

7. Latifov, F. S. & Cafarova, I. T. (2005). Asymptotic investigations of eigen vibrations of medium-filled cylindrical shells sellaaityb by annular ribs. Sciences of Azerbaijan Transactions of Academy. Series of physical-technical and mathematical sciences, X, No. 4, pp. 135-140.
8. Akhundov, M. B. & Guliyev, R. S. (1997). Propagation of impact wave in damaged hereditary elastic cylindrical body. Trudy IMM AN Azerbaijan, Vol. IV(XIV), pp. 208-212.
9. Akhundov, M. B., Suvorova, Yu. V. & Sadykhov, F. M. (1994). Propagation of stress and strain waves in piecewise homogeneous bar of finite length with regard to material damageability. Izvestiya RAN, MTT, No. 5, pp. 113-120.
10. Volmir, A. S. (1979). Shells in fluid and gas flow. Moscow: Nauka.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-07

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО БИМАТЕРИАЛА С ВКЛЮЧЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Криворучко А. Г., аспирант, Шевелёва А. Е., д. ф.-м. н., доцент,
Лобода В. В., д. ф.-м. н., профессор

*Днепро́вский национальный университет имени Олеса Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49000, Украина*

93anna.kr@gmail.com

Рассмотрена антиплоская задача для включения (электрода) на границе раздела пьезоэлектроматнитных материалов. Получены формулы для нахождения скачка компонент тензора напряжений и векторов электрической и магнитной индукции. Найдены аналитические выражения для определения значений компонент на верхнем и нижнем берегах электрода. Для различных значений электрического и магнитного потоков, направленных параллельно включению, проиллюстрировано поведение электромагнитно-механических факторов по длине электрода.

Ключевые слова: пьезоэлектроматнитный материал, включение, антиплоская задача.

АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО БІМАТЕРІАЛУ З ВКЛЮЧЕННЯМ НА МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

Криворучко А. Г., аспірант, Шевельова А. Є., д. ф.-м. н., доцент,
Лобода В. В., д. ф.-м. н., професор

*Дніпро́вський національний університет імені Олеса Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49000, Україна*

93anna.kr@gmail.com

Розглянуто антиплоску задачу для включення (электрода) на межі поділу п'єзоелектроматнітних матеріалів. Вважається, що електрод є абсолютно жорстким і до того ж електричний і магнітний потенціали на ньому дорівнюють нулю. Припускається також, що на віддаленні від електрода задані зсувна деформація і електричне та магнітне поля, які паралельні до поверхні електрода. З використанням методу комплексних потенціалів отримані представлення механічних, електричних та магнітних факторів через кусково-аналітичні вектор-функції, з використанням яких сформульовано векторну задачу лінійного спряження з відповідними умовами на нескінченості. Точний розв'язок цієї задачі представлено в аналітичному вигляді. На його основі отримано формули для знаходження стрибка компонент тензора напружень і векторів електричної та магнітної індукції при переході через електрод. Знайдені також аналітичні вирази для знаходження значень вказаних компонент на верхньому та нижньому берегах електрода. Показано, що дотичне напруження і компоненти векторів електричної та магнітної індукції мають кореневу особливість при підході до кінців електрода. Проведена чисельна ілюстрація

отриманого розв'язку. Використана конкретна пара п'єзоелектромагнітних матеріалів, а також вибрані різні значення віддалених електричного та магнітного потоків, направлених паралельно включенню. Отримані графіки зміни дотичного напруження і магнітної індукції вздовж електрода, а також розподіл магнітного поля на продовженні електрода.

Ключові слова: п'єзоелектромагнітний матеріал, включення, антиплоска задача.

AN ANTIPLANE PROBLEM FOR PIEZOELECTROMAGNETIC BIMATERIAL WITH INCLUSION AT THE INTERFACE

Kryvoruchko A. G., Sheveleva A. E., Loboda V. V.

