

<http://cyberleninka.ru/article/n/vozmozhnosti-obezlichivaniya-personalnyh-dannyh-v-sistemah-ispolzuyus-chih-relyatsionnye-bazy-dannyh>.

9. Bondarenko, K. O. (2015). Unyversalniy bystrodejstvuyushhij algorytm procedur obezlichivaniya dannyh. Izvestiya Juzhnogo federalnogo universiteta. Texnicheskie nauki. Retrieved from <http://cyberleninka.ru/article/n/universalnyy-bystrodeystvuyushchiy-algoritm-protsedur-obezlichivaniya-dannyh>.
10. Melihova, O. A., Chumichev, V. S., Dzhambinov, S. V. & Gajdukov, A. B. (2015). Nekotorye aspekty kryptograficheskogo vzloma i povisheniya nadezhnosti algoritmov shifrovaniya. Molodoj uchenyj, No. 11, pp. 392-394 (in Russian).
11. Moldovjan, N. A., Gorjachev, A. A. & Vajchikauskas, M. A. (2014). Rasshyrenye kryptoshemy Rabina: algoritm otriczaemogo shifrovaniya po otkrytomu kljuchu. VZI. Zhurnal po voprosam zashchyty informacii. FGUP «VYMY», No. 2, pp. 12–16 (in Russian).
12. Wang, J. A & Meng, Bo. (2009, August). Receiver Deniable Encryption Scheme. Proceedings of the 2009 International Symposium on Information Processing (ISIP'09), (pp. 254–257), Huangshan: P. R. China.
13. Ibrahim, H. (2009). Receiver-deniable Public-Key Encryption. International Journal of Internet Security, Vol. 8, No. 2, pp. 159–165.
14. Canetti, R., Dwork, C., Naor, M. & Ostronsky, R. (1997). Deniable Encryption. Proceedings of Advances in Cryptology, pp. 90–104.
15. Kozina, G. L. & Galchenko, A. V. (2015, April). Zaperechuvane shifruvannja. Tyzhden nauky – 2015: Tezy dopovidej shhorichnoyi nauk.-prakt. konf. vykladachiv, naukociv, molodyh uchenyh, aspirantiv, studentiv ZNTU, Zaporizhzhya.
16. Galchenko, A. V. & Kozina, G. L. (2016). Modifikacija algorytmu zaperechuvanogo shyfruvannya Menga. Radioelektronika, informatyka, upravlinnya. Retrieved from <http://cyberleninka.ru/article/n/modifikatsiya-algoritmu-zaperechuvanogo-shifruvannya-menga>.
17. (2014). Ataka na chernij yashhik. Revers-inzhiniring virtualizirovannogo i mutirovannogo koda. Habrahabr. Retrieved from <http://habrahabr.ru/post/225963/>.

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ НА БАЗЕ ГИБРИДНОГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Грищак В. З., д. т. н., профессор, Дьяченко Н. Н., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

dyachenkonata69@gmail.com

Рассматривается линейная задача устойчивости конической оболочки при комбинированном нагружении тремя усилиями: всесторонним внешним давлением, осевым сжатием и крутящим моментом. Выведено обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, к которому сводится система уравнений в частных производных полубезмоментной теории устойчивости оболочки. Задача решается с помощью ВКБ метода, гибридного ВКБ-Галеркин метода и метода конечных разностей. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных разными методами. Выявлено преимущество асимптотического гибридного метода перед другими методами. Построены линии уровня поверхности устойчивости. Выявлено влияние угла конусности и длины образующей конической оболочки на ее устойчивость.

Ключевые слова: коническая оболочка, устойчивость оболочки, комбинированное нагружение, поверхность устойчивости, гибридный асимптотический ВКБ-Галеркин метод.

ВИЗНАЧЕННЯ ОБЛАСТЕЙ СТІЙКОСТІ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ НАВАНТАЖЕННІ НА БАЗІ ГІБРИДНОГО АСИМПТОТИЧНОГО ПІДХОДУ

Грищак В. З., д. т. н., професор, Д'яченко Н. М., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

dyachenkonata69@gmail.com

Розглядається лінійна задача стійкості конічної оболонки при комбінованому навантаженні трьома зусиллями: всебічним зовнішнім тиском, осьовим стисненням і крутильним моментом. Виведено звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку, до якого зводиться система рівнянь у частинних похідних напівбезмоментної теорії стійкості оболонки. Задача розв'язується за допомогою ВКБ методу, гібридного ВКБ-Гальоркін методу і методу скінченних різниць. Проведено порівняльний аналіз результатів, отриманих різними методами. Виявлено перевагу асимптотичного гібридного методу перед іншими методами. Побудовано лінійні рівня поверхні стійкості. Виявлено вплив кута конусності і довжини твірної конічної оболонки на його стійкість.

Ключові слова: конічна оболонка, стійкість оболонки, комбіноване навантаження, поверхня стійкості, гібридний асимптотичний ВКБ-Гальоркін метод.

STABILITY AREAS DETERMINATION OF THE CONICAL SHELL AT COMBINED MODE LOADING ON A HYBRID ASYMPTOTIC APPROACH BASIS

Gristchak V. Z., D.Sc., professor, Dyachenko N. N., Ph.D. In Physics and Math, associate professor

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhia, 69600, Ukraine*

dyachenkonata69@gmail.com

Stability problem of a conical shell at combined effect of the uniform pressure, axial compression and twisting moment on it is considered. A single or simultaneous action of pairs the specified loadings is considered in the work of N. M. Mushtari [1], P. Seide [2], A. V. Sachenkov [3], A. S. Volmir [4], N. A. Alumyaev [5], V. Z. Gristchak, I. N. Preobrazhensky [6] etc [7-10].

On the the semimembrane theory basis, the stability of conical shell is modeled by partial differential equations system. The wave making form is chosen so that it calculates/considers the waves number in a circumferential/hoop direction, the tangent of wave angle to the cone generatrix. In this case, the stress and deflection function is distinguished that depend on one variable length along the generatrix. This system is integrated by Bubnov-Galerkin method on the arc coordinate position. As a result, the two-dimensional problem is reduced to the one-dimensional. The separation of small parameter allows to simplify the system. After that, the stress function is eliminated, resulting in a single differential equation of the fourth order with respect to the deflection function. The similar equation is contained in the works of A. S. Volmir [4], V. Z. Gristchak, I. N. Preobrazhensky [6] for the cases such as the effect on the conical shell of one loadings or the joint action of external pressure and axial compression. The equation obtained in this work characterizes the simultaneous action of three loads. Such an equation had not been known before.

The decision of this equation is received for shells of the average length on the hypothesis that external pressure is prevailing. een known before. In particular, it means that one half wave is formed along the shell generatrix.

