УДК 539.374

ТЕОРИЯ ГИПЕРУПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ МИКРОДЕФОРМАЦИИ

Шнейдер В. П., к. ф.-м. н.

ООО «Завод Мастер-Профи»,
г. Днепр, 49010, Украина

shneider_vova@mail.ru

Пластическое течение, вызванное скольжением дислокаций, тесно связано с механизмом тепловой активации в широком диапазоне скоростей деформации. С другой стороны, пластическая деформация с высокой скоростью может приводить к явному повышению температуры. Поэтому, влияния скорости деформации и температуры должны учитываться одновременно при изучении поведения материалов. Такой подход в рамках теории микродеформации был реализован в работе [7] при построении гипоупруго-вязкопластической теории. В настоящей работе предлагается вариант гиперупруго-вязкопластической теории, позволяющей устранить некоторые недостатки гипоупругого подхода.

Ключевые слова: гипоупругость, теория микродеформации, вязкопластичность, конечная деформация.

ТЕОРІЯ ГІПЕРПРУЖНО-В’ЯЗКОПЛАСТИЧНОСТІ, ЯКА ВРАХОВУЄ МІКРОДЕФОРМАЦІЇ

Шнейдер В. П., к. ф.-м. н.
ТОВ «Завод Майстер-Профі»,
м. Дніпро, 49010, Україна

shneider_vova@mail.ru

Пластична течія, викликана ковзанням дислокацій, тісно пов'язана з механізмом теплової активації в широкому діапазоні швидкостей деформації. З іншого боку, пластична деформація з високою швидкістю може призводити до явного підвищення температури. Тому, впливи швидкості деформації і температури повинні враховуватися одночасно при вивченні поведінки матеріалів. Спроба реалізації такого підходу була зроблена у праці [7] при побудові гіпопружно-в’язкопластичної теорії. У цій роботі пропонується варіант гіперпружно-в’язкопластичної теорії, що дозволяє усунути деякі недоліки гіпопружного підходу.

Ключові слова: гіпопружність, теорія мікродеформації, в’язкопластичність, кінцева деформація.

THE THEORY OF HYPERELASTIC-VISCOPLASTICITY, WHICH TAKES INTO ACCOUNT THE MICRODEFORMATION

Shneider V. P., PhD
“Zavod Master-Profi”, LLC,
Dnipro, Ukraine
shneider_vova@mail.ru

Introduction. The plastic flow caused by the slip of dislocations is closely related to the mechanism of thermal activation over a wide range of strain rates. On the other hand, plastic deformation at high speed can lead to an obvious increase in temperature. Therefore, the effects of strain rate and temperature should be taken into account simultaneously when studying the behavior of materials.

A number of theories have been proposed to describe the plastic deformation of materials over a wide range of strain rates and temperatures over the past three decades. These theories are conditionally divided into two main groups; Physical and phenomenological. A small number of material constants and simple calibration characterizes phenomenological models, but they have a limited scope of applicability. Physical theories usually contain a larger number of material constants, and thus their use is more complex than using phenomenological theories, but their scope is much broader.

The main point, of the construction of the defining relations of the theory of large viscoplastic deformations, is the separation of total deformations and their velocities into elastic and plastic components. The solution of this question is related to the configuration in which the theory is formulated. Two main approaches are usually used. In the first one, the defining relations in the current configuration (hypoelasticity) are stated, and in the second relationship the relationships are formed with respect to the intermediate unloaded configuration (hyperelasticity).

In work [7] the theory of hypoelastic-viscoplasticity, taking into account microdeformation was formulated. The disadvantages of this approach are known. These include: the work of stresses on a closed cycle by deformation is not exactly zero; The requirement of isotropy of elastic relations; Isotropy of the yield function; The need to integrate the hypoelastic relationships over time to determine the stresses.

In the present paper, these shortcomings are eliminated by introducing a hyperelastic-viscoplastic formulation, in which the elastic behavior is given by a hyperelastic potential. This allows to eliminate some disadvantages of the hypoelastic approach.

Conclusions.To eliminate imperfections of the previously proposed theory of hypoelastic-viscoplasticity, a variant of the hyperelastic-viscoplastic theory, taking into account microdeformation, is developed, in which the elastic behavior is given by the hyperelastic potential. An algorithm for numerical investigation of viscoplastic flow for a given deformation gradient trajectory is proposed. Preliminary calculations showed the effectiveness of the proposed version of the theory.

Key words: Hypoelasticity, theory of microdeformation, viscoplasticity, finite deformation.