*Oles Honchar Dnipro National University,
Gagarin ave., 72, Dnipro, 49000, Ukraine*

93anna.kr@gmail.com

The antiplane problem for inclusion (electrode) on the interface between piezoelectromagnetic materials is considered. It is assumed that the electrode is absolutely rigid and in addition, the electric and magnetic potentials on its faces are zero. It is also assumed that the shear deformation and electric and magnetic fields that are parallel to the surface of the electrode are prescribed at the far distance from the electrode. Using the method of complex potentials, we obtain presentations of mechanical, electrical and magnetic factors through the piecewise-analytic vector functions. Due to these presentations the vector problem of linear relationship with the corresponding conditions on infinity is formulated. The exact solution of this problem is presented in an analytical form. On its basis, we obtain the formulas for finding the jump of the shear stress tensor component and also the vectors of electrical and magnetic induction when passing through the electrode. Also the analytical expressions for the values of these components on the upper and lower faces of the electrode are found. It is shown that the shear stress and components of the vectors of electrical and magnetic induction have a root singularity when approaching the ends of the electrode. Numerical illustration of the obtained solution is carried out. A specific pair of piezoelectromagnetic materials was used, and various values of remote electric and magnetic fluxes parallel to the inclusion were selected. The graphs of the variation of the shear stress and magnetic induction along the electrode and also the distribution of the magnetic field on the continuation of the electrode are obtained.

Key words: piezoelectromagnetic material, inclusion, antiplane problem.

ВВЕДЕНИЕ

В современной микроэлектронике широко используются материалы класса пьезоэлектромагнетиков. Нередко они встречаются и в комбинации с другими материалами, образуя композиты. Проблема изучения включений в изотропных и анизотропных материалах, в том числе на границе раздела сред, детально освещена в фундаментальной монографии [1]. Анализу внутренних и межфазных включений в электрически активных материалах посвящены работы [2-8]. Что же касается пьезоэлектромагнитных материалов, то проблема изучения включений, в том числе электродов, на границе раздела таких материалов является важной, но недостаточно изученной из-за ее сложности.

В ряде случаев характер напряженно-деформированного состояния, которое возникает в пьезоэлектромагнитном композите, соответствует антиплоскому НДС. В таких случаях общие уравнения существенно упрощаются и зачастую удается получить аналитические решения поставленных задач. Для трещины между двумя материалами такая задача исследована в [9]. Случай же абсолютно жесткого электрода на границе раздела пьезоэлектромагнитных материалов в сочетании с различными типами граничных условий на берегах электрода ранее не изучался, и он как раз и исследуется в данной работе.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЭММ (ПЬЕЗОЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО МАТЕРИАЛА) В АНТИПЛОСКОМ СЛУЧАЕ

В случае ПЭММ взаимосвязь между основными электромеханическими характеристиками задается соотношениями [10]

$$\sigma_{ij} = c_{ijks} \varepsilon_{ks} - e_{sij} E_s - h_{sij} H_s, \quad D_i = e_{iks} \varepsilon_{ks} + \alpha_{is} E_s + d_{is} H_s, \quad B_i = h_{iks} \varepsilon_{ks} + d_{is} E_s + \gamma_{is} H_s,$$

где σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; D_i , B_i – компоненты векторов электрической и магнитной индукций; E_i , H_i – напряженности электрического и магнитного полей, c_{ijks} – упругие константы, e_{iks} – пьезоэлектрические, h_{iks} – пьезомагнитные, d_{is} – электромагнитные, α_{is}, γ_{is} – диэлектрические и магнитные проницаемости.

Уравнения равновесия в отсутствии массовых сил и свободных зарядов таковы:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad B_{i,i} = 0.$$

Выражения для деформаций, напряженностей электрического и магнитного полей имеют вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\varphi_{,i}, \quad H_i = -\psi_{,i},$$

где u_i – компоненты вектора перемещения, φ , ψ – электрический и магнитный потенциалы.

В антиплоском случае считаем

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u_3(x_1, x_2), \quad \varphi = \varphi(x_1, x_2), \quad \psi = \psi(x_1, x_2).$$

Тогда определяющие соотношения принимают вид:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{3i} \\ D_i \\ B_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44} & -e_{15} & -h_{15} \\ e_{15} & \alpha_{11} & d_{11} \\ h_{15} & d_{11} & \gamma_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3,i} \\ -\varphi_{,i} \\ -\psi_{,i} \end{Bmatrix},$$

