УДК 512.64

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДИВЕРГЕНТНОГО МЫШЛЕНИЯ ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ИССЛЕДОВАНИЕ

Стеганцева П.Г., к.ф.-м.н., доцент, Бречко Д.А., магистр, Елховская Я.А., магистр, Зиновеева М.И., магистр

Запорожский национальный университет

В статье рассматриваются три задачи исследовательского характера, их решения снабжены необходимыми методическими комментариями. Обсуждается возможность применения общенаучных методов исследования для решения этих задач и для составления других исследовательских задач.

Ключевые слова: исследовательская задача, обобщение, конкретизация, сравнение, аналогия

Стєганцева П.Г., Бречко Д.О., Єлховська Я.А., Зіновєєва М.І. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИВЕРГЕНТНОГО МИСЛЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА СКЛАДАННЯ ЗАДАЧ НА ДОСЛІДЖЕННЯ / Запорізький національний університет, Україна

У статті розглядаються три задачі дослідницького характеру, їх розв'язки супроводжуються необхідними методичними коментарями. Обговорюється можливість застосування загальнонаукових методів дослідження при розв'язанні цих задач та складанні нових дослідницьких задач.

Ключові слова: дослідницька задача, узагальнення, конкретизація, порівняння, аналогія

Stegantseva P.G., Brechko D.A., Elkhovskaya Y.A., Zinoveeva M. I. THE APPLIANCE OF THE METHODS OF THE DIVERGENT THINKING FOR THE SOLUTION AND GENERATION OF THE RESEARCH PROBLEMS / Zaporizhzhya National University, Ukraine

The article deals with the research problems, the solutions of which are supplied with the necessary methodical opinion. The article discusses the possibility of the appliance of the general scientific investigative techniques for the solution of these problems and for the generation of the new research problems.

Key words: research problem, generalization, specification, comparison, analogy

Значение исследовательских задач в процессе обучения трудно переоценить. Такие задачи не только позволяют глубже понять теоретический материал, но и помогают развить творческое, логическое мышление [2]. Часто при решении таких задач приходится задумываться над взаимосвязью не только между конкретными понятиями, но и между различными разделами математики. В отличие от типовых задач, решение которых, как правило, алгоритмизировано, исследовательские задачи требуют применения общих и специальных методов познания [1].

С другой стороны, включение в учебный процесс исследовательских задач способствует и обеспечивает формирование навыков творческого или, как часто сейчас говорят, дивергентного мышления. При такой организации учебного процесса важной становится индивидуальная работа в ходе реализации плана решения проблемы. Но в то же время, на стадии постановки задачи, ее обсуждения, поиска и выбора методов решения большая роль отводится коллективной работе. В ходе так называемого мозгового штурма обязательно появятся полезные идеи, предложения.

Цель данной статьи - продемонстрировать примеры применения методов логического мышления для решения и составления исследовательских задач для начинающих.

Выделение подзадач одной из задач – монстров. Речь пойдет о следующей **задаче**:
Доказать, что для двух целочисленных матриц A, B таких, что $\det A = 1$, $\det B \neq 0$, существует $n \in N$ такое, что $B^{-1}A^nB$ – тоже целочисленная матрица.

Ее условие мы взяли из журнала «Математическое просвещение», № 11 за 2007 год в отделе задач. В последующих номерах журнала решение не появилось. Эта задача попала также в сборник Белова А.Я. задач – монстров по математике.

Мы приведем здесь решение этой задачи, полученное путем разбиения ее на подзадачи, объединенные общей идеей. Прежде всего, отметим, что, желая рассматривать эту задачу как исследовательскую, следовало бы изменить ее формулировку следующим образом.

Задача. Пусть даны две целочисленные матрицы A, B такие, что $\det A = 1$, $\det B \neq 0$. Существует ли $n \in N$ такое, что $B^{-1}A^nB$ – тоже целочисленная матрица?

Решение. Первые попытки провести исследование для произвольной унимодулярной матрицы не дали результата, поэтому поиск алгоритма решения пришлось начать с рассмотрения частных случаев и попытаться их обобщить.

