10. Moran, B., Ortiz, V. & Shih, C. F. (1990). Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, pp. 483-514.
11. Simo, J. C. & Ortiz, M. (1985). A unified approach to finite deformation plasticity based on the use of hyperelastic constitutive equation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 49, p. 221.
12. Taylor, G. I. (1938). Plastic strain in metals. J. Inst. Metals, Vol. 62, pp. 307-325.
13. Dafalias, Y. F. (1990). The plastic spin in viscoplasticity. International Journal of Solids and Structures, Vol. 26(2), pp. 149-163. doi: 10.1016/0020-7683(90)90048-z.
14. Lee, E. H. (1969). Elastic–plastic deformations at finite strains. J. Appl. Mech. ASME, Vol. 36, pp. 1-6.
15. Kocks, U. F. & Mecking, H. (2003). Physics and phenomenology of strain hardening: the FCC case. Prog Mater Sci, Vol. 48, pp. 171-273.
16. Zener, C. & Hollomon, J. H. (1944). Effect of strain rate upon plastic flow of steel. J. Appl. Phys, Vol. 15, pp. 22-32.
17. Onischenko, I. S., Chernykov, Yu. A. & Shneider, V. P. (2014). Numerical integration of the equations of the theory of creep, which taken into account the microstrains. Problems of Computational Mechanics and strength of structures, technologies, Iss. 22, pp. 281-290.
18. Miller, A. K., Krauss, A. S., Krauss, K. (1996). Improvements in the MATMOD equations for modeling solute effects and yield–surface distorsion. Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation. Academic Press Inc., pp. 153-227.
19. Rusinek, A., Rodríguez-Martínez, J. A., Klepaczko, J. R. & Pęcherski, R. B. (2009). Analysis of thermo-visco-plastic behaviour of six high strength steels. Materials & Design, Vol. 30, pp. 1748-1761. doi: 10.1016/j.matdes.2008.07.034.
20. Mandel, J. (1971). Plasticité classique et viscoplasticité. CISM Courses and Lectures No. 97. Udine, Berlin: Springer.

УДК 533.6

УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ КОНИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧЕК КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Янчевский И. В., д. ф.-м. н., профессор, Бабаев А. А., к. ф.-м. н., доцент

Национальный технический университет Украины «КПИ имени Игоря Сикорского», просп. Победы, 37, г. Киев, 03056, Украина

babaevaa@ukr.net

В данной статье с привлечением обобщенных на случай электромеханики гипотез Кирхгофа-Лява записаны уравнения осесимметричных колебаний биморфных цилиндрической и конической оболочек конечной длины, составленных из упругого и радиально поляризованного электроупругого слоев. Приведены граничные условия механической и электрической групп, которые соответствуют случаю шарнирного закрепления торцов оболочки, при работе электроупругого слоя в режиме прямого или обратного пьезоэффекта. Целью настоящей работы является развитие аналитических методов исследования колебаний тонкостенных оболочек, в которых проявляется связанность механических и электрических полевых величин. В данной публикации, в частности, представлены уравнения движения конической и цилиндрической оболочек конечной длины, составленных из тонких упругого и электроупругого слоев.

Ключевые слова: биморфная электроупругая оболочка, гипотезы Кирхгофа-Лява, нестационарные осесимметричные колебания, уравнения движения.

РІВНЯННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕКТРОПРУЖНИХ КОНІЧНОЇ ТА ЦІЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНОК КІНЦЕВОЇ ДОВЖИНИ

Янчевський І. В., д. ф.-м. н, професор, Бабаєв О. А., к. ф.-м. н., доцент

Національний технічний університет України «КПІ імені Ігоря Сікорського», просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056, Україна

babaevaa@ukr.net

У статті із залученням узагальнених на випадок електромеханіки гіпотез Кірхгофа-Лява наведені рівняння осесиметричних коливань біморфних циліндричної і конічної оболонок кінцевої довжини, що містять пружний і радіально поляризований електропружні шари. Наведено граничні умови механічної та електричної груп, які відповідають випадку шарнірного закріплення торців оболонки, при роботі електропружного шару в режимі прямого або зворотного п'єзоефекту. Метою цієї роботи є розвиток аналітичних методів дослідження коливань тонкостінних оболонок, у яких проявляється зв'язаність механічних і електричних польових величин. У нашій публікації представлені рівняння руху конічної і циліндричної оболонок кінцевої довжини, складених з тонких пружного і електропружнього шарів.