где $i = 1, 2$. Это соотношение можно записать так:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{3i} \\ D_i \\ B_i \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} u_{3,i} \\ \varphi_{,i} \\ \psi_{,i} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} & h_{15} \\ e_{15} & -\alpha_{11} & -d_{11} \\ h_{15} & -d_{11} & -\gamma_{11} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{u} = [u_3, \varphi, \psi]^T, \quad \mathbf{t} = [\sigma_{32}, D_2, B_2]^T, \quad \mathbf{S} = [\sigma_{31}, D_1, B_1]^T, \quad (3)$$

уравнение (1) можем записать в виде

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}\mathbf{u}_{,2}. \quad (4)$$

Функции u_3 , φ и ψ удовлетворяют уравнениям $\Delta u_3 = 0$, $\Delta \varphi = 0$, $\Delta \psi = 0$, т. е. они гармонические. Поэтому представим их как действительные части некоторых аналитических функций

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}(z) + \bar{\mathbf{\Phi}}(\bar{z}), \quad (5)$$

где $\Phi(z) = [\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z)]^T$ – произвольная аналитическая вектор-функция комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$.

Подставляя (5) в (4), получаем:

$$t = iR\Phi'(z) + \overline{iR\Phi'(z)}. \quad (6)$$

Обозначая $B = iR$, получаем:

$$t = B\Phi'(z) + \overline{B\Phi'(z)} = B\Phi'(z) + \bar{B}\bar{\Phi}'(\bar{z}). \quad (7)$$

БИМАТЕРИАЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Предположим, что плоскость (x_1, x_2) составлена из двух полуплоскостей $x_2 > 0$ и $x_2 < 0$. На оси x_1 могут быть участки сцепления, проскальзывания, полного расслоения и т.д. Тогда для областей $x_2 > 0$ и $x_2 < 0$ будут справедливы представления (5), (7), которые в данном случае примут вид

$$u^{(m)} = \Phi^{(m)}(z) + \bar{\Phi}^{(m)}(\bar{z}), \quad t^{(m)} = B^{(m)}\Phi^{(m)}(z) + \bar{B}^{(m)}\bar{\Phi}^{(m)}(\bar{z}), \quad (8)$$

где $m=1$ для области 1 и $m=2$ для области 2; $B^{(m)}$ – матрицы B для областей 1 и 2 соответственно; $\Phi^{(m)}(z)$ – произвольные вектор-функции, аналитичные в областях 1 и 2 соответственно.

Потребуем, чтобы равенство $u^{(1)} = u^{(2)}$ выполнялось по всей оси x_1 . Тогда получаем:

$$\Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) = \Phi^{(2)}(x_1 - i0) + \bar{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0). \quad (9)$$

Уравнение (9) перепишем в виде:

$$\Phi^{(1)}(x_1 + i0) - \bar{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0) = \Phi^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0).$$

Левую и правую части последнего уравнения можно рассматривать как граничные значения функций

$$\Phi^{(1)}(z) - \bar{\Phi}^{(2)}(z) \quad \text{и} \quad \Phi^{(2)}(z) - \bar{\Phi}^{(1)}(z), \quad (10)$$

которые аналитичны в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Но тогда существует функция $M(z)$, которая равна указанным функциям в каждой полуплоскости и аналитична во всей плоскости.

Предполагая, что $M(z)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, на основании теоремы Лиувилля получаем, что каждая из функций (10) равна 0 для любого z из соответствующей полуплоскости. Отсюда получаем:

$$\bar{\Phi}^{(2)}(z) = \Phi^{(1)}(z) \quad \text{для} \quad x_2 > 0, \quad (11)$$

$$\bar{\Phi}^{(1)}(z) = \Phi^{(2)}(z) \quad \text{для} \quad x_2 < 0. \quad (12)$$

Найдем теперь скачек вектор-функции:

$$\langle t(x_1) \rangle = t^{(1)}(x_1 + i0) - t^{(2)}(x_1 - i0) \quad (13)$$

при переходе через интерфейс. Находя из второй формулы (8):

$$t^{(m)}(z) = B^{(m)}\Phi^{(m)}(z) + \bar{B}^{(m)}\bar{\Phi}^{(m)}(\bar{z}) \quad (14)$$

или

$$t^{(m)}(x_1 \pm i0) = \mathbf{B}^{(m)} \Phi^{(m)}(x_1 \pm i0) + \overline{\mathbf{B}}^{(m)} \overline{\Phi}^{(m)}(x_1 \mp i0),$$

