4. Silvano, Martello & Paolo, Toth. (1990). 4 Subset-sum problem. Knapsack problems: Algorithms and computer interpretations. Wiley-Interscience, 1990.
5. Hans Kellerer, Ulrich Pferschy & David Pisinger (2004). Knapsack problems. Springer. P. 97.
6. Holland, J.H. (1992). Adaptation in Natural and Artificial Systems. Boston, MA: MIT Press.
7. Kureychik, V.M. (1999). Genetic algorithms. Condition. Problems. Prospects. Proceedings RAN. TiSU, No.1, pp. 144-160.
8. Dorigo, M. (1992). Optimization, Learning, and Natural Algorithms. PhD Thesis, Dipartimento di Elettronica, Politechnico Di Milano, Italy.
9. Shtovba, S.D. (2005). Ant algorithms: theory and application. Programming, No. 4, pp. 1-16.
10. Kozin, I.V., Perepelitsa, V.A. & Maksishko, N.K. (2017). Fragmentary structures in problems of discrete optimization. Cybernetics and systems analysis, No. 6, pp. 125-131.

УДК 517.983.27 DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-04

КЕРУВАННЯ СИСТЕМОЮ «РЕЗЕРВУАР – РІДИНА» ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ НА ОСНОВІ ЕТАЛОННОЇ МОДЕЛІ

[1]Константінов О. В., к. ф.-м. н., [1]Новицький В. В., д. ф.-м. н., [2]Святовець І. Ф.

[1]*Інститут математики НАН України,*
вул. Терещенківська, 3, м. Київ-4, 01601, Україна

[2]*Запорізька державна інженерна академія,*
просп. Соборний, 226, м. Запоріжжя, 69006, Україна

akonst.im@ukr.net, v.novytskyy@gmail.com, sv.irina0702@gmail.com

Досліджено задачу побудови керування для забезпечення руху за заданим законом механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності постійних збурень – коливань вільної поверхні рідини. Дослідження проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 36 форм коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Дослідження проводилося на основі методу модальної декомпозиції з урахуванням коливань на власних частотах усіх форм. Програмне керування системою побудовано на основі моделі твердого тіла із «затверділою» рідиною. Керування зі зворотним зв'язком будується аналітично на основі трьох підходів: модального принципу, порівняння з еталонною моделлю та мінімізації квадратичного функціонала. Керування зі зворотним зв'язком побудовано на основі лінійної системи у збуреннях, при цьому фазовими координатами є відхилення від програмного закону руху. Перетворення системи у канонічну відносно фазових координат форму дозволило значно спростити аналітичну процедуру побудови керування на основі модального підходу або співставлення з еталонною системою. Для шуканого класу систем отримані також в аналітичному вигляді формули для коефіцієнтів квадратичного функціоналу якості. Ці коефіцієнти можуть бути обрані у такий спосіб, щоб керування забезпечило одночасно необхідну якість перехідних процесів у системі та мінімум квадратичного функціонала. Для перевірки якості побудованого керування була розв'язана задача розгону резервуара із нерухомого положення за заданий час до необхідної швидкості і забезпечення в подальшому його рівномірного руху з цією швидкістю. Результати чисельних експериментів підтверджують доцільність використання лінійної системи у збуреннях як моделі для побудови керування зі зворотним зв'язком для складної нелінійної системи.

Ключові слова: резервуар з рідиною з вільною поверхнею, зворотний зв'язок, модальне керування, еталонна модель, квадратичний функціонал.

FEEDBACK CONTROL OF SYSTEM «RESERVOIR – LIQUID WITH A FREE SURFACE» BASED ON ETALON MODEL

[1]Konstantinov O., [1]Novytskyy V., [2]Svyatovets I.

[1]*Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Tereschenkivska str., 3, Kiev-4, 301601, Ukraine*

[2]*Zaporizhzhya State Engineering Academy, Soborny ave., 226, Zaporizhzhya, 69006, Ukraine*

The problem of the construction of control for the motion of a "reservoir – a free surface liquid" in the presence of constant perturbations, the oscillations of the free surface of the liquid, has been investigated. The research was carried out on the basis of a nonlinear multimode (up to 36 forms of oscillations) of a discrete model, which is based on the variational principle of Hamilton-Ostrogradsky. The research was carried out on the basis of the method of modal decomposition, taking into account the oscillations on the eigenfrequencies of all forms. The system's software management is based on a solid-state solid-state model with a "hardened" liquid. Feedback management is based analytically on the basis of three approaches: the modal principle, comparison with the reference model and minimization of the quadratic functional. The feedback control is based on the linear system in disturbances, with phase coordinates being a deviation from the software law of motion. The transformation of the system into a canonical form relative to phase coordinates has made it possible to significantly simplify the analytical procedure for constructing control based on the modal approach or comparison with the reference system. For the desired class of systems, formulas for coefficients of a quadratic quality functional are also obtained in an analytic form. These coefficients can be chosen in such a way that the management provides at the same time the necessary quality of transients in the system and the minimum of the quadratic functionality. To verify the quality of the built control, the task of dispersing the tank from a stationary position at a given time to the required speed and ensuring subsequently its uniform motion with this speed was solved. The results of numerical experiments confirm the expediency of using a linear system in disturbances as a model for constructing feedback control for a complex nonlinear system.