Ключові слова: біморфна електропружна оболонка, гіпотези Кірхгофа-Лява, нестаціонарні осесиметричні коливання, рівняння руху.

EQUATIONS OF NON-STATIONARY OSCILLATIONS ELECTROADICAL BONIC AND CYLINDRICAL SHELLS OF FINITE LENGTH

Yanchevskiy I. V., D. of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Babaev A. A., Doctor of Philosophy, associate Professor

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Peremohy Ave., Kyiv, Ukraine, 03056

babaevaa@ukr.net

The subject of this work is devoted to the study of dynamic processes in electro-elastic systems and relates to one of the modern directions of mechanics of a deformable solid, and has intensive development in this direction in our time. The received fundamental scientific results in this area are widely used in improving existing ones and the creation of fundamentally new technical devices, the action of which is based on the use of the phenomenon of piezoelectric effect, which indicates their relevance.

Expansion of knowledge on this problem requires the formulation of new classes of tasks, which, if possible, more fully take into account the design features and operating conditions of the real equipment, the development of effective methods for their solution and the discovery of new mechanical laws of processes in hydroelectric-elastic systems.

In this paper, using the Kirchhoff-Love hypotheses generalized for the case of electromechanics, equations of axisymmetric oscillations of bimorph cylindrical and conical shells of finite length composed of an elastic and radially polarized electroelastic layer are recorded. The boundary conditions of the mechanical and electrical groups are given, which correspond to the case of hinging the ends of the shell, when the electroelastic layer is operating in the regime of a direct or inverse piezoelectric effect. The aim of this work is the development of analytical methods for studying the oscillations of thin-walled shells in which the mechanical and electrical field values are related. In this publication, in particular, the equations of motion of a conical and cylindrical shell of finite length, composed of thin elastic and electroelastic layers are presented.

Key words: bimorph electroelastic shell, Kirchhoff-Love hypotheses, nonstationary axisymmetric oscillations, equations of motion.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широкое применение в различных отраслях техники находят электроупругие преобразователи энергии с тонкостенными активными элементами. Достаточно широкий перечень современных устройств, работа которых основана на пьезоэффекте, создаются на базе пьезоактивных элементов в виде оболочек вращения, в частности, конической и цилиндрической форм. Такие элементы характеризуются высокой эффективностью преобразования электрической/механической энергии и достаточной механической прочностью.

Вместе с тем прикладные вопросы, связанные с колебаниями электроупругих конической и цилиндрической оболочек конечной длины, к настоящему времени остаются недостаточно изученными. Среди единичных публикаций по данной проблематике следует отметить [1-3], которые посвящены изучению установившихся колебаний оболочек упомянутой геометрии. Вопросы, связанные с переходными режимами работы и демпфированием колебаний таких оболочек при действии гармонических электромеханических нагрузок, затронуты в публикациях [4, 5].

Следует отметить, что для электроупругих сферической и бесконечно длинной цилиндрической оболочек такие уравнения приведены в [6], для тороидальной – в [3].

КРУГОВАЯ КОНИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА

Рассматривается круговая коническая оболочка, которая составлена из жестко соединенных между собой внутреннего металлического слоя толщиной h_{m} и внешнего слоя из поляризованной по толщине h_{p} пьезокерамики класса симметрии 6 mm [7]. Длина оболочки обозначена через l, а минимальный и максимальный радиусы торцевых поверхностей – через r_1 и r_2, соответственно. На поверхностях электроупругого слоя имеются сплошные тонкие электроды, внутренний из которых поддерживается на нулевом электрическом потенциале, а потенциал на внешнем обозначен через V.