ВВЕДЕНИЕ

Пластическое течение, вызванное скольжением дислокаций, тесно связано с механизмом тепловой активации в широком диапазоне скоростей деформации. С другой стороны, пластическая деформация с высокой скоростью может приводить к явному повышению температуры. Поэтому, влияния скорости деформации и температуры должны учитываться одновременно при изучении поведения материалов.

За последние три десятилетия предложен целый ряд теорий для описания пластической деформации материалов в широком диапазоне скоростей деформации и температур. Эти теории условно разделяют на две основные группы: физические [1-3] и феноменологические [4, 5]. Феноменологические модели характеризуются незначительным количеством материальных констант и простой калибровкой, однако имеют ограниченную область применимости. Физические теории обычно содержат большее число материальных констант, и таким образом их использование оказывается более сложным, чем при использовании феноменологических теорий, но их область применимости намного шире.

В работах [6, 7] была развита теория ползучести, учитывающая микронапряжения и микродеформации, как при малых, так и при конечных деформациях. Такая теория позволила установить связь между феноменологическим и физическим подходом и получила экспериментальное подтверждение при сравнительно небольшом числе констант материала.

Ключевым моментом построения определяющих соотношений теории больших вязкопластических деформаций является разделение полных деформаций и их скоростей на упругую и пластическую составляющие. Решение этого вопроса связано с тем, в какой конфигурации формулируется теория. Обычно применяются два основных подхода. В первом записываются определяющие соотношения в текущей конфигурации (гипоупругость), а во втором соотношения формируются по отношению промежуточной разгруженной конфигурации (гиперупругость). В работе [7] была сформулирована теория гипоупруго-вязкопластичности, учитывающая микродеформации. В работе [8] были отмечены недостатки гипоупруго-(вязко)пластического подхода, а именно: работа напряжений на замкнутом цикле по деформации не равна точно нулю; требование изотропности упругих соотношений; изотропность функции текучести; необходимость интегрирования гипоупругих соотношений по времени для определения напряжений.

Для устранения этих недостатков были развиты феноменологические гиперупруго-(вязко) пластические модели [8, 9-11], в которых упругое поведение задается гиперупругим потенциалом. В настоящей работе идеи, изложенные в работе [7], обобщаются на случай гиперупруго-вязкопластической формулировки, позволяющей описывать вязкопластическое течение в широком диапазоне скоростей деформации и температур.

РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Кинематика. Ключевым моментом построения определяющих соотношений теории больших вязкопластических деформаций является разделение полных деформаций и их скоростей на упругую и пластическую составляющие. Существенным отличием между рассматриваемой здесь моделью и представленной в работе [7] состоит в том, что вместо аддитивного разложения градиента скорости на упругую и пластическую часть используется схема протекания пластической деформации, предложенная Тейлором еще в работе [12], в соответствии с которой пластическая деформация развивается благодаря движению дислокаций через кристаллическую решетку, тогда как сама решетка подвергается только упругой деформации и поворотам. Эта идея в работе [14] нашла свое отражение в представлении градиента полной деформации $\mathbf{F}$, в форме

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p , \tag{10}$$

где $\mathbf{F}_p, \mathbf{F}_p$ – части полного градиента деформации $\mathbf{F}$, обусловленные упругой деформацией решетки и пластической деформацией, соответственно. Соотношение (10) подразумевает наличие трех конфигураций: исходной K_0, текущей K_t и промежуточной разгруженной K_p. Градиент пластической деформации $\mathbf{F}^p$ отображает точку $\mathbf{X}_0$ в исходной конфигурации K_0 в точку $\mathbf{X}_p$ в промежуточной разгруженной конфигурации K_p, а затем с помощью градиента упругой деформации $\mathbf{F}^e$ в точку $\mathbf{x}$ текущей конфигурации K_t.

На основании (10) определяется градиент скорости деформации в текущей конфигурации

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} &= \left(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}\right)_s + \left(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}\right)_a = \\ &= \mathbf{D} + \mathbf{W} = \dot{\mathbf{F}}_e \cdot \mathbf{F}_e^{-1} + \mathbf{F}_e \cdot \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\mathbf{D}$ и $\mathbf{W}$ – тензоры скорости деформации и вращения материала в текущей конфигурации K_t, соответственно. Нижние индексы s и a обозначают симметричную и антисимметричную часть тензора, соответственно.

В настоящей работе разрешающие уравнения первоначально записываются в промежуточной (разгруженной) конфигурации K_p, в которой по определению все деформации и вращения являются чисто пластическими и определяются градиентом $\mathbf{F}_p$. В таком случае, градиент скорости пластической деформации в K_p примет вид

$$\mathrm{L}_p \equiv \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} = \left(\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}\right)_s + \left(\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}\right)_a = \mathrm{D}_p + \left(\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}\right)_a , \tag{12}$$

где $\mathrm{D}_p = \left(\dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1}\right)_s$ – скорость пластической деформации в K_p, $\left(\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}\right)_a$ – вращение материала в K_p.