Key words: tank with liquid with a free surface, feedback, modal control, reference model, quadratic functional.

ВСТУП

Інженерні конструкції, що містять у своєму складі резервуари, частково заповнені рідиною, широко використовуються у різних галузях техніки. Резервуари з рідиною є невід'ємною складовою частиною космічних апаратів з рідинним ракетним двигуном, літаків, гелікоптерів, нафтосховищ та реакторів, що використовуються у хімічній та нафтохімічній промисловості. Останнім часом поширюється інтерес до задач динаміки та керування обмеженими об'ємами рідини у зв'язку з проблемами транспортування та збереження у складних умовах дії вібраційних, імпульсних, сейсмічних, вітрових та інших навантажень. З практики відомо, що баки з рідиною у літаках, танкерах, залізничних та автомобільних цистернах суттєво впливають на стійкість та якість керування транспортними засобами.

Проблемам керування рухомими об'єктами, які містять маси рідини з вільною поверхнею, зокрема ракетами-носіями та супутниками, присвячені роботи [1, 3, 4, 7, 12]. У них розглядались задачі побудови автомату стабілізації на основі лінійної моделі динаміки системи та апарата теорії передавальних функцій. У колективній монографії [13] розглядались задачі керування обертанням твердого тіла, яке має порожнину, частково заповнену ідеальною або в'язкою рідиною, на основі лінеаризованих моделей.

У роботі розглянуто один з підходів до побудови керування механічною системою «резервуар – рідина з вільною поверхнею» для забезпечення заданого закону руху. Поведінка системи розглядається на основі нелінійної багатомодової (12 форм коливань) моделі [6], яка описує сумісний рух резервуара та рідини під впливом керуючих сил. Використана модель побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

Для забезпечення мети керування спочатку будується так зване програмне керування, яке обчислюється для резервуара із «затверділою» рідиною за відсутності будь-яких збурень у системі [5]. Оскільки збурення у системі – коливання вільної поверхні рідини – присутні, то на другому етапі будується керування зі зворотним зв'язком за збуреннями [2, 5, 8-11]. Керування зі зворотним зв'язком будується на основі лінійної моделі з використанням фазових змінних – переміщення та швидкості резервуару і амплітуди та швидкості вільної поверхні рідини. На основі методу, розробленого у роботах В. В. Новицького [8-11], система у збуреннях трансформується у форму, канонічну відносно фазових координат. Використовуючи канонічну форму, для системи у збуреннях послідовно будується керування зі зворотним зв'язком на основі модального принципу (вибір необхідного спектра системи), еталонної моделі (забезпечення відповідності до характеристик системи із заданими властивостями) та мінімізації квадратичного функціонала (вибір якого обумовлений заданими властивостями перехідних процесів).

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ «РЕЗЕРВУАР – РІДИНА З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ»

Розглянемо циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Відповідно до методики роботи О. С. Лимарченко [6], математична модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» будується на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського

$$\delta I = 0, \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

при цьому функція Лагранжа задається у класичному вигляді Гамільтона-Остроградського як різниця між кінетичною та потенціальною енергією системи

$$L = \frac{1}{2}\rho\int_{\tau}\left(\vec{\nabla}\varphi + \dot{\vec{\varepsilon}}\right)^2 d\tau + \frac{1}{2}M_T\left(\dot{\vec{\varepsilon}}\right)^2 - \left(M_T + M_F\right)g\varepsilon_z - \frac{1}{2}\rho g\int_S\left(\xi^2 - H^2\right)dS + \vec{F}\cdot\vec{\varepsilon},$$

де ρ – щільність рідини; τ – область, яку займає рідина; $d\tau = rdrd\theta dz$ – циліндричні координати, при цьому вісь Oz має напрямок, протилежний напрямку вектора прискорення вільного падіння $\vec{g}$, а система координат пов'язана з нерухомим резервуаром; $\vec{\nabla} = \vec{i}_1\frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{i}_3\frac{\partial}{\partial z}$; φ – потенціал швидкостей рідини; ξ – збурення вільної поверхні рідини; S – поперечний переріз циліндричного резервуара; M_T та M_F – маса резервуара та рідини відповідно; $\vec{\varepsilon} = \left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\right)$ – вектор переміщення резервуара в поступальному русі; $\vec{F}$ – головний вектор зовнішніх сил, які діють на резервуар, відносно точки O.

Для ефективного застосування варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського поставлено задачу ввести у розгляд мінімальну кількість незалежних змінних, що описують рух резервуара з рідиною, тобто фактично будуються розклади шуканих змінних, які задовольняють наперед усі кінематичні граничні умови. Оскільки безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини відповідно до теореми Лагранжа повністю визначається рухом її границь, то збурення вільної поверхні рідини ξ та радіус-вектор $\vec{\varepsilon}\left(t\right)$ повністю характеризують рух самої рідини, і тому потенціал швидкостей φ потрібно вважати залежною змінною.