Для моделирования поведения рассматриваемой оболочки ввиду ее тонкостенности привлекаются механические гипотезы Кирхгофа-Лява для двухслойной структуры вцелом, которые дополняются аналогичной точности допущениями для характеристик электрического поля в электроупругом слое [8]. Тогда уравнения, описывающие осесимметричные колебания рассматриваемой оболочки, могут быть получены из классических уравнений теории тонких оболочек [9], если в них подставить коэффициенты первой квадратичной формы и радиусы координатной поверхности в виде

$$A_1=1;\quad A_2=r=x\sin\alpha;\quad R_1=\infty;\quad R_2=x\,\mathrm{tg}\alpha, \tag{1}$$

где x – координата, отсчитываемая от вершины конуса вдоль образующей; α – полуугол раствора в вершине конуса.

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(A_2N_1\right)-\frac{\partial A_2}{\partial x}N_2\right]+\frac{Q_1}{R_1}+q_1=m_h\frac{\partial^2u_0}{\partial t^2}; \tag{2}$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2Q_1}{\partial x}-\frac{N_1}{R_1}-\frac{N_2}{R_2}+q_3=m_h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

в которой w и u_0 – нормальная и меридиональная составляющие вектора перемещения точек поверхности приведения, положение которой определяется расстоянием ζ_0 относительно поверхности соединения слоев; $m_h=\rho_{\mathrm{p}}h_{\mathrm{p}}+\rho_{\mathrm{m}}h_{\mathrm{m}}$; ρ_{j} – плотности материалов; t – время; силовые факторы с индексом «1» направлены вдоль образующей оболочки x, с «2» – в окружном направлении θ; $Q_1=\dfrac{1}{A_1A_2}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(A_2M_1\right)-\dfrac{\partial A_2}{\partial x}M_2\right]$.

Значение ζ_0 принимается таким, чтобы обеспечивалась наиболее простая связь между усилиями N_i и моментами M_i ($i=1,2$) с параметрами деформации поверхности приведения:

ISSN 2518-1785 (Online), ISSN 2413-6549 (Print)

$$N_1 = D_N\left(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}\right)-e_1\frac{h_\text{p}}{\zeta_0-\zeta_1}V;\; N_2 = D_N\left(\nu\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)-e_1\frac{h_\text{p}}{\zeta_0-\zeta_1}V;$$
$$M_1 = D'_M\left(\kappa_{11}+\nu'\kappa_{22}\right)-e_1\frac{h_\text{p}\zeta_\text{p}}{\zeta_0-\zeta_1}V;\; M_2 = D'_M\left(\nu'\kappa_{11}+\kappa_{22}\right)-e_1\frac{h_\text{p}\zeta_\text{p}}{\zeta_0-\zeta_1}V. \qquad (3)$$

В свою очередь, деформации и изменения кривизн с учетом (1) выражаются через составляющие вектора перемещения следующим образом [9] –

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_0}{\partial x};\quad \varepsilon_{22}=\frac{u_0}{x}+\frac{w}{x}\text{ctg}\alpha;\quad \kappa_{11}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\quad \kappa_{22}=-\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Расчетные выражения для жесткостных коэффициентов D_N и D'_M (см. (3)), коэффициентов Пуассона ν и ν' совпадают с приведенными в [10]; $\zeta_\text{p}=-\zeta_0+\frac{h_\text{p}}{2}$ – смещение срединной поверхности пьезокерамического слоя относительно поверхности приведения.