Самым простым примером унимодулярной матрицы, определитель которой равен 1, является единичная матрица E. Для нее, очевидно, $n = 1$, так как $B^{-1}EB = B^{-1}B = E$ по определению обратной матрицы. Из этого ясно, что для тех унимодулярных матриц, некоторая натуральная степень которых равна единичной матрице E, ответ на поставленный вопрос положительный. Такие матрицы существуют. Действительно, множество унимодулярных матриц с определителем 1 образует мультипликативную группу $SL(n, Z)$ бесконечного порядка, в которой роль нейтрального элемента играет единичная матрица. Безусловно, в этой группе существуют элементы конечного порядка. Порядок каждого такого элемента и будет искомым натуральным числом. Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ является элементом группы $SL(2, Z)$ унимодулярных матриц с равным 1 определителем. Порядок этой матрицы равен 4, а значит, при $n = 4$, матрица $B^{-1}A^4B$ будет целочисленной. Действительно, $B^{-1}A^4B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$.

Итак, нам удалось сделать обобщение простого частного случая и выделить класс матриц, для которых искомое натуральное число совпадает с их порядком. Но в группе $SL(n, Z)$ содержатся и элементы бесконечного порядка. Например, в группе $SL(2, Z)$ таким элементом является матрица $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тем не менее, и в этом случае ответ остается положительным. Для описания решения задачи в этом случае нам понадобится сделать еще одно обобщение, более высокого уровня.

До сих пор целочисленность матрицы $B^{-1}A^nB$ следовала из определения обратной матрицы, так как во всех рассмотренных случаях эта матрица была единичной. Целочисленность матрицы $B^{-1}A^nB$ будет следовать также из того, что все элементы матрицы CA^nB, где C - союзная для B матрица, делятся на число $\det B$. Этот факт позволяет рассматривать не сами элементы матрицы CA^nB, а их остатки от деления на число $\det B$. Поэтому будет естественным каждой матрице A из $SL(n, Z)$ поставить в соответствие матрицу $\overline{A}$, элементами которой являются классы вычетов по модулю $m = detB$. Полученное множество матриц, по сравнению с исходным множеством $SL(n, Z)$, является конечным. Наделим его структурой кольца относительно операций сложения и умножения матриц. Каждый элемент этого кольца имеет конечный порядок. Например, если в условии даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то соответствующая матрица для матрицы A имеет вид $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{2} \end{pmatrix}$, так как

$\det B=3$. Понятно, что при нахождении натуральных степеней матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ мы никогда не получим единичную матрицу, то есть в группе $SL(2,Z)$ эта матрица имеет бесконечный порядок. Напротив, матрица $\overline{A}$ в указанном кольце имеет порядок 3, то есть $\overline{A}^3=\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{0}\\ \overline{0} & \overline{1}\end{pmatrix}$.

Можем вернуться к рассмотрению общего случая. Если $\det B=m$, порядок матрицы $\overline{A}$ равен $n\in N$, то переходя от матрицы $\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{0}\\ \overline{0} & \overline{1}\end{pmatrix}$ к ее прообразам в указанном соответствии, получим

$$B^{-1}A^nB=B^{-1}\begin{pmatrix}qm+1 & rm\\ sm & tm+1\end{pmatrix}B=B^{-1}\left(\begin{pmatrix}qm & rm\\ sm & tm\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)B=B^{-1}\begin{pmatrix}qm & rm\\ sm & tm\end{pmatrix}B+B^{-1}EB,$$

где $q,s,t,r\in Z$.

Матрица $B^{-1}A^nB$ является целочисленной как сумма двух целочисленных матриц.

Мы провели исследование для всех возможных унимодулярных матриц с равным 1 определителем и дали положительный ответ на поставленный вопрос. Наше рассуждение было основано на рассмотрении частных случаев, разбиении задачи на подзадачи и использовании свойств конечных алгебраических структур.

Обобщение и конкретизация как средства усиления мотивации обучения. При организации учебного процесса в первую очередь думают об обеспечении достижения дидактических и развивающих целей. Но вместе с этим нужно думать и о том, как сделать обучение интересным для самих обучающихся. Творческие педагоги постоянно занимаются поиском таких путей и делятся своим опытом с коллегами. Описание такого рода опыта в [4] послужило нам стимулом для исследования подобных ситуаций, для обобщений и формулирования новых исследовательских задач. Автор статьи [4] приводит пример подмеченной им «задачной конструкции», связанной с темой «Извлечение корней».

Начинает автор работы [4] свою «задачную конструкцию» с **задачи**:

Верно ли равенство: $\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$, (1)

которая по своей формулировке достаточно проста, но провоцирует сразу дать отрицательный ответ, и, тем самым, становится интересной.