Відповідно до методики роботи [6], розклади шуканих змінних представимо у вигляді

$$\xi\left(r,\theta,t\right) = \sum_i a_i\left(t\right)\psi_i\left(r,\theta\right), \quad \varphi = \sum_i b_i\left(t\right)\varphi_i\left(r,\theta,z\right),$$

де $a_i\left(t\right)$ – амплітуди форм коливань збуреної вільної поверхні рідини ξ. Системи функцій ψ_i і $\varphi_i=\psi_i\dfrac{\cosh\kappa_i\left(z+H\right)}{\kappa_i\sinh\kappa_i H}$ є розв’язком лінійної спектральної задачі [6] та мають вигляд

$$\psi_n\left(r,\theta\right)=J_n\left(\frac{\kappa_n^{(m)}}{R}r\right)\sin\left(n\theta\right)\cos\left(n\theta\right),\ n=0,1,2,...;\ m=1,2,...$$

У роботі [6] розроблено метод виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, який дозволяє отримати дискретну модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» мінімальної розмірності. На основі розробленого методу, варіаційних методів математичної фізики та асимптотичних методів нелінійної механіки у роботі [7] побудована математична модель, яка дозволяє дослідити поступальні та кутові рухи механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового та моментного) збудження. Ця модель являє собою систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщень центру незбуреної вільної поверхні рідини відносно деякої нерухомої системи відліку:

$$\sum_i\ddot{a}_i\cdot\left\{\beta_{ri}^q+\sum_j a_j\gamma_{ij}^q+\sum_{i,j}a_ia_j\delta_{rijk}^q\right\}+\ddot{\vec{\varepsilon}}\cdot\left\{\vec{B}_r^1+\sum_i a_i\vec{B}_{ri}^2+\sum_{i,j}a_ia_j\vec{B}_{rij}^3+\sum_{i,j,k}a_ia_ja_k\vec{B}_{rijk}^4\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\dot{a}_i\dot{a}_j\left(\gamma_{ijr}^q-\gamma_{rij}^q\right)+\sum_{i,j,k}\dot{a}_i\dot{a}_ja_k\left(\delta_{ijkr}^q-2\delta_{rijk}^q\right)-\frac{1}{2}g\alpha_r^s-\alpha_r^p\dot{a}_r-gN_ra_r+$$

$$+\dot{\vec{\varepsilon}}\cdot\left\{\vec{B}_r^1+\sum_i a_i\left(\vec{B}_{ir}^2-\vec{B}_{ri}^2\right)+\sum_{i,j}\dot{a}_ia_j2\left(\vec{B}_{ijr}^3-\vec{B}_{rij}^3\right)+\sum_{i,j,k}\dot{a}_ia_ja_k3\left(\vec{B}_{ijkr}^4-\vec{B}_{rijk}^4\right)\right\},\qquad(1)$$

$$\rho\left\{\sum_i\ddot{a}_i\left[\vec{B}_i^1+\sum_{i,j}a_j\vec{B}_{i,j}^2+\sum_{i,j,k}a_ja_k\vec{B}_{ijk}^3\right]\right\}+\left(M_T+M_F\right)\ddot{\vec{\varepsilon}}=$$

$$=\vec{F}-\left(M_T+M_F\right)g\vec{k}-\rho\left\{\sum_{i,j}\dot{a}_i\dot{a}_j\vec{B}_{ij}^2+\sum_{i,j,k}\dot{a}_i\dot{a}_ja_k\vec{B}_{ijk}^3\right\}.\qquad(2)$$

Система (1)-(2) містить $N+3$ рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) та описує динаміку сумісного руху резервуара та рідини при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового) збудження. Рівняння (1) описують динаміку амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) – динаміку резервуара, однак ці рівняння взаємозв’язані та містять сили взаємодії між компонентами механічної системи.

Сукупність коефіцієнтів, які входять до системи рівнянь (1)-(2), у рамках прийнятої моделі визначає властивості механічної системи, яка розглядається, та особливості прояву в ній внутрішніх лінійних та нелінійних механізмів взаємодії. Ці коефіцієнти визначаються через квадратури від розв’язку крайової задачі з визначення форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому коефіцієнти β_{ir}^q, γ_{ijr}^q, δ_{ijkr}^q, α_r^s, N_r відповідають випадку коливань рідини у нерухомому резервуарі, а коефіцієнти $\vec{B}_r^1$, $\vec{B}_{ri}^2$, $\vec{B}_{rij}^3$, $\vec{B}_{rijk}^4$ відображають взаємозв’язок коливань рідини та поступального руху резервуара.

ПОБУДОВА КЕРУВАННЯ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ НА ОСНОВІ МОДАЛЬНОГО ПРИНЦИПУ

Якщо зовнішня сила $\vec{F} = \left(F_x, F_y, F_z\right)$, яка діє на систему «резервуар – рідина з вільною поверхнею», має за мету здійснення необхідного закону руху або мінімізацію заданого функціонала, то таку силу прийнято називати керуванням. У даній роботі поставлено задачу побудови керування F_y, яке б забезпечувало програмний рух резервуара з рідиною у напрямку Oy за заданим законом $\dot{\varepsilon}_y = f\left(t\right)$, $\varepsilon_y = \int f\left(t\right)dt$. При цьому закон руху рідини задається відповідно до моделі «затверділої» рідини, тобто збурення вільної поверхні рідини повинні бути відсутні $\xi\left(t\right) = \dot{\xi}\left(t\right) = 0$. Тоді програмне керування F_{PR} будується відповідно до другого закону Ньютона та має вигляд $F_{PR} = \left(M_T + M_F\right)\ddot{\varepsilon}_y$. Однак оскільки у системі присутні збурення – збурення початкових умов параметрів руху ε_y, $\dot{\varepsilon}_y$, ξ, $\dot{\xi}$ та коливання вільної поверхні рідини, введемо у систему лінійне керування із зворотним зв'язком F_{BK} та постійними коефіцієнтами підсилення $l_i, i = 1..4$ у вигляді $F_{BK} = \sum_{i=1}^{4} l_i x_i$, яке корегуватиме існуючі похибки – відхилення наявних значень параметрів руху від заданих програмних значень