и подставляя в (13), получаем:

$$\langle t(x_1) \rangle = \mathbf{B}^{(1)} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \overline{\mathbf{B}}^{(1)} \overline{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) - \mathbf{B}^{(2)} \Phi^{(2)}(x_1 - i0) - \overline{\mathbf{B}}^{(2)} \overline{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0).$$

Подставляя (11) и (12) при $y \rightarrow +0$ в последнюю формулу, получаем:

$$\langle t(x_1) \rangle = \mathbf{B}^{(1)} \overline{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0) + \overline{\mathbf{B}}^{(1)} \overline{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) - \mathbf{B}^{(2)} \overline{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) - \overline{\mathbf{B}}^{(2)} \overline{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0)$$

или

$$\langle t(x_1) \rangle = (\mathbf{B}^{(1)} - \overline{\mathbf{B}}^{(2)}) \cdot \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + (\overline{\mathbf{B}}^{(1)} - \mathbf{B}^{(2)}) \overline{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0).$$

Введем новую функцию

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} \mathbf{D} \Phi^{(1)}(z), & x_2 > 0 \\ -\overline{\mathbf{D}} \overline{\Phi}^{(1)}(z), & x_2 < 0 \end{cases}, \quad (15)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{(1)} - \overline{\mathbf{B}}^{(2)}$.

Тогда

$$\langle t(x_1, 0) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (16)$$

$$\mathbf{u}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G} \mathbf{W}^+(x_1) - \overline{\mathbf{G}} \mathbf{W}^-(x_1), \quad (17)$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{D}^{-1}$.

АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИЙ НЕПОДВИЖНЫЙ ЭЛЕКТРОД НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ПЬЕЗОЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Предположим, что на границе раздела пьезоэлектромагнитных материалов на участке $(-a, a)$ есть абсолютно жесткий неподвижный электрод, на котором электрическое и магнитное поля равны нулю (рис. 1). Т.е. на нем вектор $\mathbf{u}^{(1)}(x_1, 0) = 0$. Считаем также, что на бесконечности заданы компоненты вектора $\mathbf{u} = [u_3, \varphi, \psi]^T$.

Таким образом, граничные условия на интерфейсе имеют вид:

$$u_3^\pm = 0; \quad \varphi^\pm = 0; \quad \psi^\pm = 0 \quad \text{при } |x_1| < a, \quad (18)$$

$$\langle \sigma_{32} \rangle = 0, \quad \langle D_2 \rangle = 0, \quad \langle B_2 \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_{31} \rangle = 0, \quad \langle E_1 \rangle = 0, \quad \langle H_1 \rangle = 0 \quad \text{для } x_1 > a, \quad (19)$$

где $\langle \cdot \rangle$ – скачек функций при переходе через ось x_1 .

Для $x_1 \notin (-a, a)$ имеем $\langle t(x_1, 0) \rangle = 0$, поэтому вектор-функция $\mathbf{W}(z)$ из выражений (16), (17) аналитична во всей плоскости, кроме отрезка интерфейса $(-a, a)$.

Поскольку $\overline{\mathbf{G}} = -\mathbf{G}$, то

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{G} \{ \mathbf{W}^+(x_1) + \mathbf{W}^-(x_1) \}. \quad (20)$$

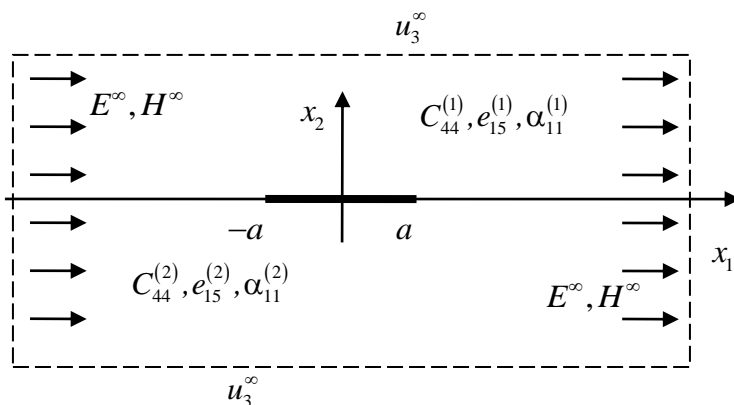


Рис. 1. Абсолютно жесткий электрод между двумя пьезоэлектромагнитными материалами