Основные гипотезы теории. Оставаясь в рамках основных гипотез теории пластичности и ползучести, учитывающей микродеформации [6], примем, что представительный объем материала состоит из некоторой совокупности $\alpha \in N$ взаимосвязанных микрочастиц (зерен), напряженно-деформированное состояние которых однородно и определяется микронапряжениями и микродеформациями. Обозначим через v_α относительный объем зерна в исходном состоянии как отношение объема зерна к представительному объему. Однородную в пределах зерна скорость вязкопластической деформации будем характеризовать интенсивностью $\dot{p}_\alpha$ в направлении $\mathrm{N}_\alpha \in \Omega$, где Ω – область направлений активного микропластического деформирования ($\dot{p}_\alpha > 0$) в разгруженной конфигурации K_p. Материал принимается первоначально изотропным, следовательно, все возможные направления микропластического деформирования должны быть распределены равномерно в исходной конфигурации.

Предполагая в дальнейшем использовать гиперупругие соотношения с тензором упругой деформации Грина $\mathbf{E}_e$, представляется удобным определить напряжение в K_p как симметричный второй тензор напряжения Пиола-Кирхгоффа $\mathbf{\Pi}$, который является сопряженным к $\dot{\mathbf{E}}_e$. Имеем

$$\mathbf{\Pi} = \left|\mathbf{F}_e\right| \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}_e^{-T}. \tag{13}$$

Вместо определяющего уравнения в скоростях для напряжения, как принято в теории гипоупруго-(вязко)пластичности, воспользуемся общим гиперупругим определяющим уравнением для напряжения. Пусть запасенная энергия упругой деформации Ψ зависит от упругой деформации Грина $\mathbf{E}^e$ и гомологической температуры θ, тогда гиперупругие соотношения представятся в следующем виде

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial \Psi\left(\mathbf{C}_e, \theta\right)}{\partial \mathbf{C}_e}. \tag{14}$$

В таком случае требование инвариантности при вращении твердого тела в конфигурации K_p сводится к выполнению условия изотропности Ψ и $\partial \Psi / \partial \mathbf{C}_e$.

Ограничимся здесь рассмотрением нео-гуковского материала, который при малых упругих деформациях принимает форму обычного закона

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{G}_e : \mathbf{E}_e, \tag{15}$$

где

$$\mathbf{G}_e = 2G_0 g\left(\theta\right)\left[\frac{1}{2}\mathbf{I} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}\right], \tag{16}$$

а G_0 и ν – модуль сдвига при $T = 0^\circ \mathrm{K}$ и коэффициент Пуассона, соответственно, $\mathbf{I}, \mathbf{i}$ – единичные тензоры четвертого и второго ранга, $g\left(\theta\right)$ – функция, характеризующая зависимость упругого модуля сдвига от гомологической температуры θ ($\theta = T/T_m$, где T – температура в Кельвинах, T_m – температура плавления). Зависимость упругого модуля сдвига от температуры зададим в виде [19]:

$$g\left(\theta\right) = \left\{1 - \theta \exp\left[\theta^* \left(\frac{\theta - 1}{\theta}\right)\right]\right\} \quad \theta > 0, \tag{17}$$

где θ^* – характеристическая гомологическая температура.

Воспользуемся полярным разложением градиента упругой деформации

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{U}_e \cdot \mathbf{R}_e,$$

где $\mathbf{R}_e$ – тензор ротации, $\mathbf{U}_e$ – симметричный положительно определенный тензор второго ранга, называемый правым тензором искажения. В случае малых упругих деформаций порядка ε и больших вращениях, имеем

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{U}_e \cdot \mathbf{R}_e = \left(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{U}'\right) \cdot \mathbf{R}_e \cong \mathbf{R}_e. \tag{18}$$

Рассмотрим пластическое течение в таком диапазоне температур и скоростей деформации, в котором диффузионная ползучесть не является доминирующей и деформация происходит в основном за счет движения дислокаций. Обозначим девиатор тензора напряжения, действующий в зерне с номером α в разгруженной конфигурации, через $\mathbf{S}_\alpha$ и представим его виде суммы двух составляющих

$$\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{T}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha , \tag{19}$$