$$x_1 = \xi\left(t\right), \quad x_2 = \dot{\xi}\left(t\right), \quad x_3 = \varepsilon_y - \int f\left(t\right)dt, \quad x_4 = \dot{\varepsilon}_y - f\left(t\right).$$

Отже, повне керування, яке діє на систему, має вигляд

$$F_y = F_{PR} + F_{BK} = \left(M_T + M_F\right)\ddot{\varepsilon}_y - \sum_{i=1}^{4} l_i x_i ,$$

де коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку мають позитивні значення $l_i \geq 0, i = 1..4,$ а сам зворотний зв'язок є негативним для забезпечення стійкості системи керування.

Керування зі зворотним зв'язком побудуємо на основі лінеаризованної системи рівнянь руху (1)-(2), в якій буде враховано коливання вільної поверхні рідини $\xi(t)$ по першій антисиметричній формі a_1 з можливістю горизонтального переміщення резервуара по горизонтальній координаті ε_y. Відповідні рівняння мають вигляд

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y}\ddot{\varepsilon}_y + gN_1 a_1 = 0, \quad \rho B_1^{1y}\ddot{a}_1 + \left(M_T + M_F\right)\ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

або, з урахуванням позначень, $\nu_1 = \dfrac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\nu_2 = \rho B_1^{1y}$, частота першої антисиметричної форми $\omega_1^2 = \dfrac{gN_1}{\beta_{11}^q}$, можуть бути представлені як

$$\ddot{a}_1 + \nu_1\ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0, \quad \nu_2\ddot{a}_1 + M\ddot{\varepsilon}_y = F_y. \tag{3}$$

Введемо також позначення для фазових змінних $x_1 = a_1\left(t\right)$, $x_2 = \dot{a}_1\left(t\right)$, $x_3 = \varepsilon_y - \int f\left(t\right)dt$, $x_4 = \dot{\varepsilon}_y - f\left(t\right)$, $u = F_{BK}$ та приведемо систему диференціальних рівнянь (3) до нормальної форми Коші

$$\dot{x} = Fx + Gu, \tag{4}$$

де x – вектор фазових змінних $\left[x_1, x_2, x_3, x_4\right]^T$, u – керування, а матриця F та вектор G мають вигляд

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

з позначеннями $\lambda_1 = -\dfrac{M\omega_1^2}{M - \nu_1\nu_2}$, $\lambda_2 = \dfrac{\nu_2\omega_1^2}{M - \nu_1\nu_2}$, $\beta_1 = -\dfrac{\nu_1}{M - \nu_1\nu_2}$, $\beta_2 = \dfrac{1}{M - \nu_1\nu_2}$. У системі (4) фазові змінні $\left[x_1, x_2, x_3, x_4\right]$ мають сенс збурень, тобто відхилень дійсних значень параметрів руху системи від програмних.

Побудоване керування зі зворотним зв’язком повинне забезпечити асимптотичну стійкість руху системи у збуреннях. Для його побудови будемо використовувати метод, розроблений В. В. Новицьким [8-11]: рівняння системи у збуреннях (7) послідовно перетворюються у форму, канонічну за керуванням, потім у канонічну форму Гессенберга і, нарешті, у канонічну форму Фробеніуса.

Оскільки у системі (4) вектор керування має розмірність 1, після перетворення система (4) у формі, канонічній за керуванням, повинна мати вигляд

$$\dot{y} = Ay + Bu, B = \left[0\,0\,0\,1\right]^T. \tag{6}$$

Відповідно до [11] побудуємо неособливе перетворення $y = Tx$, де пряма та обернена матриця перетворення T мають вигляд

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{\beta_1}{\beta_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\beta_2} \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи перетворення T до системи (4), тобто

$$A = TFT^{-1}, \quad B = TG,$$

отримаємо вирази для A та B у системі (6) у формі, канонічній щодо керування

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \beta_1 \\ \lambda_1 - \dfrac{\beta_1\lambda_2}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ \dfrac{\lambda_2}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

 ISSN 2518-1785 (Online), ISSN 2413-6549 (Print)

Другим етапом буде зведення системи (6) до канонічної форми Гессенберга. Матриці A та B у канонічній формі Гессенберга матимуть вигляд