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Из удовлетворения условиям (18) с помощью соотношения (20) получаем:

$$\mathbf{W}^+ + \mathbf{W}^- = 0 \text{ на } (-a, a). \tag{21}$$

Учитывая, что для $x_1 \notin (-a, a)$ имеем $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1)$, а $\mathbf{W}(x_1)|_{x_1 \rightarrow \infty} = \mathbf{W}(z)|_{z \rightarrow \infty}$, из (20) получаем следующие соотношения для определения поведения вектор-функции $\mathbf{W}(z)$ на бесконечности:

$$\mathbf{W}(z)|_{z \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{u}'^\infty, \text{ где } \mathbf{u}'^\infty = [u_3'^\infty, -E_1^\infty, -H_1^\infty], \tag{22}$$

где E_1^∞, H_1^∞ – электрический и магнитный потоки, которые пронизывают всю область параллельно включению. $u_3'^\infty = \alpha = const$ означает поворот биматериала вокруг оси x_2 на угол α . Такая деформация равноценна повороту жесткого электрода в неподвижном биматериальном пространстве вокруг оси x_2 на угол $-\alpha$.

Решение задачи (21) при условии на бесконечности (22) имеет вид [11]:

$$\mathbf{W}(z) = \frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{u}'^\infty \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \tag{23}$$

При этом очевидно, что $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{D}$.

Подставляя (23) в (20), получаем:

$$\mathbf{u}'^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{u}'^\infty \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \text{ для } x_1 \notin (-a, a).$$

Учитывая, что $\mathbf{W}^-(x_1) = -\mathbf{W}^+(x_1)$, для $x_1 \in [-a, a]$, из соотношений (16), (22) получаем:

$$\langle \mathbf{t}(x_1) \rangle = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{u}'^\infty \frac{x_1}{i\sqrt{a^2 - x_1^2}} \text{ для } x_1 \in [-a, a]. \tag{24}$$

Поскольку $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{D}$, а матрица \mathbf{D} чисто мнимая, то последнюю формулу можно записать так:

$$\langle \mathbf{t}(x_1) \rangle = \mathbf{R} \frac{x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} \text{ для } x_1 \in [-a, a], \mathbf{R} = \text{Im}(\mathbf{D}) \mathbf{u}'^\infty. \tag{25}$$

Представляет интерес нахождение не только скачка $\langle t(x_1) \rangle$, но и значений этой функции на верхнем и нижнем берегах электрода. Для этого воспользуемся формулой (14), которую для $m=1$ и $z=x_1+i0$ можно записать так:

$$t^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{B}^{(1)} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0). \quad (26)$$

Но из (15) имеем:

$$\Phi^{(1)}(x_1 + i0) = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}(x_1 + i0),$$

$$\bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) = -\bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{W}(x_1 - i0).$$

Подставляя последние соотношения в (26), получаем:

$$t^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}(x_1 + i0) - \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{W}(x_1 - i0). \quad (27)$$

Очевидно, что $t^{(2)}(x_1, 0)$ находится по формуле

$$t^{(2)}(x_1, 0) = t^{(1)}(x_1, 0) - \langle t(x_1) \rangle.$$

Следует также отметить, что на основании (23):

$$\mathbf{W}(x_1 \pm i0) = \pm 0.5 \mathbf{G}^{-1} \mathbf{u}^{\infty} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}.$$

Сравнивая с формулой (24), видим, что $\mathbf{W}(x_1 \pm i0) = \pm 0.5 \langle t(x_1) \rangle$.

Подставляя в формулу (27) и учитывая, что $\mathbf{G} = \mathbf{D}^{-1}$, получаем:

$$t^{(1)}(x_1, 0) = 0.5 (\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{D}^{-1} + \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{D}}^{-1}) \langle t(x_1) \rangle = 0.5 (\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{G} + \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{G}}) \langle t(x_1) \rangle$$

или

$$t^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{K} \langle t(x_1) \rangle,$$

где $\mathbf{K} = 0.5 (\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{G} + \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{G}})$.