Received differential equation is solved by three methods. Firstly, it is solved by the asymptotic WKB method (Wentzel–Kramers–Brillouin) [11] based on the series solution expansion in reciprocal degrees of the large parameter. Secondly, the equation is solved by the hybrid asymptotic WKB-Galerkin method [8] based on the use of classical WKB perturbation method along with determination principle of the artificial unknown coefficients in asymptotic decomposition using Galerkin orthogonality condition. Thirdly, the numerical finite difference method is used in the work.

Boundary conditions account for rigid clamping of the shell makes it possible to obtain the characteristic equation of conical shell stability with respect to the wave making parameters.

A comparative analysis of the results obtained by different methods is researched. The advantage of hybrid WKB-method in comparison with other methods is revealed. The contour curves of surface stability obtained by notified methods are constructed for different cone angles and different lengths of the cone generatrix.

It is concluded that reducing of the cone angle leads to the increase in the number of waves in the circumferential direction and tangent of wave angle to the cone generatrix. In this case, the cone angle does not substantially affect the dimensionless critical loads for the considered range of the geometric parameters of the shell.

The length increase of cone generatrix leads to the stability decrease.

Key words: a conical shell, a shell stability, a combined mode loading, a stability surface, the hybrid asymptotic WKB-Galerkin method.

ВВЕДЕНИЕ

Конические оболочки широко используются как элементы тонкостенных конструкций в авиации, судостроении, ракетной технике, строительстве и в других областях машиностроения. Обеспечение устойчивости равновесия и несущей способности тонкостенных деформируемых систем являются одной из важнейших задач, решаемых при проектировании летательных аппаратов, конструкций различных машин и других инженерных несущих сооружений.

Теоретические исследования устойчивости изотропных конических оболочек положили свое начало с работ Х. М. Муштари (1935 г.) [1] и получили дальнейшее развитие в работах Р. Seide [2], А. В. Саченкова [3], А. С. Вольмира [4], Н. А. Алумяэ [5], В. З. Грищака, И. Н. Преображенского [6], Э. И. Григолюка [7] и др. и продолжают развиваться в настоящее время [8, 9]. Обзор исследований в этой области проведен в монографии [6], где также проведен анализ методов решения, используемых этими авторами.

Различные задачи механики, в том числе задачи устойчивости оболочек, моделируются или сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, для решения которых эффективно применяются асимптотические методы. В работе [11] изложены теоретические и прикладные основы асимптотического ВКБ метода (Вентцель-Крамерс-Бриллюэн), который базируется на разложении решения в ряд по обратным степеням большого параметра. В монографии [6] этот метод применяется к решению дифференциальных уравнений задач устойчивости конических оболочек и сравнивается с результатами, полученными другими методами. Это первый метод, который используется в данной работе.

Одними из основоположников применения гибридного асимптотического метода к разным классам дифференциальных уравнений стали J. F. Geer, С. М. Andersen [12]. Затем этот метод усовершенствовался для случая сингулярных дифференциальных уравнений в работах В. З. Грищака и его учеников [8, 13]. Вторым методом, который применяется в данной работе, является гибридный ВКБ-Галеркин метод [8, 13], основанный на использовании классического метода возмущений ВКБ в сочетании с принципом определения искусственных неизвестных коэффициентов в асимптотических разложениях с помощью условия ортогональности Галеркина. В работах [8, 13] проведен сравнительный анализ результатов, полученных другими методами, с асимптотическими решениями ВКБ методом и гибридным ВКБ-Галеркин методом. В частности, получено хорошее согласование аналитических решений, полученных этим методом, с численными решениями. Для аналогичного сравнения авторами данной работы выбран численный метод конечных разностей.

В данной работе рассматривается задача устойчивости конической оболочки при комбинированном воздействии на нее всестороннего давления, осевого сжатия и крутящего момента. Одинокое или одновременное действие пар указанных нагрузок рассмотрены в работах [1-10]. Совместное воздействие трех нагрузок на коническую оболочку представляет научный и практический интерес.

Исходными служат уравнения равновесия элемента оболочки и уравнение совместности деформаций, приведенные в работе [4]. Аналогично [4, 6] выбирается форма волнообразования, которая учитывает число волн в окружном направлении, тангенс угла наклона гребня волны к образующей с выделением функций напряжений и прогиба, зависящие от одной переменной вдоль образующей. Интегрирование исходной системы методом Бубнова-Галеркина по дуговой координате позволяет свести двумерную задачу к одномерной. Выделение малого параметра (аналогично [4, 6]) позволяет упростить систему, а после исключения функции напряжения, получить одно дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции прогиба. В работах [4, 6, 8] содержится аналогичное уравнение для случаев воздействия на коническую оболочку одной из нагрузок или совместного действия внешнего давления и осевого сжатия. Отличительной

особенностью уравнения, полученного в данной работе, является зависимость его от тангенса угла наклона гребня волны к образующей. Решение этого уравнения строится для оболочек средней длины и только в том диапазоне нагрузок, в котором преобладающим является внешнее давление.

Построены линии уровня поверхности устойчивости. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных разными методами. Выявлено влияние угла конусности и длины образующей конуса на характеристики волнообразования.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАДАЧИ

С позиции полубезмоментной теории тонких оболочек рассматривается устойчивость жестко закрепленной усеченной конической оболочки кругового сечения при совместном действии всестороннего внешнего нормального давления, осевого сжатия и кручения.

Вводятся следующие обозначения: α – угол при основании конуса, s – расстояние по образующей конуса от вершины до точки срединной поверхности, l_0 и l_1 – расстояния до

меньшего и большего оснований соответственно, $x = \frac{s}{l_1}$, h – толщина оболочки, φ – угол

между аксиальной плоскостью и плоскостью отсчета, n – число волн в окружном направлении при выпучивании оболочки, w – нормальное перемещение точки срединной поверхности при выпучивании, f – функция усилий, q – внешнее нормальное давление, действующее как на боковую поверхность, так и на основания оболочки, T – осевая сила,

перпендикулярная основаниям, M – крутящий момент, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – жесткость обшивки,

E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

В работе [4] приведены уравнения равновесия элемента оболочки и уравнение совместности деформаций до потери устойчивости:

$$\begin{cases} D\Delta^2 w - \Delta_k f = g, \\ \Delta^2 f + Eh\Delta_k w = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Тут g – фиктивна поперечная нагрузка, равная:

$$g = -(N_1 \kappa_1 + N_2 \kappa_2 + 2 T_{12} \kappa_{12}), \quad (2)$$

где N_1, N_2, T_{12} – погонные нормальные и касательные усилия в основном состоянии,

$$\kappa_1 = -\frac{1}{l_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_2 = -\frac{1}{l_1^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \kappa_{12} = -\frac{1}{l_1^2 x \cos \alpha} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right); \quad (3)$$

$$N_1 = \frac{q}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{l_0^2}{l_1 x} - x l_1 \right) - \frac{T}{\pi l_1 x \sin 2\alpha}; \quad N_2 = -\frac{q l_1 x}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad T_{12} = \frac{M}{\pi x^2 l_1^2 \cos^2 \alpha}. \quad (4)$$