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

тобто матриця A матиме нижньотрикутну форму, а вектор B після перетворень залишається незмінним. Відповідно до методу [11], перехід матриці A системи (6) буде виглядати як серія неособливих перетворень $A^{(i)}=R^{(i)}A^{(i-1)}R^{(i)-1}$, $i=1..4$, при цьому $A^{(0)}=A$. Введемо позначення $\gamma_1=\lambda_1-\dfrac{\beta_1\lambda_2}{\beta_2}$, $\gamma_2=\dfrac{\lambda_2}{\beta_2}$ для відповідних елементів матриці A, тоді система (6) у канонічній формі Гессенберга має вигляд

$$\dot{y}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2\beta_1\gamma_1 & 0 & \gamma_2\beta_1 & 0 \end{bmatrix} y+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Третім етапом буде зведення системи (6) до канонічної форми Фробеніуса. Матриці A та B у канонічній формі Фробеніуса будуть мати вигляд

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

тобто у матриці A тільки у нижньому рядку можуть бути довільні значення, а вектор B після перетворень знову залишається незмінним. Як і на другому етапі, відповідно до методу [11], перехід матриці A системи (6) до канонічної форми Фробеніуса буде виглядати як серія неособливих перетворень $A^{(i)}=R^{(i)}A^{(i-1)}R^{(i)-1}$, $i=1..4$. З урахуванням $\gamma_1=\lambda_1-\dfrac{\beta_1\lambda_2}{\beta_2}$, $\gamma_2=\dfrac{\lambda_2}{\beta_2}$ система (6) у канонічній формі Фробеніуса має вигляд

$$\dot{y}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} y+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \tag{7}$$

Перемноження всіх матриць перетворень, які послідовно дозволяють перейти від початкової системи (4) до канонічної відносно фазових координат (тобто канонічної щодо керування та по Фробеніусу) системи (7), дає можливість отримати пряму та обернену матрицю для такої трансформації

$$\tilde{T}=\begin{bmatrix} -\frac{\beta_2}{\beta_1(\beta_1\lambda_2-\beta_2\lambda_1)} & 0 & \frac{1}{\beta_1(\beta_1\lambda_2-\beta_2\lambda_1)} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_2}{\beta_1(\beta_1\lambda_2-\beta_2\lambda_1)} & 0 & \frac{1}{\beta_1(\beta_1\lambda_2-\beta_2\lambda_1)} \\ \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{T}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_1\lambda_2-\beta_2\lambda_1 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_1\lambda_2-\beta_2\lambda_1 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

У систему (7) підключимо зворотний зв’язок $u=-\sum_i k_i y_i$ та отримаємо рівняння замкненої системи

$$\dot{y}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \lambda_1-k_3 & -k_4 \end{bmatrix} y. \tag{9}$$

Необхідно знайти значення коефіцієнтів k_i зворотного зв’язку, які б забезпечили асимптотичну стійкість замкненої системи (9). Як відомо [2, 11], коефіцієнтами характеристичного полінома матриці у формі Фробеніуса є елементи нижнього рядка, тому характеристичний поліном системи (9) має вигляд

$$f(z)=z^4+k_4z^3+(k_3-\lambda_1)z^2+k_2z+k_1. \tag{10}$$

Для забезпечення асимптотичної стійкості системи (9) необхідно, щоб корені характеристичного полінома були дійсними негативними числами [2, 11]. Скористаємося для цього модальним принципом керування, тобто будемо задавати властивості замкненої системи через завдання значень коренів характеристичного полінома, а потім знайдемо значення коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв’язку. Задаємо значення коренів характеристичного полінома $\mu_i, i=1..4,$ і отримуємо відповідний вигляд характеристичного полінома

$$f(z)=z^4+(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4)z^3+(\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_1\mu_4+\mu_2\mu_3+\mu_2\mu_4+\mu_3\mu_4)z^2+$$
$$+(\mu_1\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2\mu_4+\mu_1\mu_3\mu_4+\mu_2\mu_3\mu_4)z+\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4.$$

Порівнюючи значення коефіцієнтів характеристичного полінома шуканої (4) та канонічної (9) систем, отримаємо значення коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв’язку в явному вигляді

$$k_1=\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4, \quad k_2=\mu_1\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2\mu_4+\mu_1\mu_3\mu_4+\mu_2\mu_3\mu_4,$$

$$k_3=\lambda_1+\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_1\mu_4+\mu_2\mu_3+\mu_2\mu_4+\mu_3\mu_4, \quad k_4=\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4.$$

Визначаючи значення коренів характеристичного полінома, а, значить, і коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку, можна завдавати якість перехідних процесів у замкненій системі керування. Якщо задані корені характеристичного полінома є негативними дійсними числами або комплексними числами із негативною дійсною частиною, то система буде асимптотично стійкою [2, 11].