С учетом (25) формулу для $t^{(1)}(x_1, 0)$ можно записать так:

$$t^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{Q} \frac{x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}, \quad (28)$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{K} \mathbf{R}$, а векторы $\langle t(x_1) \rangle$ и $t^{(2)}(x_1, 0)$ выражаются формулами

$$\langle t(x_1) \rangle = \mathbf{K}^{-1} t^{(1)}(x_1, 0), \quad t_2(x_1, 0) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1}) t^{(1)}(x_1, 0), \quad (29)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ И ИХ АНАЛИЗ

Для численной реализации полученных результатов выбирались материалы со следующими характеристиками:

$$c_{44}^{(1)} = 35,3 \text{ ГПа}, e_{15}^{(1)} = 17,0 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}, \alpha_{11}^{(1)} = 15,1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}}, d_{11}^{(1)} = 0, h_{15}^{(1)} = 165 \frac{\text{В}}{\text{а м}},$$

$$\gamma_{11}^{(1)} = 180,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В} \cdot \text{с}^2}{\text{Кл}^2}, c_{44}^{(2)} = 42,47 \text{ ГПа}, e_{15}^{(2)} = -0,48 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}, \alpha_{11}^{(2)} = 0,0757 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}}, d_{11}^{(2)} = 0,$$

$$h_{15}^{(2)} = 385 \frac{\text{В}}{\text{а м}}, \gamma_{11}^{(2)} = 414,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В} \cdot \text{с}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Результаты расчетов компонент вектора $t^{(1)}(x_1, 0)$, проведенных при $a = 10 \text{ мм}$, представлены на рис. 2 и 3. Результаты расчета третьей компоненты вектора $u^{(1)}(x_1, 0)$ при этом же значении a приведены на рис. 4. Значения заданных на бесконечности электрического и магнитного полей E_1^∞ и H_1^∞ задавались равными $0,1 \cdot 10^7 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ и $1,0 \cdot 10^2 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ – кривые 1, $0,2 \cdot 10^7 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ и $2,0 \cdot 10^2 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ – кривые 2, $0,3 \cdot 10^7 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ и $3,0 \cdot 10^2 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ – кривые 3. Значения же u_3^∞ задавались равными нулю для всех трех кривых, так как основной целью было исследование влияния электрических и магнитных факторов на характеристики полей вблизи включения.

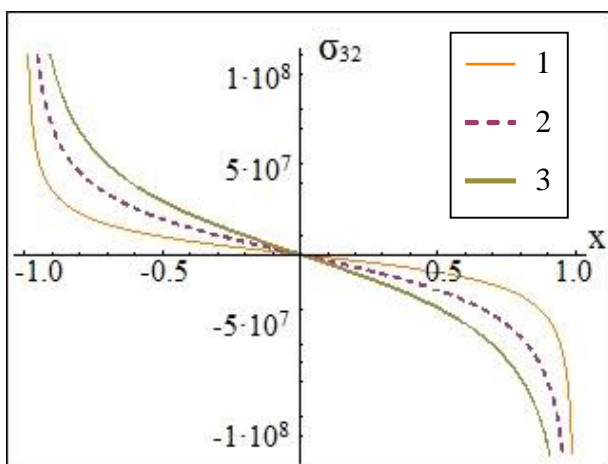


Рис. 2. Изменение касательного напряжения на верхнем берегу электрода

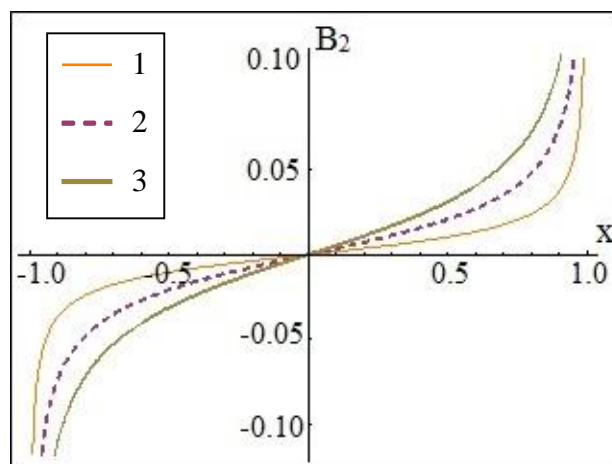


Рис. 3. Изменение нормальной компоненты вектора магнитной индукции на верхнем берегу электрода