Операторы Δ и Δ_k находятся по формулам

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{l_1^2 A_1 A_2(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_2(x)}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{A_2(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{l_1^2 A_1 A_2(x)} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_2(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{A_2(x)}{A_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_1}{A_2(x)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \end{aligned}$$

$$\Delta_k = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{l_1^3 x} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

где A_1, A_2 – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности оболочки, для конуса равные $A_1 = 1, A_2(x) = x \cos \alpha$. Откуда следует, что для функции перемещений операторы Δ^2 и Δ_k даются в виде:

$$\Delta^2 w = \frac{1}{l_1^4} \cdot \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{x} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2}{x^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} - \frac{2}{x^3 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} + \frac{4}{x^4 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{x^4 \cos^4 \alpha} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right); \quad (5)$$

$$\Delta_k w = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{l_1^3 x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Аналогично для функции усилий.

Следуя работам [4, 6], для получения решения системы (1) функция радиальных перемещений и функция усилий представляются в виде:

$$w(x, \varphi) = W(x) \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos(\gamma(1-x) + n\varphi); \quad (7)$$

$$f(x, \varphi) = \Phi(x) \varepsilon^2 l_1 E h \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos(\gamma(1-x) + n\varphi); \quad (8)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{h \operatorname{ctg} \alpha}{l_1 \sqrt{12(1-\nu^2)}}}, \quad \gamma = \frac{n}{\cos \alpha} \gamma_1, \quad (9)$$

γ_1 – тангенс угла наклона гребня волны к образующей.

Предполагается, что комбинация внешних нагрузок такова, что в ней превалирующее действие имеет давление. В этом случае волнообразование по длине оболочки выражено намного слабее, чем в окружном. При этом, для оболочек средней длины число волн в окружном направлении таково, что $n^2 \gg 1$, а в продольном направлении образуется одна полуволна.

Аналогично [6] и [4] вводятся безразмерные параметры $\delta = \frac{n^2}{\cos^2 \alpha}$, $p = \varepsilon \delta$ и безразмерные усилия

$$\chi = \frac{q l_1}{E h \varepsilon^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}, \quad \eta = \frac{T \cos \alpha}{2 \pi E h \varepsilon^2 l_1 \sin^3 \alpha}, \quad \lambda = \frac{M}{2 \pi l_1^2 E h \varepsilon^{5/2} \sin^2 \alpha}. \quad (10)$$

Система (1) с учетом (2)-(10) интегрируется по координате φ методом Бубнова-Галеркина, то есть обе части каждого из уравнений системы умножаются на $\cos(\gamma(1-x) + n\varphi)$ и интегрируются от 0 до 2π . Это позволяет избавиться от переменной φ и после преобразований, осуществленных с помощью пакета компьютерной алгебры MAPLE, прийти к системе

$$\left\{ \begin{aligned} & \Phi \gamma^2 - \Phi'' - \frac{\lambda \gamma \sqrt{p}}{x^2} W - \chi p W + \frac{p^2}{x^3} W + \eta(-\gamma^2 W + W'') + \\ & + \varepsilon \left(\left(-\frac{1}{2} x^2 \gamma^2 W + x W' + \frac{1}{2} x^2 W'' \right) \chi + \left(-\frac{4}{x^3} + \frac{2\gamma^2}{x} \right) p W + \frac{2p}{x^2} W' - \frac{2p}{x} W'' \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left(\left(\frac{\gamma^2}{x} + x \gamma^4 \right) W + \left(\frac{1}{x^2} - 6\gamma^2 \right) W' - \left(\frac{1}{x} + 6x\gamma^2 \right) W'' + 2W''' + xW^{IV} \right) + \dots = 0; \\ & -\gamma^2 W + W'' + \frac{p^2}{x^3} \Phi + \varepsilon p \left(\left(-\frac{4}{x^3} + \frac{\gamma^2}{x} \right) \Phi + \frac{2}{x^2} \Phi' - \frac{2}{x} \Phi'' \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left(\left(\frac{\gamma^2}{x} + x \gamma^4 \right) \Phi + \left(\frac{1}{x^2} - 6\gamma^2 \right) \Phi' + \left(-\frac{1}{x} - 6x\gamma^2 \right) \Phi'' + 2\Phi''' + x\Phi^{IV} \right) + \dots = 0. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

В частном случае наличия только внешнего нормального давления аналогичная система приведена в [4], а кручения – в [6]. Следуя [4, 6], учитывая, что $\varepsilon \ll 1$, система (11) дается в виде

$$\left\{ \begin{aligned} & \Phi \gamma^2 - \Phi'' - \frac{\lambda \gamma \sqrt{p}}{x^2} W + \frac{p^2}{x^3} W - \chi p W + \eta(-\gamma^2 W + W'') = 0; \\ & -\gamma^2 W + W'' + \frac{p^2}{x^3} \Phi = 0. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Исключение из системы (12) функции $\Phi(x)$ позволяет получить обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции прогиба $W(x)$:

$$W^{IV} + \frac{6}{x} W''' + \left(\frac{6}{x^2} - 2\gamma^2 + \frac{\eta p^2}{x^3} \right) W'' - \frac{6\gamma^2}{x} W' - Q_0(x) W = 0, \quad (13)$$

где

$$Q_0(x) = \frac{\eta p^2 \gamma^2}{x^3} + \frac{\chi p^3}{x^3} + \frac{\lambda \gamma p^{5/2}}{x^5} - \frac{p^4}{x^6} + 6 \frac{\gamma^2}{x^2} - \gamma^4.$$

В случае воздействия на коническую оболочку лишь нормального давления ($\eta=0, \lambda=0, \gamma=0$) уравнение (13) имеет тот же вид, что в [4]. При одновременном воздействии нормального давления и осевого сжатия без кручения ($\lambda=0, \gamma=0$) это уравнение полностью отвечает [6], так же, как и в случае действия только кручения ($\chi=0, \eta=0$). Таким образом, уравнение (13) является обобщением полученных ранее уравнений при указанной комбинации нагрузок. Однако его нельзя получить простым сложением известных ранее уравнений, поскольку функция $Q_0(x)$ в уравнении (13) содержит слагаемое $\frac{\eta p^2 \gamma^2}{x^3}$, которого не было ни в одном из известных уравнений. Это слагаемое характеризует совместность воздействия осевого сжатия и кручения.