Оскільки координатне перетворення $y = Tx$ є неособливим, воно не змінює спектральні характеристики шуканої системи (4), а, значить, характеристичні поліноми замкненої шуканої системи (4) та канонічної системи (9) співпадають. Звідси можна визначити коефіцієнти підсилення l_i зворотного зв'язку у шуканій системі (4) на основі знання коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку у канонічній системі (9) у вигляді

$$l_1 = k_3 - \frac{\beta_2 k_1}{(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)\beta_1}, \quad l_2 = k_4 - \frac{\beta_2 k_2}{(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)\beta_1},$$

$$l_3 = \frac{k_1}{\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1}, \quad l_4 = \frac{k_2}{\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1} \tag{11}$$

та отримати замкнену систему керування (4), яка відповідає заданим вимогам, у вигляді

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 - \beta_1 l_1 & -\beta_1 l_2 & -\beta_1 l_3 & -\beta_1 l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 - \beta_2 l_1 & -\beta_2 l_2 & -\beta_1 l_3 & -\beta_1 l_4 \end{bmatrix} x.$$

ПОБУДОВА КЕРУВАННЯ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ НА ОСНОВІ ЕТАЛОННОЇ МОДЕЛІ

Вибір коренів характеристичного полінома (10) повинен забезпечувати не тільки стійкість системи керування (зокрема, асимптотичну), але й підтримувати на необхідному рівні якість перехідних процесів, що відбуваються в системі. Для осягнення цієї мети пропонується спочатку задати параметри еталонного руху (або еталонної системи), тобто рівень перерегулювання, тривалість переходних процесів, декремент згасання, а потім на основі отриманої інформації задати корені (або коефіцієнти) характеристичного полінома шуканої системи та обчислити коефіцієнти зворотного зв'язку [5].

Запишемо рівняння еталонної системи у вигляді

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & \upsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_5 & 0 & \lambda_4 & \upsilon_4 \end{bmatrix} y, \tag{12}$$

де параметри λ_3, υ_3, λ_4, υ_4 будемо завдавати, виходячи з міркувань тривалості та якості перехідного процесу (аперіодичний процес, наявність коливань тощо). Перетворимо еталонну систему в канонічну форму Фробеніуса

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_3\lambda_4 & -\lambda_3\upsilon_4 - \lambda_4\upsilon_3 & -\upsilon_3\upsilon_4 + \lambda_3 + \lambda_4 & \upsilon_3 + \upsilon_4 \end{bmatrix} Y,$$

тоді характеристичний поліном еталонної системи має вигляд

$$f(z) = z^4 + (-\upsilon_3 - \upsilon_4) z^3 + (\upsilon_3\upsilon_4 - \lambda_3 - \lambda_4) z^2 + (\lambda_3\upsilon_4 + \lambda_4\upsilon_3) z + \lambda_3\lambda_4 .$$

Зробимо співставлення коефіцієнтів характеристичних поліномів системи у канонічній формі (10) та еталонної системи (12) та отримаємо такі співвідношення

$$k_1 = -\upsilon_3 - \upsilon_4, \quad k_2 = \upsilon_3\upsilon_4 - \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_1, \quad k_3 = \lambda_3\upsilon_4 + \lambda_4\upsilon_3, \quad k_4 = \lambda_3\lambda_4,$$

а далі, після підстановки у формули (11), обчислюємо коефіцієнти зворотного зв'язку в шуканій системі.

ПОБУДОВА КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦІОНАЛА ЯКОСТІ

Розглянемо задачу визначення оптимального керування системи в збуреннях (4)-(5), коли критерій оптимальності заданий у вигляді квадратичного функціонала якості

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + \nu u^2 \right) dt, \tag{13}$$

де $\nu > 0$, Q – діагональна матриця, а квадратична форма $x^T Q x = \sum_{i=1}^{4} q_i x_i^2 \geq 0$ при будь-якому x, тобто є невід'ємно визначеною. Як відомо з робіт [2, 11], оптимальне керування є лінійною функцією фазових координат

$$u = -\left(1/\nu \right) G^T P x,$$

де симетрична постійна матриця P є розв'язком нелінійного алгебраїчного рівняння Ріккаті

$$-PF - F^T P + \left(1/\nu \right) P G G^T P = Q,$$

а оптимальному керуванню відповідає рішення, що задовольняє критерію Сільвестра, тобто головні мінори матриці P повинні бути більше нуля або дорівнювати нулю. Отже, для довільно заданих параметрів q_i в матриці Q оптимальне керування може не існувати, оскільки розв'язок P нелінійного алгебраїчного рівняння Ріккаті може не задовольняти критерію Сильвестра.

Розглянемо обернену задачу синтезу квадратичного критерію якості (13) для побудови оптимального керування в системі у збуреннях (4)-(5). Для цього побудуємо таку матрицю Q в критерії (13), що оптимальне керування завжди буде існувати і задовольняти необхідним додатковим критеріям.

Систему у збуреннях (4)-(5) будемо використовувати у канонічній відносно фазових змінних формі (6)-(7), тоді функціонал якості (13) за допомогою перетворення $x = \widetilde{T} y$, $y = \widetilde{T}^{-1} x$ буде мати вигляд $J = \int_0^\infty \left(y^T C y + \nu u^2 \right) dt$, де

$$C = \left(\widetilde{T}^{-1} \right)^T Q \widetilde{T}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)^2 q_3 & 0 & (\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)\beta_2 q_3 & 0 \\ 0 & (\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)^2 q_4 & 0 & (\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)\beta_2 q_4 \\ (\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)^2 q_3 & 0 & \beta_1^2 q_1 + \beta_2^2 q_3 & 0 \\ 0 & (\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)^2 q_4 & 0 & \beta_1^2 q_2 + \beta_2^2 q_4 \end{bmatrix}.$$