где $\mathbf{T}_\alpha$ – тензор активных (диссипативных) напряжений, $\mathbf{R}_\alpha$ – тензор внутренних (остаточных) напряжений в зерне. Такое представление используется в целом ряде работ, в частности в [1, 2], и оно перекликается с принятыми в теории микродеформации представлениями. Природа $\mathbf{T}_\alpha$ связана с близкодействующими препятствиями, которые включают точечные дефекты, такие, как вакансии, включения, дислокации, пересекающие плоскость скольжения, легирующие элементы и растворенные атомы (межузельные и замещения). Преодолению таких препятствий содействует тепловая активация [1, 2] и в силу этого запишем

$$\mathbf{T}_\alpha = \bar{\mathbf{T}}_\alpha \left(\dot{p}_\alpha, \theta \right), \tag{20}$$

где $\bar{\mathbf{T}}_\alpha$ – функция, определяющая зависимость напряжения течения $\mathbf{T}_\alpha$ от скорости деформации ползучести и температуры. Внутренние (остаточные) напряжения $\mathbf{R}_\alpha$ связаны со структурой материала и не могут быть преодолены за счет тепловой энергии кристалла [1, 2]. Они возникают за счет сил сопротивления дальнодействующих препятствий, вызванных полями напряжений от леса дислокаций и границ зерен [15], т.е. накопленной в зерне пластической деформацией. Влияние температуры на $\mathbf{R}_\alpha$ осуществляется только через зависимость упругого модуля от температуры. В таком случае можем записать

$$\mathbf{R}_\alpha = g(\theta) \bar{\mathbf{R}}_\alpha \left(p_\alpha \right). \tag{21}$$

Таким образом, в теории микродеформации состояние материала в разгруженной конфигурации K_p определено наряду с напряжениями Π, внутренними переменными $\mathbf{R}_\alpha$ и $\mathbf{N}_\alpha$. В текущей конфигурации K_t этим переменным отвечают напряжение Коши $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ и $\mathbf{n}_\alpha$, соответственно.

Для установления связи между этими переменными можно воспользоваться подходом, изложенным в работе [13], и названным упругим встраиванием. Подобный подход может быть применен и для перехода от $\mathbf{n}_\alpha$ к $\mathbf{N}_\alpha$. В теории микродеформации принято, что направление течения зерна $\mathbf{n}_\alpha$ связано непосредственно с зерном и может изменяться при конечной деформации за счет поворота зерна. В силу этого имеем

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \quad \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{F}_e . \tag{22}$$

С другой стороны, упругое встраивание от $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ к $\mathbf{R}_\alpha$ отражает физические свойства $\boldsymbol{\rho}_\alpha$, так как $\mathbf{R}_\alpha$ остается связанным с материалом в K_p как тензор, характеризующий макроскопическое состояние материала даже после того, как $\boldsymbol{\sigma}$, и, следовательно, Π было изменено.

Запишем теперь определяющие уравнения для градиента скорости пластической деформации и эволюции для $\mathbf{R}_\alpha$ в разгруженной конфигурации K_p. Первая задача решается обычным способом и скорость макропластической деформации поликристалла по отношению к промежуточной конфигурации получается осреднением локальной скорости вязкопластической деформации по всему представительному макрообъему

$$\mathbf{L}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{p}_\alpha \mathbf{N}_\alpha v_\alpha = \mathbf{D}_p + \left(\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \right)_a , \tag{23}$$

где $\mathbf{D}_p = \left(\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}\right)_s$ – скорость пластической деформации в промежуточной конфигурации, $\left(\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}\right)_a$ – скорость вращения материала в K_p. Здесь и во всех последующих формулах сумма распространяется только на направления активного микропластического деформирования $\dot{p}_\alpha \geq 0$. Можем также записать

$$\mathbf{D}_p = \left(\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}\right)_s = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{p}_\alpha \mathbf{P}_\alpha v_\alpha, \quad \left(\dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}\right)_a = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{p}_\alpha \mathbf{M}_\alpha v_\alpha, \quad \dot{P} = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{p}_\alpha v_\alpha, \tag{24}$$

где $\mathbf{P}_\alpha$ – симметричный направляющий девиатор, определяющий направление вязкопластического деформирования зерна, $\mathbf{M}_\alpha$ – кососимметричный тензор, определяющий поворот. Имеем

$$\mathbf{P}_\alpha = \left(\mathbf{N}_\alpha + \mathbf{N}_\alpha^T\right)/2, \quad \mathbf{M}_\alpha = \left(\mathbf{N}_\alpha - \mathbf{N}_\alpha^T\right)/2. \tag{25}$$