В результате несложных преобразований из исходной системы (2) получим систему уравнений движения оболочки в перемещениях:

$$D_N\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u_0}{\partial x}-\frac{1}{x^2}u_0+\frac{\nu}{x}\frac{\partial w}{\partial x}\text{ctg}\alpha-\frac{1}{x^2}w\text{ctg}\alpha\right)-e_1\frac{h_\text{p}}{\zeta_0-\zeta_1}\frac{\partial V}{\partial x}+q_1=m_h\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2};$$

$$D'_M\left(-\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{2}{x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{x^3}\frac{\partial w}{\partial x}\right)-$$
$$-D_N\left(\nu\frac{1}{x}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{x^2}u_0+\frac{1}{x^2}w\text{ctg}\alpha\right)\text{ctg}\alpha-e_1\frac{h_\text{p}}{\xi_0-\xi_1}\frac{1}{x}\left(V\text{ctg}\alpha+\zeta_\text{p}\frac{\partial V}{\partial x}\right)+q_3=m_h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

В последующем будем пользоваться безразмерными обозначениями, которые введем при помощи следующих соотношений:

$$\bar{u}_0=\frac{u_0}{R_0};\; \bar{w}=\frac{w}{R_0};\; \bar{x}=\frac{x}{R_0};\; \bar{\zeta}_\text{p}=\frac{\zeta_\text{p}}{R_0};\; \bar{h}_\text{j}=\frac{h_\text{j}}{R_0};\; \bar{l}=\frac{l}{R_0};\; \bar{t}=t\sqrt{\frac{D_N}{R_0^2 m_h}};$$
$$\bar{q}_i=\frac{q_i}{D_N};\; \bar{N}_i=\frac{N_i}{R_0 D_N};\; \bar{M}_i=-\frac{M_i}{R_0^2 D'_M}\;\; (i=1,2,3);\; \bar{V}=\frac{e_1}{R_0 D_N}\frac{h_\text{p}}{\zeta_0-\zeta_1}V;\; \bar{D}_3=\frac{D_3}{e_1}, \qquad (4)$$

где $R_0=\frac{r_1+r_2}{2}$ – средний радиус оболочки.

С использованием безразмерных обозначений система (2) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\nabla^2 u_0+\frac{1}{x^2}u_0-\frac{\nu}{x}\frac{\partial w}{\partial x}\text{ctg}\alpha+\frac{1}{x^2}w\text{ctg}\alpha=q_1-\frac{\partial V}{\partial x};$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\delta\nabla^2\nabla^2 w+\frac{1}{x^2}w\text{ctg}^2\alpha+\left(\frac{1}{x^2}u_0+\nu\frac{1}{x}\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\text{ctg}\alpha=q_3-\frac{1}{x}\left(V\text{ctg}\alpha+\zeta_\text{p}\frac{\partial V}{\partial x}\right), \qquad (5)$$

в которой и далее черта над переменными опущена; $\delta=\frac{D'_M}{D_N}$; $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ – оператор Лапласа ($\nabla^2\nabla^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{2}{x}\frac{\partial^3}{\partial x^3}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{x^3}\frac{\partial}{\partial x}$).

Уравнения (5) необходимо дополнить начальными условиями для компонент вектора перемещения и граничными условиями, которые в случае шарнирного опирания торцов запишутся в виде

$$w\big|_{x=x_i}=0\,;\quad N_1\big|_{x=x_i}=0\,;\quad M_1\big|_{x=x_i}=0\,, \tag{6}$$

где $x_i=\dfrac{r_i}{\sin\alpha}$ ($i=1,2$), а усилие N_1 и изгибающий момент M_1 с учетом обезразмеривания (4) определяются соотношениями

$$N_1=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\frac{u_0}{x}+\nu\frac{w}{x}\mathrm{ctg}\alpha-V\,;\quad M_1=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu'\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\zeta_p}{\delta}V\,.$$

Граничные условия электрической группы зависят от режима работы электроупругого слоя. Так, если колебания оболочки возбуждаются электрическим путем, то функция V считается заданной –

$$V=f(t), \tag{7}$$

а если электроды считаются разомкнутыми, то должно выполняться условие

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{S_1}D_3ds=0\,, \tag{8}$$

обеспечивающее постоянство суммарного заряда на электродах электроупругого слоя (S_1 – поверхность, занимаемая электродом).