Рівняння Ріккаті для трансформованої системи та функціонала якості бути виглядати як

$$-SA - A^T S + \left(1/\nu\right) SBB^T S = C\,, \tag{14}$$

де S – розв’язок рівняння – симетрична матриця такої структури

$$S = \begin{bmatrix} s_5 & s_8 & s_9 & s_1 \\ s_8 & s_6 & s_{10} & s_2 \\ s_9 & s_{10} & s_7 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix}.$$

Оптимальне керування, побудоване на основі розв’язку рівняння Ріккаті S, має вигляд

$$u = -\sum_i k_i y_i = -\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} s_i y_i\,,$$

тобто залежить тільки від компонентів $s_i, i = 1..4$. Компоненти $s_i, i = 1..4$ будемо знаходити на основі співставлення з еталонною моделлю, а всі інші повинні мати такі значення, щоб матриця Q у функціоналі (13) була невід’ємно-визначеною. У розгорнутому вигляді матричне рівняння (14) має вигляд

$$\left(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1\right)^2 q_3 = \frac{s_1^2}{\nu}, \quad \beta_1^2 q_1 + \beta_2^2 q_3 = -2\lambda_1 s_3 - 2s_{10} + \frac{s_3^2}{\nu}, \quad \left(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1\right)\beta_2 q_3 = -s_1\lambda_1 - s_8 - \frac{s_1 s_3}{\nu},$$

$$\left(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1\right)^2 q_4 = -2s_8 + \frac{s_2^2}{\nu}, \quad \beta_1^2 q_2 + \beta_2^2 q_4 = -2s_3 + \frac{s_4^2}{\nu}, \quad \left(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1\right)\beta_2 q_4 = -s_1 - s_{10} - \frac{s_2 s_4}{\nu},$$

$$\frac{s_1 s_2}{\nu} - s_5 = 0\,, \quad \frac{s_1 s_4}{\nu} - s_9 = 0\,, \quad \frac{s_2 s_3}{\nu} - \lambda_1 s_2 - s_6 - s_9 = 0\,, \quad \frac{s_3 s_4}{\nu} - \lambda_1 s_4 - s_2 - s_7 = 0\,,$$

тобто розпадається на три незалежні системи, із розв’язку останньої знаходимо компоненти s_5, s_6, s_7, s_9

$$s_5 = \frac{s_1 s_2}{\nu}, \quad s_6 = \frac{s_2 s_3 - s_1 s_4 - \nu\lambda_1 s_2}{\nu}, \quad s_7 = \frac{s_3 s_4 - \nu s_2 - \nu\lambda_1 s_4}{\nu}, \quad s_9 = \frac{s_1 s_4}{\nu},$$

а розв’язок перших двох дає залежність компонентів матриці функціонала Q від параметрів s_8, s_{10} у вигляді $q_i = f\left(s_8, s_{10}\right)$ (символьні формули не наведені через їхню громіздкість).

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Розглядається круговий циліндричний резервуар з вертикальною поздовжньою віссю Oz, який здійснює поступальний рух у горизонтальній площині вздовж осі Oy за рахунок дії керуючої сили (керування). Резервуар радіуса $R = 1$ м та маси M_T частково заповнений водою з масою M_F до глибини $H = R$. Система рівнянь (1)-(2) зводиться чисельно до нормальної форми Коші, а потім чисельно інтегрується за допомогою стандартного методу Рунге-Кутта. При дослідженні динаміки системи резервуар – рідина у розкладах утримувалося $n_1 = n_2 = 12$ координатних функцій з точністю до квадратів амплітуд і $n_3 = 6$ з точністю до кубічних членів. Координатні функції розміщено у порядку зростання відповідних їм власних частот за винятком ψ_6 – другої осесиметричної форми. Крок чисельного інтегрування обирався $\Delta t = 0{,}1\pi\omega_{12}$ с, де ω_{12} – найвища власна частота у системі.

Розглянемо випадок, коли необхідно за допомогою керування $u = F_y$ забезпечити резервуару з рідиною спочатку набір швидкості від 0 до 5 *м/с* за 10 сек, а потім рівномірний рух з досягнутою швидкістю 5 *м/с* («комфортний» рух). Для набору швидкості на резервуар діє програмне керування F_{PR} – прямокутний імпульс сили тривалістю 10 сек, який забезпечує рух резервуара з прискоренням 2 $м/с^2$. Значення параметрів $\lambda_3 = -30$, $\upsilon_3 = -13$, $\lambda_4 = -2$, $\upsilon_4 = -3$ в еталонній системі (12) повинні забезпечити дисипацію перехідних процесів за аперіодичним законом на інтервалі часу до 5 сек. Відповідно до наведеної вище методики обчислюємо коефіцієнти підсилення у системі зворотного зв'язку $l_1 = -56156{,}3$, $l_2 = -13240{,}3$, $l_3 = 7329{,}2$, $l_4 = 14169{,}9$.