Для формулировки уравнения эволюции остаточных напряжений $\mathbf{R}_\alpha$ требуется установить, каким образом они связаны с материалом при пластической деформации в промежуточной конфигурации K_p. Самый простой способ решения этой проблемы заключается в том, чтобы записать уравнения, отвечающие за изменение величины и направления $\mathbf{R}_\alpha$, отдельно. Как было предложено в работе [13, 20], воспользуемся базисом направляющих векторов, вращающимся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, тогда для скорости развития $\mathbf{R}_\alpha$ можем записать

$$\mathbf{R}_\alpha^\nabla \equiv \dot{\mathbf{R}}_\alpha - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega} = g(\theta) \bar{\mathbf{R}}_\alpha (\Pi, \mathbf{R}_\alpha). \tag{26}$$

В последней формуле присутствует вращательная составляющая $\mathbf{R}_\alpha^\nabla$, которая включает $\boldsymbol{\omega}$, а функция $\bar{\mathbf{R}}_\alpha(\Pi, \mathbf{R}_\alpha)$ определяет изменение величины $\mathbf{R}_\alpha$. Для выполнения условия инвариантности при жестком вращении тела требуется, чтобы $\boldsymbol{\omega}$ не зависело от вращения, а $\bar{\mathbf{R}}_\alpha(\Pi, \mathbf{R}_\alpha)$ была изотропной тензорной функцией переменных Π и $\mathbf{R}_\alpha$.

На основании (19) получаем локальное динамическое условие текучести в направлении $\mathbf{N}_\alpha$

$$\mathbf{S}_\alpha : \mathbf{N}_\alpha = \bar{\tau}_\alpha (\dot{p}_\alpha, \theta) + g(\theta) \bar{\rho}_\alpha (p_\alpha). \tag{27}$$

где

$$\bar{\tau}_\alpha (\dot{p}_\alpha, \theta) = \mathbf{T}_\alpha : \mathbf{N}_\alpha, \quad \bar{\rho}_\alpha (p_\alpha) = \mathbf{R}_\alpha : \mathbf{N}_\alpha. \tag{28}$$

Равенство в последнем соотношении выполняется только для направлений активного микро-вязко-пластического деформирования.

Для построения функции $\bar{\mathbf{R}}_\alpha$ воспользуемся подходом, принятым в работе [6], и зададим скорость ее изменения в следующем обобщенном виде:

$$\dot{\bar{\rho}}_\alpha (p_\alpha) = R\dot{p}_\alpha - \gamma \dot{p}_\alpha \bar{\rho}_\alpha + R_2 \mathbf{D}_p : \mathbf{N}_\alpha, \tag{29}$$

где

$$R = \begin{cases} R_1 & \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{N}_{\alpha'}, \\ 0 & \mathbf{N}_\alpha \neq \mathbf{N}_{\alpha'}, \\ -R_4 & \mathbf{N}_\alpha = -\mathbf{N}_{\alpha'} \end{cases}$$

и $\mathbf{N}_{\alpha'}$ – направление активного микропластического течения частицы, R_1, R_2, R_4, γ – константы материала.

При формулировке законов вязкопластического течения важное место занимает вопрос выбора функции $\bar{\tau}_\alpha$ термически активированных напряжений течения. В простейшем варианте, можно воспользоваться подходом, предложенным в работе [16], с использованием параметра $Z_\alpha = \dot{p}_\alpha \exp\left(Q_\alpha / kT\right)$, который объединяет влияние температуры и скорости деформации в единую «базовую кривую», где Q_α – энергия активации зерна, и k – постоянная Больцмана. Используя этот подход, можем записать

$$\dot{p}_\alpha = \dot{p}_0 \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right) F\left(\frac{\overline{\tau}_\alpha}{\overline{\tau}_0\left(P,\theta\right)}\right). \tag{30}$$

Уравнение эволюции для $\overline{\tau}_0$ зададим в следующем виде:

$$\dot{\overline{\tau}}_0 = R_3\left(r_0 - \overline{\tau}_0\right)\dot{P}, \tag{31}$$

где R_3, r_0 – константы материала, при начальном условии $\overline{\tau}_0\left(0\right) = \tau_0$.

Сравнительный анализ различных вариантов представления функции F, проведенный в работе [17], показал, что приемлемым является вариант, предложенный в работе [18]

$$F\left(x\right) = \left(\sinh x^{3/2}\right)^m. \tag{32}$$

Для замкнутости разрешающих уравнений теории микродеформации необходимо установить связь локальных законов микро- и макроскопического деформирования. Воспользуемся простейшими соотношениями

$$\mathbf{S}_\alpha = \left\langle \mathbf{S}_\alpha \right\rangle = \mathbf{S}, \tag{33}$$

которые означают, что микронапряжения $\mathbf{S}_\alpha$ во всех зернах одинаковы и равны средним $\left\langle \mathbf{S}_\alpha \right\rangle$, тогда из (27), с учетом (19)-(33), находим

$$\overline{\tau}_\alpha\left(\dot{p}_\alpha,\theta\right) = \mathbf{S}:\mathbf{N}_\alpha - g\left(\theta\right)\rho_\alpha\left(p_\alpha\right), \tag{34}$$

