of its model in a form suitable for subsequent computer processing); and 2) construction of a grid model from the previously obtained formal description of the initial geometric domain. Classical approaches to solving the first problem are the use of framework, surface and solid geometric modeling. The main disadvantage of these approaches is the complexity of describing the geometric domain of non-standard form. In the event that there is no element in the library of geometric primitives, then the construction of a complex geometric model becomes problematic. One possible effective way to solve this problem is to describe geometric regions by means of functional relationships in the form of a certain real function that takes negative values outside the region. This approach to the description of geometric models is called Function Representation (FREP) and is a generalization of the theory of R-functions of V. Rvachev. Practical application of FREP involves a number of significant difficulties, as it is necessary to solve the following tasks: 1) automate the search for nodes on the boundary of the implicitly defined FREP-model

of the original geometric domain; 2) reconstruction of the boundary of the grid model of the original region from the existing set of support nodes on its boundary; 3) visualization of the FREP-model. Therefore, the solution of the above problems is currently an actual problem. In this paper, an algorithm for constructing the boundary of an implicitly defined geometric domain described in the form of a FREP-model is described. The implemented approaches to optimizing the resulting grid model are described by two criteria: the ratio of the lengths (areas) of neighboring boundary segments and the magnitude of the angle between them. Examples of the construction of grid models for several planar geometric regions are given.

*Key words: mathematical model, geometric domain, R-function, FREP, grid model, parallel computations.*

## ВВЕДЕНИЕ

Численный анализ различных классов краевых задач требует создания сеточных (дискретных) моделей геометрических областей сложной формы. Проблему построения сеточной модели можно разделить на две самостоятельные задачи: 1) формализация описания исходной геометрической области (построение ее формальной модели) и 2) построение сеточной модели по ранее полученному формальному описанию исходной геометрической области. Классическими подходами к решению первой задачи является использование каркасного, поверхностного и твердотельного геометрического моделирования [1]. Главным недостатком этих подходов является сложность описания геометрической области нестандартной формы.

Одним из возможных эффективных способов решения этой проблемы является описание геометрических областей с помощью соотношений вида  $F(x, y, z) \geq 0$ , где  $F(x, y, z)$  – вещественная функция, неявно аналитически описывающая поверхность и внутреннюю часть исходной геометрической области с помощью набора элементарных математических функций и логических операций над ними. Такой подход к описанию геометрических моделей называется Function Representation (FREP) [2] и является обобщением теории R-функций академика В. Л. Рвачева [3].

Практическое применение FREP сопряжено с рядом существенных трудностей, т. к. необходимо решение следующих задач:

- 1) автоматизация поиска узлов на границе неявно заданной FREP-модели исходной геометрической области;
- 2) реконструкция границы сеточной модели исходной области по имеющемуся набору опорных узлов на ее границе;
- 3) визуализации FREP-модели.

Поэтому решение вышеперечисленных задач является в настоящее время актуальной проблемой. В данной работе описан алгоритм построения границы неявно заданной геометрической области, описанной в виде FREP-модели.

## АЛГОРИТМ ПОИСКА ОПОРНЫХ ТОЧЕК

Пусть имеется некоторая геометрическая область  $\Omega$ , граница которой  $\partial\Omega$  – геометрическое место точек, удовлетворяющих условию:

$$\partial\Omega = \{(x, y, z): F(x, y, z) = 0\}, \quad (1)$$

где  $F(x, y, z) = 0$  – FREP-модель  $\partial\Omega$ .

Одним из возможных способов построения множества опорных точек (узлов, принадлежащих  $\partial\Omega$ ) на границе FREP-модели, неявно описывающей  $\Omega$ , является так называемое шаговое сканирование (рис. 1) с использованием заданной фоновой (опорной) сетки, координаты узлов которой определяются, например, следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}x_i &= x_{min} + ih_x, \\y_i &= y_{min} + ih_y, \\z_i &= z_{min} + ih_z,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $(x_{min}, y_{min}, z_{min}), (x_{max}, y_{max}, z_{max})$  – координаты начала и конца фоновой сетки;  $h_x = \frac{x_{max}-x_{min}}{n}, h_y = \frac{y_{max}-y_{min}}{n}, h_z = \frac{z_{max}-z_{min}}{n}$  – размер ячейки сетки;  $n$  – количество шагов (размер ячейки сетки);  $i = \overline{0, n-1}$ .