ПРИМЕНЕНИЕ ВКБ МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (13)

Решение ВКБ методом (Вентцель-Крамерс-Бриллюэн) получается в соответствии с [11, 6]. Поскольку $n^2 \gg 1$, то δ является большим параметром. Указанный метод предполагает представление решения уравнения (13) в виде

$$W(x) = \exp\left(\int_{l_0/l_1}^x \varphi(t) dt\right), \quad (14)$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \delta^{1-k}. \quad (15)$$

После подстановки разложения (14) в уравнение (13) и деления полученного уравнения на функцию $\exp\left(\int_{l_0/l_1}^x \varphi(t) dt\right)$, уравнение (13) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \delta^4 \left[(\varphi_0(x))^4 + \frac{\eta \varepsilon^2}{x^3} (\varphi_0(x))^2 \right] - Q_0(x) + \\ & + \delta^3 \left(\frac{\eta \varepsilon^2 \varphi_0'(x)}{x^3} + \frac{6(\varphi_0(x))^3}{x} + 6\varphi_0'(x)(\varphi_0(x))^2 + 4(\varphi_0(x))^3 \varphi_1(x) + \frac{2\eta \varepsilon^2 \varphi_0(x) \varphi_1(x)}{x^3} \right) + \\ & + \delta^2 f_1(x, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) + \delta f_2(x, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + f_3(x, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_4) + \\ & + \frac{1}{\delta} f_4(x, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_5) + \frac{1}{\delta^2} f_5(x, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_6) + \dots = 0. \end{aligned}$$

В нулевом приближении получается алгебраическое уравнение четвертой степени относительно функции $\varphi_0(x)$:

$$\delta^4 (\varphi_0(x))^4 + \delta^4 K(x) (\varphi_0(x))^2 - Q_0(x) = 0, \quad (16)$$

где

$$K(x) = \frac{\eta \varepsilon^2}{x^3}.$$

Решениями уравнения (16) являются функции

$$\varphi_{0,1}(x) = F_1(x), \quad \varphi_{0,2}(x) = -F_1(x), \quad \varphi_{0,3}(x) = iF_2(x), \quad \varphi_{0,4}(x) = -iF_2(x), \quad (17)$$

где

$$F_1(x) = \frac{1}{2\delta} \sqrt{-2K(x)\delta^2 + 2\sqrt{K^2(x)\delta^4 + 4Q_0(x)}}, \quad F_2(x) = \frac{1}{2\delta} \sqrt{2K(x)\delta^2 + 2\sqrt{K^2(x)\delta^4 + 4Q_0(x)}}.$$

Поскольку рассматривается решение, отвечающее превалирующему давлению, то это соответствует нагрузкам, удовлетворяющим неравенству

$$\chi > \frac{p}{x^3} - \frac{\eta \gamma^2}{p} - \frac{\lambda \gamma}{x^2 \sqrt{p}} - 6 \frac{\gamma^2 x}{p^3} + \frac{\gamma^4 x^3}{p^3} \quad (18)$$

для всех $x \in [l_0/l_1, 1]$.

Если в разложении (15) удерживать только нулевое приближение, то асимптотическим ВКБ-решением уравнения (13) будет функция

$$W(x) = C_1 \operatorname{sh} S_1(x) + C_2 \operatorname{ch} S_1(x) + C_3 \sin S_2(x) + C_4 \cos S_4(x), \quad (19)$$

где

$$S_j(x) = \delta \int_{l_0/l_1}^x F_j(t) dt, \quad j=1,2.$$

Рассматриваются граничные условия жесткого закрепления:

$$W(1) = W\left(\frac{l_0}{l_1}\right) = W'(1) = W'\left(\frac{l_0}{l_1}\right) = 0. \tag{20}$$

Подстановка в равенства (20) функции безразмерного прогиба (19), приводит к системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $C_k, k = \overline{1,4}$. После приравнивая ее определителя к нулю, получается характеристическое уравнение. Далее определяются минимальные значения параметров волнообразования $\eta, \lambda, \chi, n, \gamma_1$, соответствующих решению характеристического уравнения.

ПРИМЕНЕНИЕ ГИБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЕРКИН МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (13)

Первый шаг гибридного асимптотического подхода предполагает использование метода ВКБ, результатом которого является отыскание конечного числа функций $\varphi_k(x)$ разложения (15). На втором шаге эти функции используют как координатные для метода Галеркина.

В данном случае в качестве координатной функции $\varphi_0(x)$ рассматривается умноженная на δ любая из функций вида (17), например, функция $\varphi_{0,1}(x)$ (ее выбор не влияет на результат). Решение уравнения (13) представляется в виде

$$W(x) = \exp\left(\int_{l_0/l_1}^x \Lambda(\delta)\varphi_0(t) dt\right), \tag{21}$$

где $\Lambda(\delta)$ – неизвестная функция параметра δ . Подстановка функции безразмерного прогиба (21) в уравнение (13) приводит левую часть уравнения (13) к виду

$$\exp\left(\int_{l_0/l_1}^x \Lambda(\delta)\varphi_0(t) dt\right) R(\varphi_0, \varphi_0', \varphi_0'', \varphi_0''', \Lambda, x, \delta),$$

где

$$R(\varphi_0, \varphi_0', \varphi_0'', \varphi_0''', \Lambda, x, \delta) = \Lambda^4 Y_4(x) + \Lambda^3 Y_3(x) + \Lambda^2 Y_2(x) + \Lambda Y_1(x) - Q_0(x), \tag{22}$$

$$Y_4(x) = (\varphi_0(x))^4, \quad Y_3(x) = \frac{6}{x}(\varphi_0(x))^3 + 6\varphi_0'(x)(\varphi_0(x))^2,$$

$$Y_2(x) = \frac{\eta \varepsilon^2 \delta^2}{x^3}(\varphi_0(x))^2 - 2\gamma^2(\varphi_0(x))^2 + \frac{18}{x}\varphi_0'(x)\varphi_0(x) + \frac{6}{x^2}(\varphi_0(x))^2 + 4\varphi_0''(x)\varphi_0(x) + 3(\varphi_0'(x))^2,$$

$$Y_1(x) = -\frac{6\gamma^2\varphi_0(x)}{x} - 2\gamma^2\varphi_0'(x) + \varphi_0'''(x) + \frac{\eta \varepsilon^2 \delta^2 \varphi_0'(x)}{x^3} + \frac{6}{x^2}\varphi_0'(x) + \frac{6}{x}\varphi_0''(x), \quad Y_0(x) = Q_0(x).$$