а из формул (24) и (30), получаем

$$\mathbf{L}_p = \dot{p}_0 \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right)\sum_{\alpha=1}^{n} F\left(\frac{\mathbf{S}:\mathbf{N}_\alpha - g\left(\theta\right)\overline{\rho}_\alpha\left(p_\alpha\right)}{\overline{\tau}_0\left(p,\theta\right)}\right)\mathbf{N}_\alpha v_\alpha. \tag{35}$$

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Пусть t обозначает текущее время, Δt – бесконечно малое приращение времени, и $\tau = t + \Delta t$.

Считаем заданными: $\mathbf{F}\left(t\right)$, $\mathbf{F}\left(\tau\right)$, $\mathbf{n}_\alpha\left(t\right)$, $\mathbf{F}_p\left(t\right)$, $\overline{\rho}_\alpha\left(t\right)$, $\overline{\tau}_0\left(t\right)$, $\mathbf{S}\left(t\right)$.

Требуется вычислить: $\mathbf{F}_p\left(\tau\right)$, $\overline{\rho}_\alpha\left(\tau\right)$, $\overline{\tau}_0\left(\tau\right)$, $\mathbf{S}\left(\tau\right)$ и $\mathbf{n}_\alpha\left(\tau\right)$ в момент времени τ

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \quad \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{F}_e.$$

Процедура вычислений имеет вид:

1. Вычисляем упругую деформацию $\mathbf{E}^e\left(\tau\right)^{tr}$:

$$\mathbf{F}^e\left(\tau\right)^{tr} = \mathbf{F}\left(\tau\right):\mathbf{F}^p\left(\tau\right)^{-1},$$

$$\mathbf{C}^e\left(\tau\right) = \left(\mathbf{F}^e\left(\tau\right)\right)^T : \mathbf{F}^e\left(\tau\right),$$

$$\mathbf{E}^e\left(\tau\right)^{tr} = \left(1/2\right)\left\{\mathbf{C}^e\left(\tau\right)^{tr} - \mathbf{1}\right\}.$$

2. Вычисляем напряжения:

$$\mathbf{\Pi}\left(\tau\right)^{tr} = \mathbf{G}_e : \mathbf{E}^e\left(\tau\right)^{tr}.$$

3. Обновляем градиент пластической деформации $\mathbf{F}^p\left(\tau\right)$

$$\Delta \mathbf{L}_p = \dot{p}_0 \Delta t \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right)\sum_{\alpha=1}^{n} F\left(\frac{\mathbf{S}:\mathbf{N}_\alpha - g(\theta)\bar{\rho}_\alpha(p_\alpha)}{\bar{\tau}_0(p,\theta)}\right)\mathbf{N}_\alpha v_\alpha,$$

$$\Delta P = \dot{p}_0 \Delta t \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right)\sum_{\alpha=1}^{n} F\left(\frac{\mathbf{S}:\mathbf{N}_\alpha - g(\theta)\bar{\rho}_\alpha(p_\alpha)}{\bar{\tau}_0(p,\theta)}\right) v_\alpha;$$

$$\mathbf{F}_p(\tau) = (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{L}_p)\cdot \mathbf{F}_p(t).$$

4. Проверяем равенство $\det \mathbf{F}_p(\tau) = 1$. Если оно не выполняется, нормируем $\mathbf{F}_p(\tau)$ как

$$\mathbf{F}_p(\tau) = \left[\det \mathbf{F}_p(\tau)\right]^{-1/3} \mathbf{F}_p(\tau).$$

5. Вычисляем градиент упругой деформации $\mathbf{F}^e(\tau)$

$$\mathbf{F}^e(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\cdot \mathbf{F}_p^{-1}(\tau).$$

6. Обновляем переменные $\bar{\rho}_\alpha(\tau)$, $\bar{\tau}_0(\tau)$

$$\Delta \dot{\bar{\rho}}_\alpha = R\Delta p_\alpha - \gamma \Delta p_\alpha \bar{\rho}_\alpha + R_2 \Delta \mathbf{L}_p : \mathbf{N}_\alpha,$$

$$\Delta \bar{\tau}_0 = R_3 (r_0 - \bar{\tau}_0)\Delta P$$

и осуществляем переход к п. 1.

После завершения итерационного процесса 1-6 вычисляем «текстуру»

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \quad \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{F}_e^{-1}\cdot \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{F}_e.$$

Предварительные расчеты показали эффективность предложенного варианта теории.