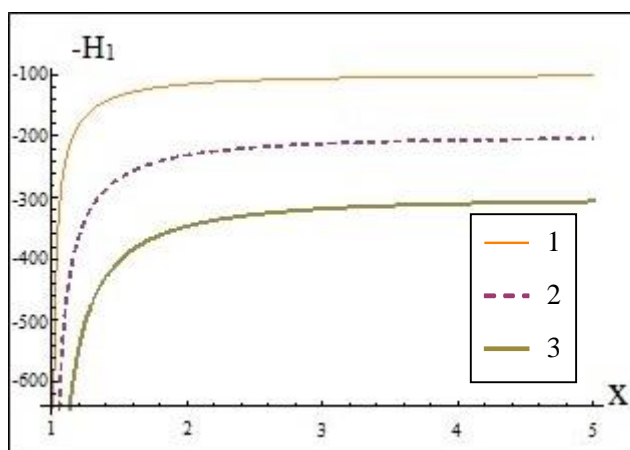


Рис. 4. Изменение $-H_1$ справа от электрода на границе раздела материалов

Графики изменения компонент скачков $\langle t(x_1) \rangle$ и значений исследуемых величин на нижнем берегу включения $t^{(2)}(x_1, 0)$ здесь не приводятся, т. к. они могут быть легко найдены по формулам (29), а их поведение качественно является близким к изменению соответствующих факторов на рис. 2 и 3.

Из рис. 2 и 3 очевидно существенное влияние интенсивности электрического и магнитного полей на напряжение и магнитную индукцию вдоль области включения, а из рис. 4 очевидно их влияние на $-H_1$ справа от включения на границе раздела материалов.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена антиплоская задача для пьезоэлектромагнитного материала с абсолютно жестким неподвижным электродом в области раздела материалов. Сформулированы представления (14), (18) для механических, электрических и магнитных факторов через одну вектор-функцию, которая аналитична в каждой полуплоскости и на участках интерфейса. С помощью этих представлений формулируется задача линейного сопряжения для абсолютно жесткого неподвижного электрода на линии раздела материалов, на котором электрическое и магнитное поля равны нулю. Построено точное решение этой задачи.

Для конкретной пары материалов построены графики зависимостей напряжений, магнитной индукции и $-H_1$ от интенсивности внешних электрического и магнитного полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями: монографія. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 715 с.
2. Liang J., Han J. C., Du S. Y. Rigid line inclusions and cracks in anisotropic piezoelectric solids. *Mech Res Commu.* 1995. Vol. 22, Issue 1. P. 43–49.
3. Chen S. W. Rigid line inclusions under antiplane deformation and inplane electric field in piezoelectric materials. *Engng Fract Mech.* 1997. Vol. 56, Issue 2. P. 265–274.
4. Deng W., Meguid S. A. Analysis of Conducting Rigid Inclusion at the Interface of Two Dissimilar Piezoelectric Materials. *J. Appl. Mech.* 1998. Vol. 65(1). P. 76–84.
5. Gao C., Fan W. An Interface Inclusion between Two Dissimilar Piezoelectric Materials. *Applied Mathematics and Mechanics.* 2001. Vol. 22, Issue 1. P. 96–104.
6. Wang X., Shen Y. Exact solution for mixed boundary value problems at anisotropic piezoelectric bimaterial interface and unification of various interface defects. *International Journal of Solids and Structures.* 2002. Vol. 39, Issue 6. P. 1591–1619.
7. Eskandari M., Moeini-Ardakani S. S., Shodja H. M. Axisymmetric contact of a rigid inclusion embedded at the interface of a piezoelectric biomaterial. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics.* 2009. Vol. 62, Issue 3. P. 281–295.
8. Wang X., Schiavone P. Debonded arc-shaped interface conducting rigid line inclusions in piezoelectric composites. *Comptes Rendus Mecanique.* 2017. Vol. 345, Issue 10. P. 724–731.
9. Loboda V., Kryvoruchko A., Lapusta Y. Antiplane problem for an interface crack in a piezoelectromagnetic biomaterial. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка».* 2015. Вип. 19, Т. 2. С. 106–117.
10. Sih G. C., Song Z. F. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃–CoFe₂O₄ composite. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* 2003. 39. P. 209–227.
11. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.