В общем случае функция (21) не удовлетворяет уравнению (13), а функция $R(\varphi_0, \varphi_0', \varphi_0'', \varphi_0''', \Lambda, x, \delta)$ не обращается в нуль. В соответствии с методом Галеркина, значение $\Lambda(\delta)$ находится из условия ортогональности функций R и φ_0 , то есть

$$\int_{l_0/l_1}^1 \varphi_0(x) R(\varphi_0, \varphi_0', \varphi_0'', \varphi_0''', \Lambda, x, \delta) dx = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) равносильно уравнению четвертой степени относительно Λ :

$$\Lambda^4 a_4 + \Lambda^3 a_3 + \Lambda^2 a_2 + \Lambda a_1 - a_0 = 0, \quad (24)$$

$$a_s = \int_{l_0/l_1}^1 \varphi_0(x) Y_s(x) dx \quad (s = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Корни (24) обозначаются через $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$. Два из них Λ_1, Λ_2 являются вещественными, а два $\Lambda_{3,4} = \xi \pm i\zeta$ – комплексно сопряженными. Таким образом, решение гибридного ВКБ-Галеркин метода имеет вид:

$$W(x) = C_1 e^{\Lambda_1 \varphi_0(x)} + C_2 e^{\Lambda_2 \varphi_0(x)} + e^{\xi \varphi_0(x)} (C_3 \sin \zeta \varphi_0(x) + C_4 \cos \zeta \varphi_0(x)). \quad (25)$$

Учет краевых условий (20) для функции безразмерного прогиба (25), приводит к характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \zeta & \xi \\ e^{\Lambda_1 \omega} & e^{\Lambda_2 \omega} & e^{\xi \omega} \sin(\zeta \omega) & e^{\xi \omega} \cos(\zeta \omega) \\ \Lambda_1 e^{\Lambda_1 \omega} & \Lambda_2 e^{\Lambda_2 \omega} & e^{\xi \omega} [\xi \sin(\zeta \omega) + \zeta \cos(\zeta \omega)] & e^{\xi \omega} [\xi \cos(\zeta \omega) - \zeta \sin(\zeta \omega)] \end{vmatrix} = 0, \quad (26)$$

где $\omega = \int_{l_0/l_1}^1 \varphi_0(x) dx$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (13)

Метод конечных разностей (МКР) предполагает сведение дифференциального уравнения (13) к системе разностных (алгебраических) уравнений относительно значений искомой функции прогиба $\{W_i\}_{i=0}^N$ в точках разбиения отрезка $[l_0/l_1; 1]$ на N равных частей. Такое разбиение имеет шаг $H = \frac{L}{N}$. В каждой из внутренних точек $x_k = a + kH$, $k = \overline{1, N-1}$

указанного отрезка уравнение (13) заменяется приближенным, в котором производные от W представляются центральными конечными разностями второго порядка

$$\begin{aligned} W'(x_k) &= \frac{1}{12H} (-W_{k+2} + 8W_{k+1} - 8W_{k-1} + W_{k-2}) + \frac{H^4}{18} R_5, \\ W''(x_k) &= \frac{1}{12H^2} (-W_{k+2} + 16W_{k+1} - 30W_k + 16W_{k-1} - W_{k-2}) + \frac{H^4}{54} R_6, \\ W'''(x_k) &= \frac{1}{2H^3} (W_{k+2} - 2W_{k+1} + 2W_{k-1} - W_{k-2}) + \frac{17H^2}{60} R_5, \\ W^{(4)}(x_k) &= \frac{1}{H^4} (W_{k+2} - 4W_{k+1} + 6W_k - 4W_{k-1} + W_{k-2}) + \frac{17H^2}{90} R_6, \end{aligned} \quad (27)$$

где $|R_p| < \max_{x \in [l_0/l_1; 1]} |W^{(p)}(x)|$, $p = 5; 6$ [14]. Если в граничных условиях производные представить конечными разностями первого порядка, то это приведет, в случае жесткого закрепления, к уравнениям

$$W_0 = W_N = 0, \quad W_1 = W_{-1}, \quad W_{N-1} = W_{N+1}, \quad (28)$$

используя значения функции прогиба W_{-1} и W_{N+1} в точках, лежащих за пределами отрезка $[l_0/l_1; 1]$, а также значения W_0 , W_N – на концах этого отрезка. Эти же значения содержались и при составлении уравнений с номерами $k=1$ и $k=N-1$ во внутренних точках указанного отрезка, откуда их можно исключить, применяя соотношения (28). В результате получается $N-1$ однородное линейное алгебраическое уравнение с таким же количеством неизвестных. Приравнивание определителя этой системы к нулю, приводит к характеристическому уравнению относительно параметров волнообразования $\eta, \lambda, \chi, n, \gamma_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В результате применения каждого из трех предложенных методов получаются характеристические уравнения относительно пяти параметров волнообразования:

$$\Delta_1(\eta, \lambda, \chi, n, \gamma_1) = 0. \quad (29)$$

При фиксированных значениях $\eta = \eta_0$, $\lambda = \lambda_0$ уравнение (29) представляет собой неявно заданную функцию относительно трех параметров χ, n, γ_1 :

$$\Delta_2(\chi, n, \gamma_1) = 0, \quad (30)$$

где $\Delta_2(\chi, n, \gamma_1) = \Delta_1(\eta_0, \lambda_0, \chi, n, \gamma_1)$. Функция (30) минимизируется по переменным n и γ_1 с целью получения критического значения χ в зависимости от η и λ . Поскольку число волн в окружном направлении n является целым, то перебор значений, при каждом $n = n_0$, приводит к неявно заданной функции двух переменных

$$\Delta_3(\chi, \gamma_1) = 0, \quad (31)$$

где $\Delta_3(\chi, \gamma_1) = \Delta_2(\chi, n_0, \gamma_1)$. Дальнейшей целью является исследование функции (31).

В случае решения задачи ВКБ приближением и гибридным ВКБ-Галеркин методом левая часть уравнения (31) является трансцендентной функцией, а в случае метода конечных разностей – многочленом двух переменных. Поскольку явно выразить один параметр через другой из уравнения (31) затруднительно, то для каждого из методов построен собственный алгоритм поиска минимума неявно заданной функции (31).

При решении поставленной задачи ВКБ методом (а также методом конечных разностей), с помощью пакета компьютерной алгебры MAPLE, строится график такой функции и находится ее минимум.

При решении ВКБ-Галеркин методом или методом конечных разностей перебор значений γ_1 приводит (31) к уравнению относительно одной переменной χ . В случае решения методом конечных разностей его можно решить с помощью пакета MAPLE, а в случае гибридного ВКБ-Галеркин метода – с помощью метода половинного деления. Из полученных значений χ выбирается наименьшее по перебираемому параметру γ_1 .