ВЫВОДЫ

Для устранения недостатков построенной ранее теории гипоупруго-вязкопластичности развит вариант гиперупруго-вязкопластической теории, учитывающей микродеформации, в котором упругое поведение задается гиперупругим потенциалом.

Предложен алгоритм численного исследования вязкопластического течения при заданной траектории градиента деформации. Предварительные расчеты показали эффективность предложенного варианта теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zerilli F. J., Armstrong R. W. The effect of dislocation drag on the stress–strain behavior of FCC metalsю *Acta Metallurgica et Materialia*. 1992. Vol. 40. P. 1803–1808. doi: 10.1016/0956-7151(92)90166-c.
2. Nemat–Nasser S., Li Y. Flow stress of FCC polycrystals with applications to OFHC Cu. *Acta Materialia*. 1998. Vol. 46(2). P. 565–577. doi: 10.1016/s1359-6454(97)00230-9.
3. Gao C. Y., Zhang L. C. Constitutive modeling of plasticity of FCC metals under extremely high strain rates. *International Journal of Plasticity*. 2012. Vol. 32-33. P. 121–133. doi: 10.1016/j.ijplas.2011.12.001.
4. Klepaczko J. R. A practical stress–strain–strain rate–temperature constitutive relation of the power form. *J. Mech. Work. Technol*. 1987. Vol. 15. P. 143–165.
5. Khan A. S., Liang R. Behavior of three BCC metals during non–proportional multi–axial loadings. *International Journal of Plasticity*. 2000. Vol. 16. P. 1443–1458. doi: 10.1016/s0749-6419(00)00016-4.
6. Kadashevich Yu. I., Chernyakov Yu. A. Theory of plasticity, taking into account microstresses. *Advances in mechanics*. 1992. Vol. 15, No 3-4. P. 3–39.

7. Онищенко И. С., Черняков Ю. А., Шнейдер В. П. Разработка теории микродеформации, чувствительной к скорости деформации и температуре. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2015. Vol. 4/7(76). С. 4–9.
8. Belytchko T. W., Liu K., Moran B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. 2006.
9. Miehe C. Aspects of the formulation and finite element implementation large strain isotropic elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994. Vol. 37. P. 1981–2004.
10. Moran B., Ortiz V., Shih C. F. Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1990. Vol. 29. P. 483–514.
11. Simo J. C., Ortiz M. A unified approach to finite deformation plasticity based on the use of hyperelastic constitutive equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1985. Vol. 49. P. 221.
12. Taylor G. I. Plastic strain in metals. *J. Inst. Metals*. 1938. Vol. 62. P. 307–325.
13. Dafalias Y. F. The plastic spin in viscoplasticity. *Int. J. Solids Structures*. 1990. Vol. 26. P. 149–163. doi: 10.1016/0020-7683(90)90048-z.
14. Lee E. H. Elastic–plastic deformations at finite strains. *J. Appl. Mech. ASME*. 1969. Vol. 36. P. 1–6.
15. Kocks U. F., Mecking H. Physics and phenomenology of strain hardening: the FCC case. *Prog Mater Sci*. 2003. Vol. 48. P. 171–273.
16. Zener C., Hollomon J. H. Effect of strain rate upon plastic flow of steel. *J. Appl. Phys*. 1944. Vol.15. P. 22–32.
17. Onischenko I. S., Chernykov Yu. A., Shneider V. P. Numerical integration of the equations of the theory of creep, which taken into account the microstrains. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць*. 2014. Вип. 22. С. 281–290.
18. Miller A. K., Krauss A. S., Krauss K. Improvements in the MATMOD equations for modeling solute effects and yield–surface distorsion. *Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation. Academic Press Inc*. 1996. P. 153–227.
19. Rusinek A., Rodríguez–Martínez J. A., Klepaczko J. R., Pecherski R. B. Analysis of thermo–visco–plastic behavior of six high strength steels. *J Mater Des*. 2009. Vol. 30. P. 1748.–1761. doi: 10.1016/j.matdes.2008.07.034.
20. Mandel J. Plasticité classique et viscoplasticité. CISM Courses and Lectures No. 97. Udine, Berlin: Springer, 1971.