REFERENCES

1. Sulym, G. T. (2007). Bases of mathematical theory of thermoelastic equilibrium of deformable solids with thin inclusions. Lviv: Research and Publishing Center of NTSh.
2. Liang, J., Han, J. C. & Du, S. Y. (1995) Rigid line inclusions and cracks in anisotropic piezoelectric solids. *Mech Res Commu*, Vol. 22, Issue 1, pp. 43–49.
3. Chen, S. W. (1997). Rigid line inclusions under antiplane deformation and inplane electric field in piezoelectric materials. *Engng Fract Mech.*, Vol. 56, Issue 2, pp. 265–274.
4. Deng, W. & Meguid, S. A. (1998). Analysis of Conducting Rigid Inclusion at the Interface of Two Dissimilar Piezoelectric Materials. *J. Appl. Mech.*, Vol. 65(1), pp. 76–84.

5. Gao, C. & Fan, W. (2001). An Interface Inclusion between Two Dissimilar Piezoelectric Materials. Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 22, Issue 1, pp. 96–104.
6. Wang, X. & Shen, Y. (2002). Exact solution for mixed boundary value problems at anisotropic piezoelectric bimaterial interface and unification of various interface defects. International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, Issue 6, pp. 1591–1619.
7. Eskandari, M., Moeini-Ardakani, S. S. & Shodja, H. M. (2009). Axisymmetric contact of a rigid inclusion embedded at the interface of a piezoelectric biomaterial. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 62, Issue 3, pp. 281–295.
8. Wang, X. & Schiavone, P. (2017). Debonded arc-shaped interface conducting rigid line inclusions in piezoelectric composites. Comptes Rendus Mecanique, Vol. 345, Issue 10, pp. 724–731.
9. Loboda, V., Kryvoruchko, A. & Lapusta, Y. (2015). Antiplane problem for an interface crack in a piezoelectromagnetic biomaterial. Visnyk Dnipropetrovskogo universitetu. Seriya «Mechanica», Issue 19, T. 2, pp. 106–117.
10. Sih, G. C. & Song, Z. F. (2003). Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃-CoFe₂O₄ composite. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 39, pp. 209–227.
11. Muskhelishvili, N. I. (1966). Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Moscow: Nauka.

УДК 533.63,534.23

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-08

ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ ВVI-ШУМА ПРИ САМОЛЁТНОЙ ПОСАДКЕ ВЕРТОЛЁТА

Лукьянов П. В., ст. науч. сотрудник

*Национальная академия наук Украины, Институт гидромеханики,
ул. Желябова, 8/4, г. Киев, 03680, Украина*

petr_lukianov@bigmir.net

В данной работе в рамках модели аэроакустики поставлена и численно решена задача генерации ВVI-шума *sin-sin* лопастью «Blue-edge» в режиме самолётной посадки. Рассмотренный диапазон чисел Маха $0,05 < M < 0,1$ показал повышенный по сравнению с диапазоном $0,2 < M < 0,4$ уровень генерируемого шума. В частности, были замечены локальные зоны концентрации акустического шума, трансформируемые в вибрации, при этом происходит концентрация энергии колебаний на отдельных участках лопасти: в них амплитуды в 10–20 раз превышают амплитуды остального фонового шума лопасти. Решение задачи в рамках модели аэроакустики позволило для малых чисел Маха обнаружить области зарождения вибраций. Появление вибраций в полёте на пониженных скоростях приводит к крайне неблагоприятному явлению – флаттеру лопасти.

Ключевые слова: генерация ВVI-шума, вибрации, самолётная посадка, флаттер лопасти.

ОСОБЛИВОСТІ ГЕНЕРАЦІЇ ВVI-ШУМУ ПРИ ПОСАДЦІ ГЕЛІКОПТЕРА ПОДІБНО ЛІТАКУ

Лук'янов П. В., ст. наук. співробітник

*Національна академія наук України, Інститут гідромеханіки,
вул. Желябова, 8/4, м. Київ, 03680, Україна*

petr_lukianov@bigmir.net

Наведений у даній роботі аналіз наявних на сьогодні досліджень з активного контролю лопатей гелікоптера свідчить про те, що проблема зниження шуму гелікоптера залишається актуальною. Причина полягає у тому, що активний контроль лопаті дозволяє знизити вібрації, але при цьому