После отыскания минимума функции (31), находится то значение числа волн в окружном направлении \tilde{n} , которому соответствует наименьшее значение χ по одному из аналитических методов (ВКБ методу или ВКБ-Галеркин методу). Для каждого из них это значение одинаково. Именно для этого \tilde{n} проводится расчет методом конечных разностей.

На рис. 1 изображены точки, соответствующие минимальному значению $\chi = \chi_1 \sqrt[4]{12^3}$ функции (31), рассчитанному при

$$v = 0.3, h = 0.1 \text{ см}, l_1 = 182 \text{ см}, \quad (32)$$

$\frac{l_0}{l_1} = 0.65, \lambda = 1, \eta = 0, \alpha = 60^\circ$ гибридным методом.

Для наглядности они соединены линией тренда квадратичного вида. Таким образом, иллюстрируется принцип поиска критического безразмерного нормального внешнего давления. Для указанных исходных данных это значение равно $\tilde{\chi} = 5.917016552 \sqrt[4]{12^3}$, а искомое значение числа волн в окружном направлении $\tilde{n} = 16$.

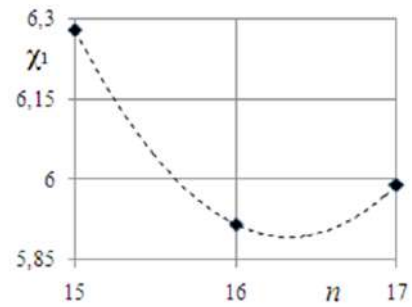


Рис. 1

Множество неотрицательных значений усилий η, λ, χ , которые удовлетворяют неравенству (18), и соответствуют критической нагрузке, образуют границу области устойчивости $\Gamma(\eta, \lambda, \chi) = 0$. Такая граница представляет собой поверхность устойчивости в системе координат η, λ, χ . Нагрузки, не превосходящие критические, расположены ниже этой поверхности и образуют область устойчивости $\Gamma(\eta, \lambda, \chi) \leq 0$. Согласно теореме Попковича, для линейных систем эта область должна быть выпуклой в сторону неустойчивости (от начала координат). Для цилиндрических оболочек найдены уравнения таких поверхностей, полученных теоретическими и экспериментальными исследованиями [7].

Если зафиксировать одну из нагрузок, то на поверхности образуется линия уровня. Например, при $\lambda = \lambda_0$ эта линия будет иметь уравнение $\Gamma(\eta, \lambda_0, \chi) = 0$. Целью является построение совокупности таких линий при различных фиксированных значениях безразмерного крутящего момента λ и безразмерного осевого усилия η . В частности, совместное действие только пар нагрузок соответствует тому, что третья равна нулю. Парное воздействие нагрузок на коническую оболочку изучено в работах [3, 4, 8].

АНАЛИЗ ЧИСЛОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Расчеты проводятся для оболочек с характеристиками (32). Анализируются результаты расчета для оболочки средней длины, для которой $\frac{l_0}{l_1} = 0.65$. При расчетах методом

конечных разностей число N частей разбиения отрезка $\left[\frac{l_0}{l_1}, 1\right]$ выбиралось равным 33. При этом необходимо вычислять определитель порядка 32, что позволяет сделать пакет компьютерной алгебры MAPLE.

На рис. 2 приведены линии уровня поверхности устойчивости при различных фиксированных значениях безразмерного крутящего момента λ . Они характеризуют зависимость значений $\chi_1 = \frac{\chi}{\sqrt[4]{12^3}}$, соответствующих безразмерным критическим давлениям, от безразмерного осевой силы η при тех значениях λ , которые подписаны возле линий уровня. Для $\lambda = 0$ и $\lambda = 0.1$ линии этих зависимостей отличаются незначительно, менее, чем на 0.5%. Поэтому графические результаты для $\lambda = 0$ отдельно не вынесены.