Входящая в (8) нормальная к координатной поверхности ($x,\ \theta$) составляющая электрической индукции D_3, в рамках обобщенных на случай электромеханики гипотез Кирхгофа-Лява, считается не зависящей от толщинной координаты ζ ($\partial D_3/\partial\zeta=0$) и определяется равенством [10]:

$$D_3=e_1\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)+e_1\zeta_p\left(\kappa_{11}+\kappa_{22}\right)+\varepsilon_3\frac{V}{\zeta_0-\zeta_1}\,,$$

которое с использованием безразмерных переменных (4) запишется следующим образом

$$D_3=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{x}+\frac{w}{x}\mathrm{ctg}\,\alpha-\zeta_p\nabla^2 w+\frac{1}{\delta_1}V\,. \tag{9}$$

Здесь $\delta_1=e_1^2h_p/\varepsilon_3D_N$.

В результате несложных преобразований для разности потенциалов V на основании равенств (8) и (9) получим следующую формулу

$$V=\sin\alpha\frac{\delta_1}{l}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{x}+\frac{w}{x}\mathrm{ctg}\,\alpha-\zeta_p\nabla^2 w\right)xdx\,. \tag{10}$$

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА

Для биморфной круговой цилиндрической оболочки с параметрами Ламе и радиусами

$$A_1=1\,;\quad A_2=R_0\,;\quad R_1=\infty\,;\quad R_2=R_0\,,$$

уравнения колебаний в усилиях с учетом (2) запишутся в таком виде

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+q_1=m_h\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2};\quad \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}-\frac{N_2}{R_0}+q_3=m_h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{11}$$

Здесь R_0 – радиус поверхности приведения оболочки; x – осевая координата, отсчитываемая от ее края.

Физические соотношения, устанавливающие связь между усилиями и моментами с соответствующими деформациями координатной поверхности, представляются следующим образом –

$$N_1=D_N\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\frac{w}{R_0}\right)-e_1\frac{h_{\text{р}}}{\zeta_0-\zeta_1}V;\quad N_2=D_N\left(\nu\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{w}{R_0}\right)-e_1\frac{h_{\text{р}}}{\zeta_0-\zeta_1}V;$$

$$M_1=-D'_M\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-e_1\frac{h_{\text{р}}\zeta_{\text{р}}}{\zeta_0-\zeta_1}V,$$

при получении которых также учитывались гипотезы Кирхгофа-Лява, согласно которым компоненты вектора деформации поверхности приведения и изменения кривизн равны

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_0}{\partial x};\quad \varepsilon_{22}=\frac{w}{R_0};\quad \kappa_{11}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\quad \kappa_{22}=0.$$

С использованием безразмерных переменных (4) из (11) получим систему уравнений движения в перемещениях, которые представляют собой систему двух линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial w}{\partial x}=q_1-\frac{\partial V}{\partial x};\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\delta\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+w+\nu\frac{\partial u_0}{\partial x}=q_3+V-\zeta_{\text{р}}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.\end{gathered} \tag{12}$$

При шарнирном закреплении торцов на контурах $x_1=0$ и $x_2=l$ задаются граничные условия (6), в которых силовые факторы определяются равенствами

$$N_1=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu w-V;\quad M_1=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\zeta_{\text{р}}}{\delta}V.$$

В случае работы электроупругого слоя в режиме «холостого хода» [8] граничное условие электрической группы (8) примет следующий вид:

$$V=\frac{\delta_1}{l}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+w-\zeta_{\text{р}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx. \tag{13}$$

Система уравнений в форме (5) или (12), совместно с начальными условиями и граничными условиями (6), (7), (10) или (13), образует полную систему уравнений начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях биморфной круговой конической и цилиндрической оболочек с шарнирно-закрепленными торцами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Рассказов А. О., Карнаухова О. В. Параметрические колебания трехслойной конической пьезооболочки. *Механика композитных материалов*. 2003. Т. 39, № 1. С. 25–38.

2. Киричок И. Ф., Венгренюк Ю. А. О влиянии тепловой деполяризации и термомеханической связанности на гармонические колебания и диссипативный разогрев конических оболочек из пьезокерамики. *Прикл. механика*. 1998. Т. 34, № 8. С. 62–67.