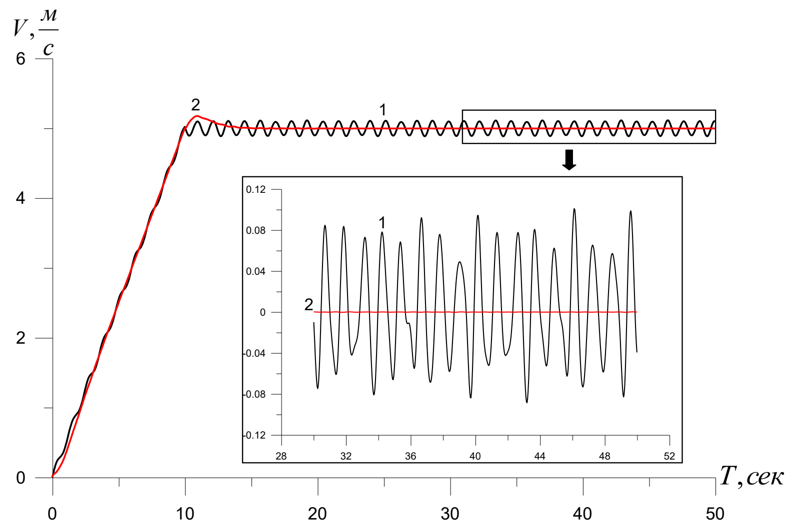

Рис. 1. Графік швидкості резервуара

На рис. 1 показані результати моделювання: 1) система з рідиною рухається за відсутності зворотного зв'язку (крива 1); 2) система з рідиною рухається за наявності зворотного зв'язку (крива 2). Прямокутним на основному графіку відмічений інтервал часу від 30 до 50 секунд і окремо показаний у збільшеному масштабі. Як видно з графіків, підключення до системи зворотного зв'язку забезпечує прийнятне наближення до шуканого програмного руху.

ВИСНОВКИ

Досліджено задачу побудови керування для забезпечення руху за заданим законом механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності постійних збурень – коливань вільної поверхні рідини. Програмне керування системою побудовано на основі моделі твердого тіла із «затверділою» рідиною. Керування зі зворотним зв'язком будується аналітично на основі трьох підходів: модального принципу, порівняння з еталонною моделлю та мінімізації квадратичного функціонала. Результати чисельних експериментів підтверджують доцільність використання лінійної системи у збуреннях як моделі для побудови керування зі зворотним зв'язком для складної нелінійної системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Абгарян К. А., Рапопорт И. М. Динамика ракет. Москва: Машиностроение, 1969. 378 с.

2. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. Москва: Наука, 1976. 424 с.

3. Колесников К. С. Жидкостная ракета как объект регулирования. Москва: Машиностроение, 1969. 298 с.

4. Колесников К. С. Динамика ракет. Москва: Машиностроение, 1980. 376 с.

5. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. Москва: Наука, 1988. 328 с.

6. Лимарченко О. С., Ясинский В. В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. Киев: НТТУ КПИ, 1997. 338 с.

7. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Москва: Машиностроение, 1968. 532 с.

8. Новицкий В. В. Модальное управление механическими системами. *Вопросы устойчивости и управления навигационных систем*. Киев: Институт математики АН УССР, 1988. С. 70–75.

9. Новицкий В. В. Декомпозиция линейных систем и модальное управление. Киев: Институт математики АН УССР, 1990. 27 с. (Препринт Инст-т математики АН УССР).

10. Новицкий В. В. Обобщение метода модальной декомпозиции на нестационарные системы. *Устойчивость и управление в механических системах*. Киев: Институт математики НАН Украины, 1988. С. 36–42.

11. Новицький В. В. Декомпозиція та керування в лінійних системах. Київ: Інститут математики НАН України, 2008. 252 с.

12. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. Москва: Машиностроение, 1975. 416 с.

13. Gurchenkov A., Nosov M., Tsurkov V. Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies. CRC Press, 2013. 160 p.

REFERENCES

1. Abgaryan, K.A. & Rapoport, I.M. (1969). Rocket dynamics. Moskow: Mashinostroenie.

2. Andreev, Yu.N. (1976). Finite-dimensional objects control. Moskow: Nauka.

3. Kolesnikov, K.S. (1969). Liquid rocket as control object. Moskow: Mashinostroenie.

4. Kolesnikov, K.S. (1980). Rocket dynamics. Moskow: Mashinostroenie.

5. Krut'ko, P.D. (1988). Inverse problems of the dynamics of controllable systems. Nonlinear models. Moskow: Nauka.

6. Limarchenko, O.S. & Yasinskiy, V.V. (1997). Nonlinear dynamics of structures with liquid with free surface. Kiev: KPI.

7. Mikishev, G.N. & Rabinovich, B.I. (1968). Dynamics of a solid body with cavities partially filled with a liquid. Moskow: Mashinostroenie.

8. Novytskyy, V.V. (1988). Modal control of mechanic systems. Pratsi In-tu matematyki NAN Uktainy, pp. 70-75.

9. Novytskyy, V.V. (1990). Linear systems decomposition and modal control. Pratsi In-tu matematyki NAN Uktainy, 27 p. (Preprint).

10. Novytskyy, V.V. (1988). A generalization of the modal decomposition method for non-stationary systems. Pratsi In-tu matematyki NAN Uktainy, pp. 36-42.

11. Novytskyy, V.V. (2008). Decomposition and control in the linear systems. Kiev: Institute of mathematics of NAS of Ukraine.

12. Rabinovich, B.I. (1975). Introduction to the dynamics of rocket carriers of space vehicles. Moskow: Mashinostroenie.

13. Gurchenkov, A., Nosov, M. & Tsurkov, V. (2013). Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies. CRC Press.