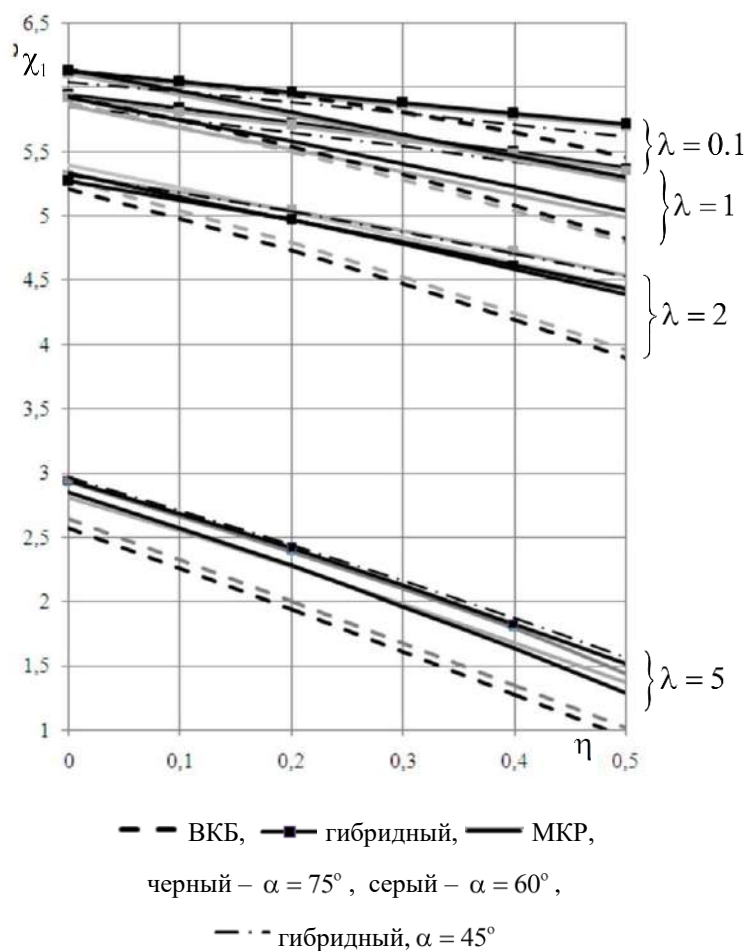


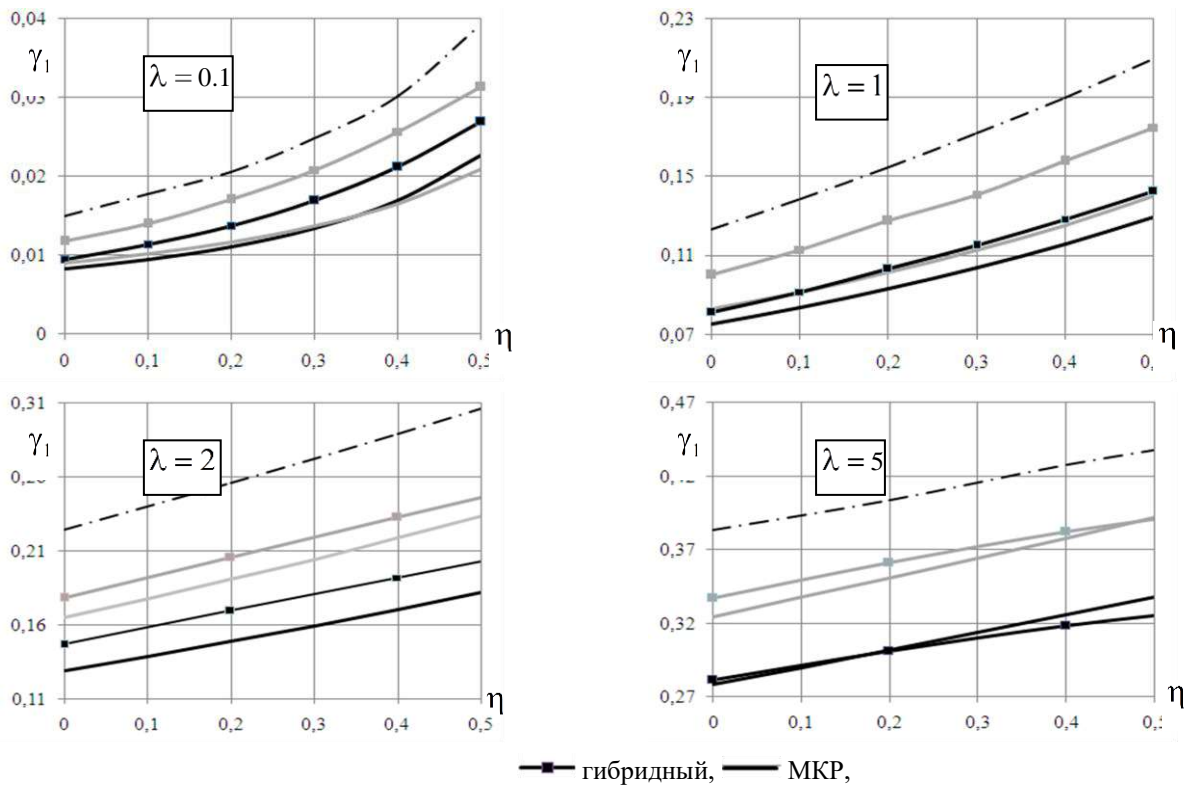
Рис. 2

На рис. 2 проведено сопоставление результатов, полученных с помощью гибридного ВКБ-Галеркин метода, ВКБ метода и метода конечных разностей, а также результатов для разных углов конусности. Аналогичные сопоставления представлены и на рис. 3 с зависимостями значений величины γ_1 тангенса угла наклона гребня волны к образующей конической оболочки от η при различных значениях λ .

Что касается сравнения результатов, полученных разными методами, то удовлетворительное согласование с численным решением имеет гибридный ВКБ-Галеркин метод для всех значений крутящего момента. При этом, результаты, полученные ВКБ методом, имеют худшее согласование с другими методами. Именно поэтому зависимости на рисунке 3 построены с помощью только двух методов: гибридного и метода конечных разностей. Приведенные на рис. 2 и рис. 3 зависимости для угла конусности $\alpha = 45^\circ$ найдены с использованием одного гибридного метода.

Из результатов, приведенных на рис. 3, следует, что тангенс γ_1 угла наклона волны к образующей растет при уменьшении угла конусности α . С увеличением осевого усилия η или крутящего момента λ значения γ_1 увеличиваются.

На рис. 4 вынесены линии уровня поверхности устойчивости при фиксированных значениях осевого усилия для угла при основании конуса $\alpha = 60^\circ$, полученные с помощью гибридного метода. Представлены зависимости критического параметра внешнего давления от крутящего момента. Если зависимость между осевой сжимающей силой и внешним давлением приближенно имеет линейный характер при всех значениях крутящего момента, то зависимость между крутящим моментом и внешним давлением при фиксированных сжимающих усилиях является нелинейной.



черный – $\alpha = 75^\circ$, серый – $\alpha = 60^\circ$, - · - гибридный, $\alpha = 45^\circ$

Рис. 3

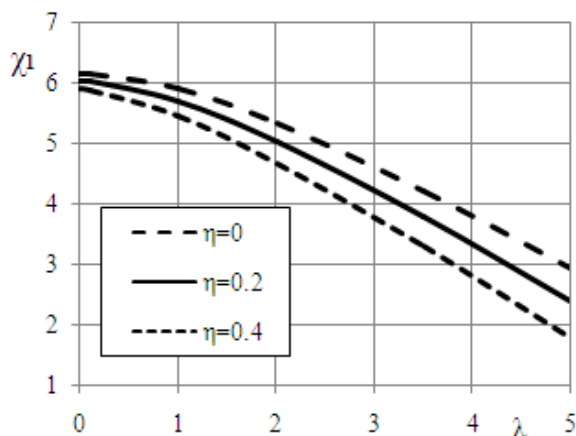


Рис. 4

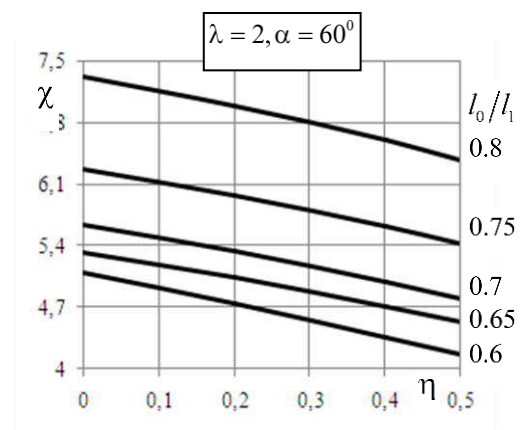


Рис. 5

Анализ результатов, приведенных на рис. 1 и рис. 3 линий уровня, приводит к выводу, что внешнее давление и сжимающее осевое усилие понижает устойчивость оболочки при кручении, а также внешнее давление и крутящий момент понижают устойчивость оболочки при ее сжатии.

Кроме того, для расчетных физических и геометрических данных найдено количество волн в окружном направлении, соответствующее критическим нагрузкам. Для $\alpha = 75^\circ$ оно изменяется от 10 до 12, для $\alpha = 60^\circ$ – от 16 до 19, для $\alpha = 45^\circ$ – от 20 до 23. Таким образом, уменьшение угла конусности приводит к увеличению числа волн в окружном направлении.

Поскольку линии уровня на рис. 2 построены для безразмерных усилий, сопоставляя результаты, полученные для разных углов конусности, можно заметить, что соответствующие линии уровня находятся друг от друга на расстоянии, равном вычислительному отклонению, составляющему менее 3%. Таким образом, можно

утверждать, что угол конусности не существенно влияет на безразмерные критические нагрузки в рассмотренном диапазоне геометрических параметров оболочки.