Рассмотрим работу алгоритма шагового сканирования на примере плоской геометрической области, изображенной на рис. 1. Ее FREP-модель может быть описана следующим соотношением:

$$F(x, y) = (r_1^2 - (x - a_1)^2 - (y - b_1)^2) \wedge \neg(r_2^2 - (x - a_2)^2 - (y - b_2)^2),\tag{3}$$

где  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), r_1, r_2$  – координаты центров и радиусы двух окружностей (соответственно).

На первом этапе алгоритма строится фоновая сетка и выполняется поиск множества опорных узлов на границе исходной области  $\Omega$ , которые определяются, как пересечение линий фоновой сетки с  $\partial\Omega$  (рис. 1). Поиск узлов осуществляется из того соображения, что значение R-функции отрицательное за пределами области и положительное – внутри. Таким образом, поиск опорного узла начинается тогда, когда значение R-функции имеет разные знаки на концах образующей текущей ячейки фоновой сетки. Поиск нулевого значения R-функции можно выполнять разными способами, например, с использованием метода дихотомии.

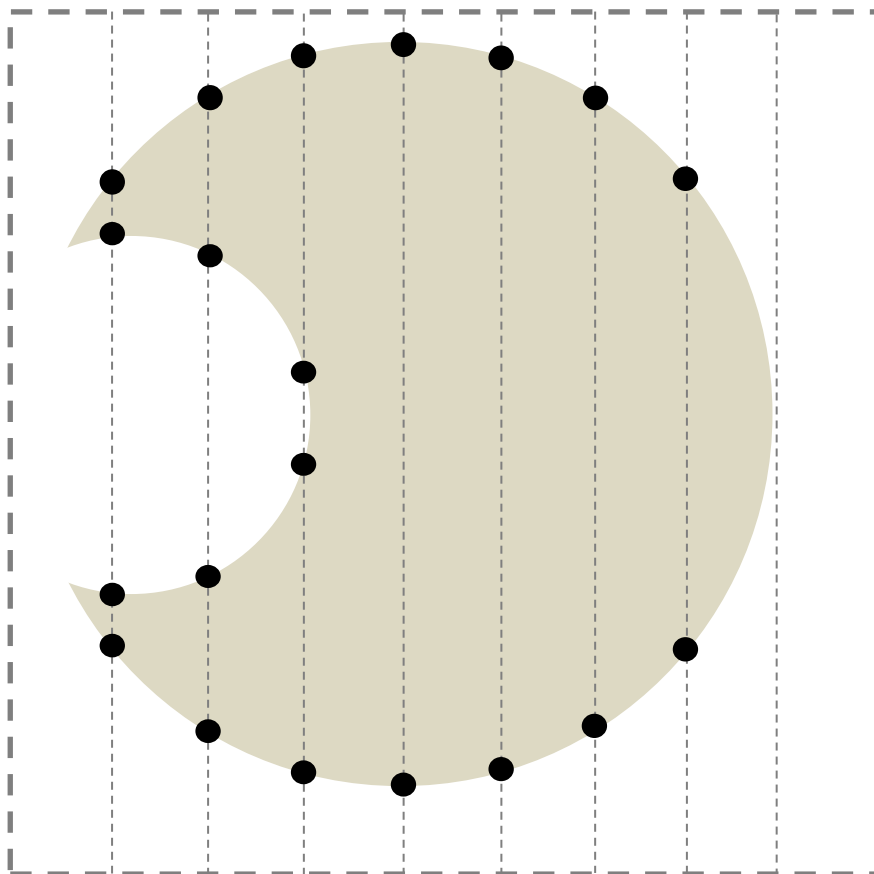


Рис. 1. Поиск опорных узлов на границе области с помощью шагового сканирования

На втором этапе алгоритма для полученного опорного множества узлов, лежащих на границе исходной области, реконструируется поверхность полученной дискретной модели. В общем виде данная задача является достаточно нетривиальной. Поэтому для ее решения

предлагается подход, заключающийся в построении некоторой сеточной модели (например, триангуляции) для заданного набора опорных узлов, а затем выделении границы области, базируясь на том соображении, что граничные сегменты принадлежат только одной ячейке сетки. Другими словами, если сторона некоторой ячейки является общей для двух соседних ячеек, то она не является граничной.