3. Tzou H. S., Chai W. K., Arnold S. M. Structronics and actuation of hybrid electrostrictive / Piezoelectric thin shells. *J. of Vibration and Acoustics*. 2006. Vol. 128. P. 79–87. DOI: 10.1115/1.2149397.

4. Li H., Hu S. D., Tzou H. S. Optimal vibration control of conical shells with collocated helical sensor/actuator pairs. *J. of Theoretical and Applied Mechanics*. 2012. Vol. 50, No. 3. P. 769–784.

5. Wang W., Wei Y., Wang C., Zou Zh. Investigation for active vibration control of piezoelectric conical shell. *Engineering mechanics*. 2008. Vol. 25, No. 10. P. 235–240. DOI: 1000-4750(2008)10-0235-06.

6. Савин В. Г., Моргун И. О. Уравнения колебаний пьезокерамических сферических и цилиндрических оболочек. *Наук.-техн. зб. «Інформаційні системи, механіка та керування»*. 2009. Вип. 5. С. 85–96.

7. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И., Сеник Н. А., Фильштинский М. Л. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. I. Введение в теорию термопьезоэлектричества. Москва: КомКнига, 2010. 312 с.

8. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость: Гузь А. Н. (ред.). Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.

9. Бабаев А. Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. Киев: Наук, думка, 1990. 176 с.

10. Подчасов Н. П., Янчевский И. В. Управление нестационарными колебаниями цилиндрической полупассивной оболочки при секционированном электродировании пьезослоя. *Теор. и прикл. механика*. 2011. Вып. 3 (49). С. 93–101.

REFERENCES

1. Karnaukhov, V. G., Kozlov, V. I., Rasskazov, A. O. & Karnaukhova, O. V. (2003). Parametric oscillations of a three-layer conical piezo shell. Mekhanika kompozitnykh materialov, Vol. 39, No. 1, pp. 25-38.

2. Kirichok, I. F. & Vengreniuk, Iu. A. (1998). On the influence of thermal depolarization and thermomechanical coupling on harmonic oscillations and dissipative heating of conical shells of piezoceramics. Prikl. Mekhanika, Vol. 34, No. 8, pp. 62-67.

3. Tzou, H. S., Chai, W. K. & Arnold, S. M. (2006). Structronics and actuation of hybrid electrostrictive / Piezoelectric thin shells. J. of Vibration and Acoustics, Vol. 128, pp. 79-87. DOI: 10.1115/1.2149397.

4. Li, H., Hu, S. D. & Tzou, H. S. (2012). Optimal vibration control of conical shells with collocated helical sensor/actuator pairs. J. of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 50, No. 3, pp. 769-784.

5. Wang W., Wei Y., Wang C., Zou Zh. Investigation for active vibration control of piezoelectric conical shell. *Engineering mechanics*. 2008. Vol. 25, No. 10. P. 235–240. DOI: 1000-4750(2008)10-0235-06.

6. Savin, V. G. & Morgun, I. O. (2009). Equations of oscillations of piezoceramic spherical and cylindrical shells. Nauk.-tekhn. zb. «Informatsiyni systemy, mekhanika ta keruvannya», Iss. 5, pp. 85-96.

7. Bardzokas, D. I., Zobnin, A. I., Senik, N. A. & Filshtinskii, M. L. (2010). Mathematical modeling in problems of the mechanics of coupled fields. Vol. I. Introduction to the theory of thermoelectric power. Moscow: KomKniga.

8. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. & Shulga, N. A. (1989). Mechanics of bound fields in elements constructions. Vol. 5. Electroelasticity: Guz A. N. (Eds.). Kiev: Nauk. dumka.

9. Babaev, A. E. (1990). Nonstationary waves in continuous media with a system of reflecting surfaces. Kiev: Nauk. dumka.

10. Podchasov, N. P. & Ianchevskii, I. V. (2011). Control of nonstationary oscillations of a cylindrical semi-passive shell under sectionalized electrodes of a piezolayer. Teor. i prikl. mekhanika, Iss. 3 (49), pp. 93-101.