Для оболочек с разной длиной образующей на рис. 5 приведены линии уровня поверхности устойчивости. Наибольшая длина образующей рассчитанной оболочки соответствует $l_0/l_1 = 0.6$. Анализируя полученные результаты, приходим к выводу, что увеличение длины образующей приводит к снижению устойчивости, а также к уменьшению числа волн в окружном направлении.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена задача устойчивости конической оболочки при комбинированном нагружении всесторонним внешним давлением, осевым сжатием и крутящим моментом. Выведено обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции прогиба. Решение получено с помощью гибридного асимптотического метода ВКБ-Галеркина, который базируется на использовании классического метода возмущений ВКБ в сочетании с принципом определения искусственных неизвестных коэффициентов в асимптотических разложениях с помощью условия ортогональности Галеркина. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных этим методом, с результатами, полученными асимптотическим ВКБ методом и методом конечных разностей. Выявлено преимущество гибридного метода.

Построены линии уровня поверхности устойчивости, полученные указанными методами, для разных углов конусности и длин образующих конуса.

Сделан вывод, что уменьшение угла конусности приводит к увеличению числа волн в окружном направлении и к увеличению тангенса угла наклона волны к образующей. При этом, угол конусности не существенно влияет на безразмерные критические нагрузки в рассмотренном диапазоне геометрических параметров оболочки.

Увеличение длины образующей приводит к снижению устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Об устойчивости тонкостенных конических оболочек кругового сечения при кручении парами. *Сборник научных трудов КАИ*. Казань: Изд-во Казанского авиационного ин-та, 1935. С. 39–40.
2. Seide P. A. A survey of buckling theory and experiment for circular conical shells of constant thickness. *NASSA Technical Note*, D-1510, 1962. P. 401–426.
3. Саченков А. В. Об устойчивости круговой конической оболочки при совместном действии нагрузок. *Исследования по теории пластин и оболочек*. Казань: Изд-во Казанского ун-та. 1964. № 2. С. 57–70.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Москва: Наука, 1967. 984 с.
5. Алумяэ Н. А. Теория упругих оболочек и пластинок. *Механика в СССР за 50 лет*. Т. 3. Москва: Наука, 1972. С. 227–266.
6. Преображенский И. Н., Грищак В. З. Устойчивость и колебания конических оболочек. Москва: Машиностроение, 1986. 240 с.
7. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. Москва: Наука, 1978. 260 с.
8. Gristchak V. Z., Dimitrijeva E. M. A Hybrid WRB-Galerkin Method and its Using to Applied Mechanics Problems *The scientific journal FACTA UNIVERSITATIS*. Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics. 1998. Vol. 2, No 8. P. 709–713.
9. Литвинов В. В., Андреев В. И., Чепурненко А.С. Устойчивость усеченной круговой конической оболочки при осевом сжатии. *Вестник МГСУ. Проектирование и конструирование строительных систем. Проблемы механики в строительстве*. 2012. № 10. С. 95–101.

10. Прокопало Е. Ф., Сиволоб О. А. Експериментальне дослідження стійкості конічних оболонки з круговими отворами. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2012. Вип. 19. С. 261–270.
11. Фрёман Н., Фрёман П. У. ВКБ-приближение. Москва: Мир, 1967. 166 с.
12. Geer J. F., Andersen C. M. A hybrid perturbation - Galerkin technique with application to slender body theory. *SIAM J. Appl. Mech.* Vol. 49. 1989. P. 344–361.
13. Gristchak V. Z., Lysenko V. V. A hybrid asymptotic WKB-Galerkin method with application to the correlation analysis of stochastic behaviour of non-linear systems with time-dependend parameters. *Proceedings of the 3rd ND-KhPI2010 International Conference on Nonlinear Dynamics*. September 21–24, 2010, Kharkov, Ukraine. P. 290–295.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1971. 576 с.

REFERENSES

1. Mushtari, Kh. M. (1935). On the stability of thin-walled conic shells of circular cross section with torsion in pairs. Collection of scientific works of KAI. Kazan: Publishing house of the Kazan Aviation Institute, pp. 39–40.
2. Seide, P. A. (1962). A survey of buckling theory and experiment for circular conical shells of constant thickness. NASSA Technical Note, D-1510, pp. 401–426.
3. Sachenkov, A. V. (1964). On the stability of a circular conical shell under the joint action of loads. Studies on the theory of plates and shells. Kazan: Publishing house of Kazan University. No. 2, pp. 57–70.
4. Volmir, A. S. (1967). Stability of deformable systems. Moscow: Nauka.
5. Alomyae, N. A. (1972). The theory of elastic shells and plates. Mechanics in the USSR for 50 years, Vol. 3. Moscow: Nauka, pp. 227–266.
6. Preobrazhensky, I. N. & Grishak, V. Z. (1986). Stability and oscillations of conical shells. Moscow: Mashinostroenie.
7. Grigolyuk, E. I. & Kabanov, V. V. (1978). Stability of shells. Moscow: Nauka.
8. Gristchak, V. Z., & Dimitrijeva, E. M. (1998). A Hybrid WRB-Galerkin Method and its Using to Applied Mechanics Problems The scientific journal FACTA UNIVERSITATIS. Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol. 2, No. 8, pp. 709–713.
9. Litvinov, V. V., Andreev, V. I. & Chepurenko, A. S. (2012). Stability of a truncated circular conical shell under axial compression. Bulletin of MGSU. Design and construction of building systems. Problems of mechanics in construction, No. 10, pp. 95–101.
10. Prokopalo E. F. & Sivolob O. A. (2012). Experimentalnoe doslozhenzhennia stійkosti konichnyh shells in the circular gaps. Problems obkshchlyulvalnoye mehaniki i micostnosity konstrukciy. Iss. 19, pp. 261-270.
11. Freeman, N. & Freeman, P. U. (1967). WKB-approximation. Moscow: Mir.
12. Geer, J. F. & Andersen, C. M. (1989). A hybrid perturbation - Galerkin technique with application to slender body theory. *SIAM J. Appl. Mech.*, Vol. 49, pp. 344–361.
13. Gristchak, V. Z. & Lysenko, V. V. (2010). A hybrid asymptotic WKB-Galerkin method with application to the correlation analysis of stochastic behaviour of non-linear systems with time-dependend parameters. *Proceedings of the 3rd ND-KhPI2010 International Conference on Nonlinear Dynamics*. September 21–24, Kharkov, Ukraine, pp. 290–295.
14. Kamke, E. (1971). Handbook of ordinary differential equations. Moscow: Nauka.