После реконструкции поверхности модели осуществляется ее оптимизация. Очевидно, что при большом шаге фоновой сетки (или при наличии сравнительно мелких особенностей на границе  $\partial\Omega$ ) возможна существенная потеря точности аппроксимации исходной области  $\Omega$  (рис. 2).

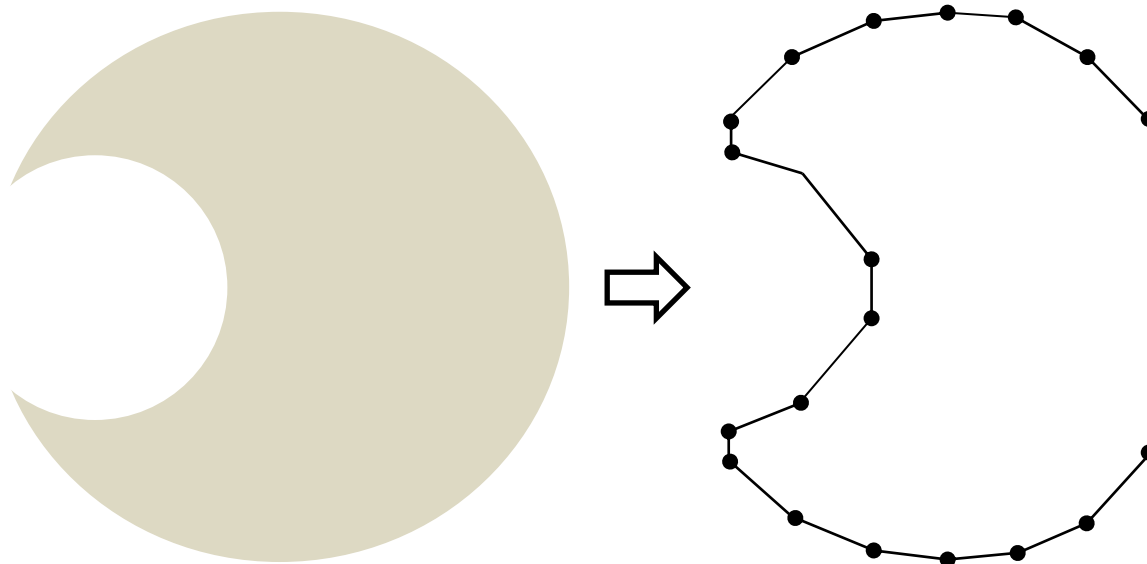


Рис. 2. Потеря точности при большом шаге фоновой сетки

Одним из наиболее простых с точки зрения реализации и очевидных способов повышения качества первоначального разбиения области является уменьшение шага регулярной сетки. Ясно, что такой подход, с одной стороны, не дает гарантии учета всех особенностей  $\partial\Omega$ , а с другой – приводит к значительному росту вычислительных затрат. Для преодоления данной проблемы предлагается использовать алгоритм, базирующийся на идее поиска и обработке соседних граничных сегментов, геометрические характеристики которых, такие, как углы между ними или их длины (площади), значительно отличаются друг от друга. Для этого необходимо определить участки границы  $\partial\Omega$ , где соотношение углов между векторами нормали к соседним сегментам или их длин (площадей) больше некоторого наперед заданного параметра. После чего выполнить процедуру вставки нового опорного узла следующим образом: отыскать точку пересечения вектора нормали к текущему граничному сегменту и  $\partial\Omega$  (рис. 3). При необходимости данную процедуру можно итерационно повторять до получения приемлемой точности оптимизации аппроксимации  $\partial\Omega$ .

Пример работы алгоритма оптимизации аппроксимации  $\partial\Omega$  только лишь за счет сгущения фоновой сетки приведен на рис. 4. Здесь приведены результаты построения геометрической модели области  $\Omega$ , изображенной на рис. 1 при разных значениях шага фоновой сетки (150, 250, 350 и 450 шагов соответственно). График изменения времени работы алгоритма приведен на рис. 5. Здесь по оси абсцисс отложено количество шагов опорной сетки, а по оси ординат – время работы алгоритма в секундах.