REFERENCES

1. Zerilli, F. J. & Armstrong, R. W. (1992). The effect of dislocation drag on the stress-strain behavior of F.C.C. metals. Acta Metallurgica et Materialia, Vol. 40, pp. 1803-1808. doi: 10.1016/0956-7151(92)90166-c.
2. Nemat-Nasser, S. & Li, Y. (1998). Flow stress of f.c.c. polycrystals with application to OFHC Cu. Acta Materialia, Vol. 46(2), pp. 565–577. doi: 10.1016/s1359-6454(97)00230-9.
3. Gao, C. Y. & Zhang, L. C. (2012). Constitutive modelling of plasticity of fcc metals under extremely high strain rates. International Journal of Plasticity, Vol. 32-33, pp. 121-133. doi: 10.1016/j.ijplas.2011.12.001.
4. Klepaczko, J. R. (1987). A practical stress–strain–strain rate–temperature constitutive relation of the power form. J. Mech. Work. Technol, Vol. 15, pp. 143-165.
5. Khan, A. S. & Liang, R. (2000). Behaviors of three BCC metals during non-proportional multi-axial loadings: experiments and modeling. International Journal of Plasticity, Vol. 16, pp. 1443-1458. doi: 10.1016/s0749-6419(00)00016-4.
6. Kadashevich, Yu. I. & Chernyakov, Yu. A. (1992). Theory of plasticity, taking into account microstresses. Advances in mechanics, Vol. 15, pp. 3-39.
7. Onishchenko, I. S., Chernyakov, YU. A. & Shneider, V. P. (2015). Development of the theory of microdeformation, sensitive to the rate of deformation and temperature. Vostochno-Yevropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy, Vol. 4/7(76), pp. 4-9.
8. Belytchko, T., Liu, K. & Moran, B. (2006). Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures.
9. Miehe, C. (1994). Aspects of the formulation and finite element implementation large strain isotropic elasticity International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, pp. 1981-2004.

10. Moran, B., Ortiz, V. & Shih, C. F. (1990). Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, pp. 483-514.
11. Simo, J. C. & Ortiz, M. (1985). A unified approach to finite deformation plasticity based on the use of hyperelastic constitutive equation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 49, p. 221.
12. Taylor, G. I. (1938). Plastic strain in metals. J. Inst. Metals, Vol. 62, pp. 307-325.
13. Dafalias, Y. F. (1990). The plastic spin in viscoplasticity. International Journal of Solids and Structures, Vol. 26(2), pp. 149-163. doi: 10.1016/0020-7683(90)90048-z.
14. Lee, E. H. (1969). Elastic–plastic deformations at finite strains. J. Appl. Mech. ASME, Vol. 36, pp. 1-6.
15. Kocks, U. F. & Mecking, H. (2003). Physics and phenomenology of strain hardening: the FCC case. Prog Mater Sci, Vol. 48, pp. 171-273.
16. Zener, C. & Hollomon, J. H. (1944). Effect of strain rate upon plastic flow of steel. J. Appl. Phys, Vol. 15, pp. 22-32.
17. Onischenko, I. S., Chernykov, Yu. A. & Shneider, V. P. (2014). Numerical integration of the equations of the theory of creep, which taken into account the microstrains. Problems of Computational Mechanics and strength of structures, technologies, Iss. 22, pp. 281-290.
18. Miller, A. K., Krauss, A. S., Krauss, K. (1996). Improvements in the MATMOD equations for modeling solute effects and yield–surface distorsion. Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation. Academic Press Inc., pp. 153-227.
19. Rusinek, A., Rodríguez-Martínez, J. A., Klepaczko, J. R. & Pęcherski, R. B. (2009). Analysis of thermo-visco-plastic behaviour of six high strength steels. Materials & Design, Vol. 30, pp. 1748-1761. doi: 10.1016/j.matdes.2008.07.034.
20. Mandel, J. (1971). Plasticité classique et viscoplasticité. CISM Courses and Lectures No. 97. Udine, Berlin: Springer.

УДК 533.6

УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ КОНИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧЕК КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Янчевский И. В., д. ф.-м. н., профессор, Бабаев А. А., к. ф.-м. н., доцент

Национальный технический университет Украины «КПИ имени Игоря Сикорского», просп. Победы, 37, г. Киев, 03056, Украина

babaevaa@ukr.net

В данной статье с привлечением обобщенных на случай электромеханики гипотез Кирхгофа-Лява записаны уравнения осесимметричных колебаний биморфных цилиндрической и конической оболочек конечной длины, составленных из упругого и радиально поляризованного электроупругого слоев. Приведены граничные условия механической и электрической групп, которые соответствуют случаю шарнирного закрепления торцов оболочки, при работе электроупругого слоя в режиме прямого или обратного пьезоэффекта. Целью настоящей работы является развитие аналитических методов исследования колебаний тонкостенных оболочек, в которых проявляется связанность механических и электрических полевых величин. В данной публикации, в частности, представлены уравнения движения конической и цилиндрической оболочек конечной длины, составленных из тонких упругого и электроупругого слоев.

Ключевые слова: биморфная электроупругая оболочка, гипотезы Кирхгофа-Лява, нестационарные осесимметричные колебания, уравнения движения.