На рис. 6 приведен пример работы вышеописанного алгоритма оптимизации аппроксимации границы без сгущения опорной сетки по критерию соотношения длин соседних граничных сегментов. Время работы данного алгоритма составило 8,1 с. Хорошо видно, что уже при количестве шагов фоновой сетки 250 получается вполне адекватная модель исходной геометрической области. Следует отметить, что такой вид оптимизации не зафиксировал

особые точки исходной геометрической области (точки пересечения образующих исходную область окружностей).

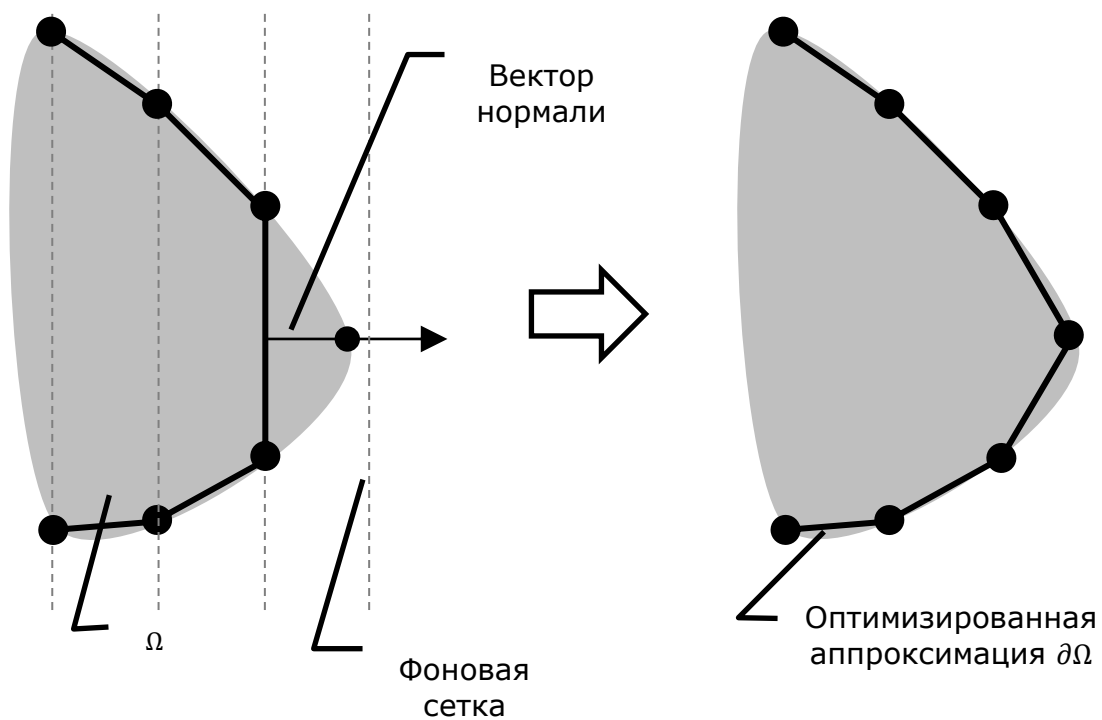


Рис. 3. Схема вставки нового опорного узла («дробление» граничного сегмента)

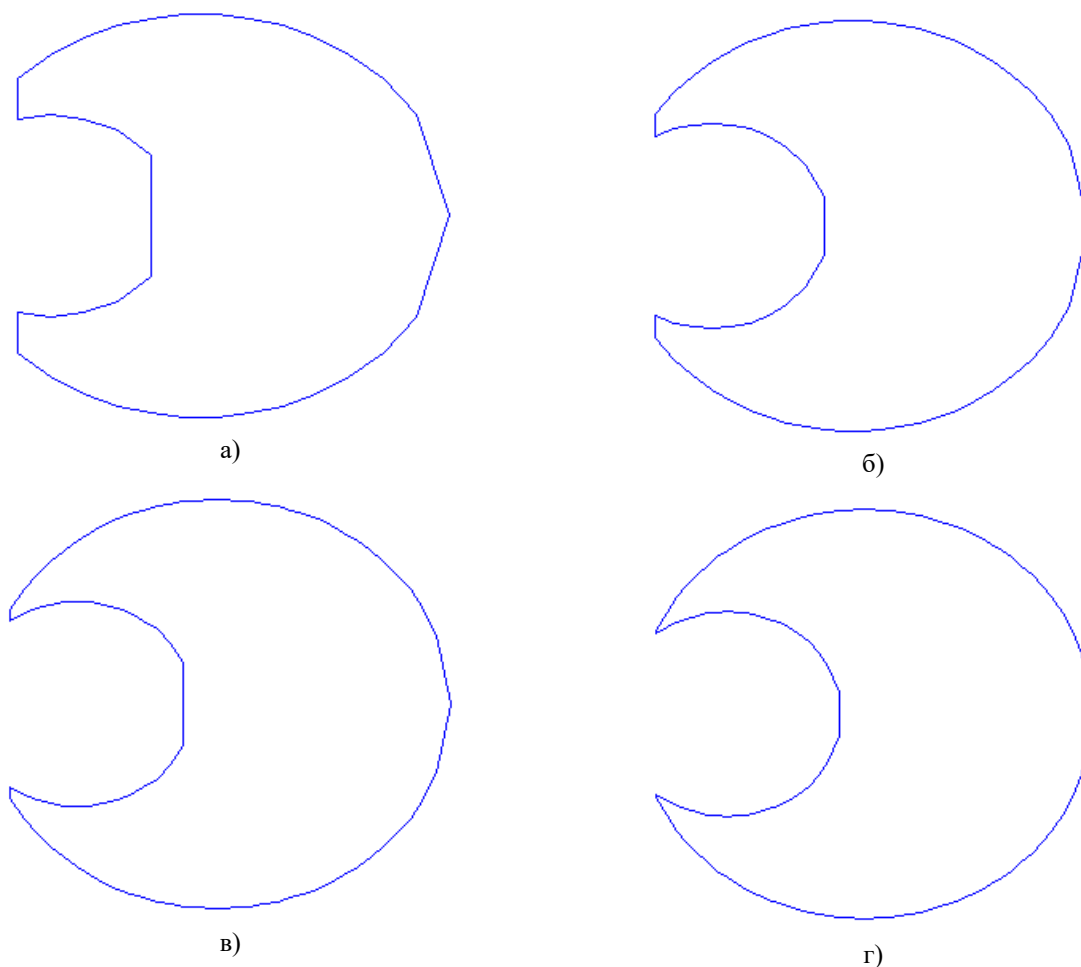


Рис. 4. Результат работы алгоритма построения аппроксимации границы исходной области при разном количестве шагов фоновой сетки: а) 150; б) 250; в) 350 г) 450.

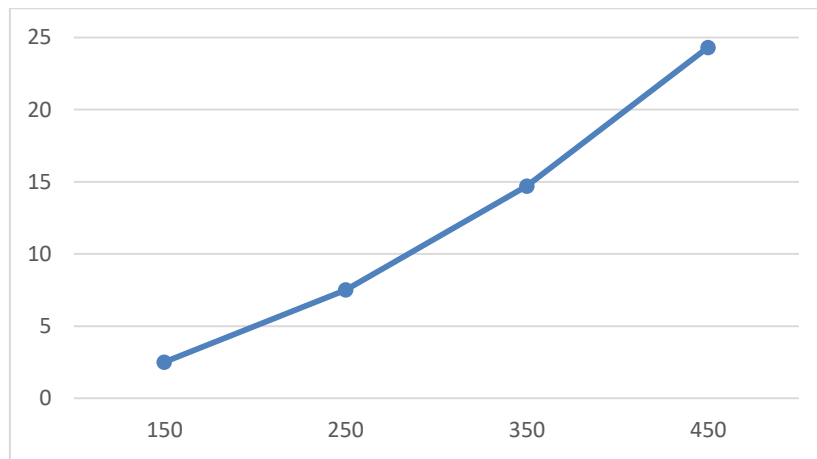


Рис. 5. Время работы алгоритма уточнения границы области за счет сгущения фоновой сетки (при разном количестве шагов)

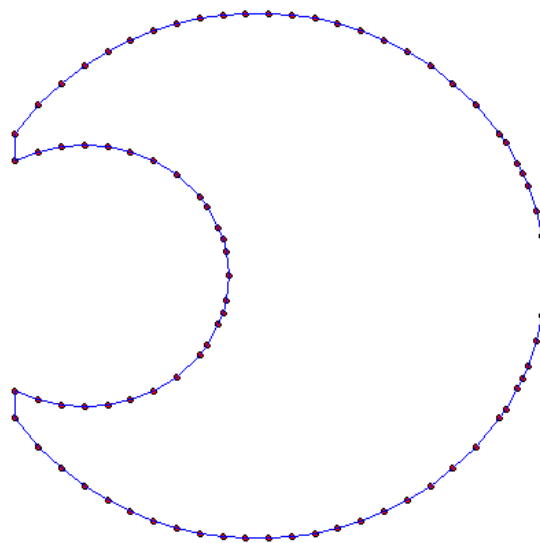


Рис. 6. Аппроксимация границы исходной области при использовании оптимизации по критерию соотношения длин соседних граничных сегментов

На рис. 7 приведено изображение геометрической модели исходной области, полученной с помощью оптимизации аппроксимации границы по критерию соотношения углов между соседними граничными сегментами при том же шаге фоновой сетки. Время работы алгоритма составило 8,0 с. Хорошо видно, что данный вариант алгоритма позволил отыскать особые точки исходной области.

И, наконец, на рис. 8 приведено изображение геометрической модели, полученное с помощью комбинации двух ранее описанных алгоритмов оптимизации (по критерию соотношения длин и углов) при том же количестве шагов фоновой сетки – 250. Время работы этого алгоритма составило 8,7 с. Здесь хорошо видно, что данный вариант алгоритма позволил не только отыскать особые точки исходной области, но и существенно повысить качество аппроксимации  $\partial\Omega$ .

Для интегральной оценки качества первоначальной аппроксимации границы области  $\partial\Omega$  на множество опорных узлов можно воспользоваться величиной среднего квадратичного отклонения углов между нормальными к соседним граничным сегментам и/или отношения между длинами (площадями) соседних граничных сегментов.

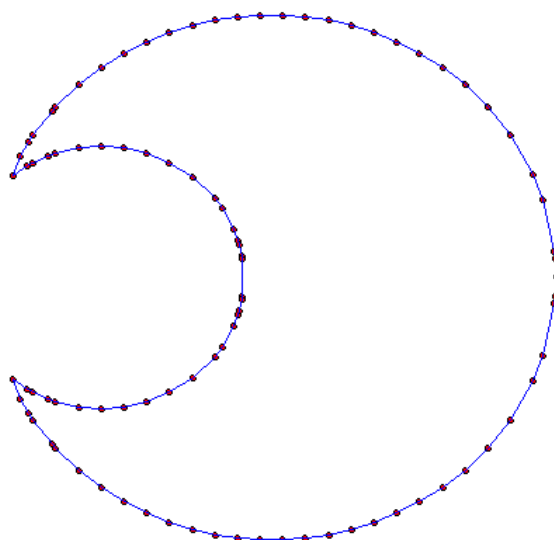


Рис. 7. Аппроксимация границы исходной области при использовании оптимизации по критерию соотношения углов нормалей к соседним граничным сегментам

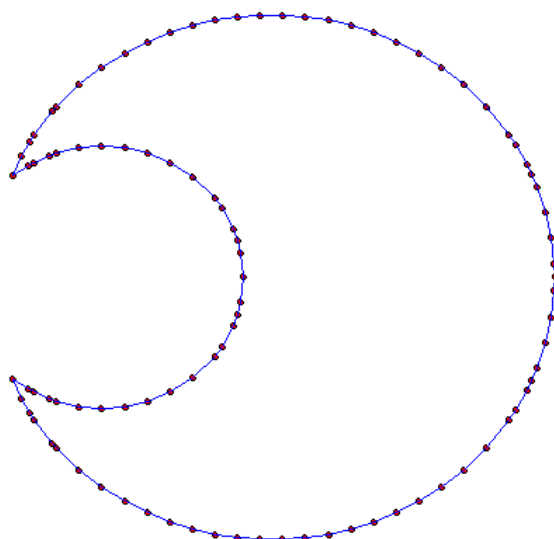


Рис. 8. Аппроксимация границы исходной области с использованием оптимизации по обоим вышеописанным критериям

Оценить качество сетки с помощью среднеквадратичного отклонения углов между соседними нормальными можно с помощью следующего соотношения:

$$\sigma_{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{\gamma}_i - \gamma_p)^2}, \quad (4)$$

где  $n$  – количество граничных сегментов;  $\bar{\gamma}_i$  – среднее значение углов между нормальными к  $i$ -му граничному сегменту и его окружению;  $\gamma_p$  – параметр алгоритма, определяющий максимально допустимое значение угла между соседними нормальными.

Аналогичным образом можно оценить среднее квадратичное отклонение длин (площадей) граничных сегментов. Таким образом, использование соотношения (4) позволяет выполнить оценку качества аппроксимации границы исходной геометрической области и при необходимости запустить процедуру оптимизации аппроксимации  $\partial\Omega$ .

Для верификации предложенного алгоритма на более сложных геометрических областях была построена модель прямоугольной полосы с тремя круговыми отверстиями. FREP-модель этой области описывается следующим соотношением:

$$F(x, y) = \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \neg\Omega_3 \wedge \neg\Omega_4 \wedge \neg\Omega_5, \quad (5)$$

где  $\Omega_1 = a^2 - x^2$  – горизонтальная полоса шириной  $2a$ ;  $\Omega_2 = b^2 - y^2$  – вертикальная полоса шириной  $2b$ ;  $\Omega_3 = r^2 - (x - x_3)^2 - (y - y_3)^2$  – окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $(x_3, y_3)$ ;  $\Omega_4 = r^2 - (x - x_4)^2 - (y - y_4)^2$  – окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $(x_4, y_4)$ ;  $\Omega_5 = r^2 - (x - x_5)^2 - (y - y_5)^2$  – окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $(x_5, y_5)$ ;  $a = 5$ ;  $b = 1$ ;  $r = 0.5$ ;  $x_3 = -5$ ;  $x_4 = 0$ ;  $x_5 = 5$ ;  $y_3 = y_4 = y_5 = 0$ .

На рис. 9 приведено изображение полученной геометрической модели области, описанной с помощью соотношения (5).

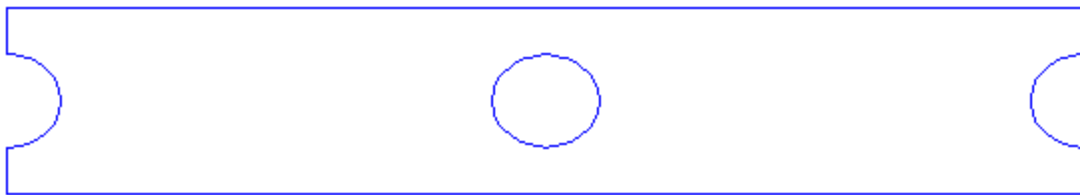


Рис. 9. Пример построения модели геометрической области, описанной соотношением (5)

## ВЫВОДЫ

Описанные алгоритмы были реализованы с помощью языка программирования Python 3. Вычислительные эксперименты выполнялись на компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i7-3630QM CPU @ 2.40 GHz и 16 Гб ОЗУ. Можно отметить, что предложенный подход построения дискретных моделей геометрических областей, описанных неявно с использованием FREP, является эффективным и позволяет строить модели с необходимой пользователю точностью. Предложенные алгоритмы могут быть использованы для построения как плоских, так и трехмерных геометрических моделей.

Следует также отметить, что эти алгоритмы поддерживают параллельную реализацию. Для этого необходимо на первом этапе построить список подлежащих «дроблению» граничных сегментов, после чего процедуру их оптимизации можно запустить параллельно на разных ядрах или процессорах параллельной вычислительной системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Норенков И. П. Основы автоматизированного проектирования: учеб. для вузов: 4-е изд., перераб. и доп. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. 430 с.
2. Shape Modeling and Computer Graphics with Real Functions. URL: <http://hyperfun.org/wiki/doku.php?id=frep:main>.
3. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 106 с.

## REFERENCES

1. Norenkov, I. P. (2009). Basics of computer-aided design: a textbook for high schools: 4th edition, revised and supplemented. Moskow: Izd-vo MGTU im. N. E. Bauman.
2. Shape Modeling and Computer Graphics with Real Functions. Retrieved from <http://hyperfun.org/wiki/doku.php?id=frep:main>.
3. Rvachev, V. L. (1982). Theory of R-functions and some of its applications. Kiev: Naukova dumka.