Далее автор последовательно, применяя аналогию, сравнение, обобщая полученные при рассмотрении частных случаев результаты, получает общий вид аналогичных (1) равенств и формулирует результат в виде **теоремы**:

При любых натуральных значениях $n\neq 1, k\neq 1$ справедливо равенство

$$\sqrt[k]{n\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt[k]{\frac{n}{n^2-1}}.$$

Это исследование порождает естественный вопрос: Можно ли отыскать подобного рода равенства, связанные с другими элементарными функциями? Самый простой вариант предоставляет квадратичная функция. Аналогичные **задачи** можно сформулировать следующим образом.

Верно ли равенство: $2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(2\frac{2}{3}\right)^2$? Существуют ли натуральные числа $a, b, c,\ b < c$ такие, что

$$\left(a\frac{b}{c}\right)^2 = a\left(\frac{b}{c}\right)^2 \ ?$$

Оказалось, что аналогичных результатов для квадратичной функции не существует. Действительно, ложность первого равенства устанавливается непосредственной проверкой. Далее, предположив, что второе равенство является верным, после очевидных преобразований получим

$(ac+b)^2 = ab^2,\ c \neq 0, c \neq 1, a \neq 1$ или $ac + b = \pm b\sqrt{a}$.

Очевидно, нужно рассмотреть случай точного квадрата для a, то есть $a = m^2$. Тогда

$m^2c - mb + b = 0$ или $m^2c + mb + b = 0$.

Исследование полученных квадратных относительно m уравнений приводит к противоречию, так как дискриминанты отрицательны.

Вместе с тем, рассмотренная в статье [4] задачная конструкция может служить базой для составления новых исследовательских задач подобного рода. Для этого можно воспользоваться, например, понятием сложной функции.

Примеры. Верно ли равенство: $x^{\sqrt{2\frac{2}{3}}} = x^{2\sqrt{\frac{2}{3}}}$? Показать, что равенство $\log_2\left(\sqrt{2\frac{2}{3}}\,x\right) = \log_2\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right)$ является верным. Какой может быть функция $f(x)$, чтобы имело место равенство $f\left(\sqrt[k]{n\frac{n}{n^2-1}}\right) = f\left(n\sqrt[k]{\frac{n}{n^2-1}}\right)$?

Учащимся эти задачи могут показаться принципиально разными и новыми, а учителю они могут дать возможность создать набор задач для организации работы с группой учащихся, обеспечить глубокое усвоение материала, формировать логическое мышление учащихся, развивать способность к обобщению и конкретизации.

Сравнение и аналогия в обобщении задачи о представлении натуральных чисел в виде суммы квадратов. В статье [7] рассматривается обобщение теоремы Лагранжа о представлении натуральных чисел в виде суммы квадратов неотрицательных целых чисел на случай, когда в качестве слагаемых берутся значения не функции x^2, а квадратной функции более общего вида

$$F(x) = ax^2 + bx,$$

где a и b – целые, взаимно простые, разной четности, причем $a > 0$. В конце статьи дается список из трех вопросов для исследования. Следуя [6], мы можем рассматривать эту статью как источник исследовательских задач.

Согласно теореме Лагранжа каждое натуральное число можно представить в виде суммы четырех квадратов неотрицательных целых чисел. С другой стороны, существует бесконечно много натуральных чисел, непредставимых в виде суммы трех квадратов целых чисел.

Рассматривая указанное выше обобщение проблемы Лагранжа, Д. Паль доказал, что:

– каждое достаточно большое натуральное число можно представить в виде суммы пяти значений функции $F(x)$ от целого неотрицательного аргумента;

– четырех значений функции $F(x)$ для этого уже недостаточно, то есть существуют такие «плохие» функции $F(x)$ (к числу которых, очевидно, не принадлежит функция x^2), что можно найти бесконечно много натуральных чисел, непредставимых в виде суммы четырех значений функции $F(x)$ от целого неотрицательного аргумента. Примеры «плохих» многочленов: $3x^2+2x$ и $3x^2+4x$.

В статье [7] доказано, что существует бесконечно много натуральных чисел N, для которых уравнение

$$N = f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)$$

неразрешимо в целых неотрицательных числах $x_i (i=1,2,3,4)$, и, даже не имеет целых решений $x_i > -k$, где k – фиксированное, сколь угодно большое положительное число, а $f(x)=3x^2+2x$. Этот факт следует из приведенных с доказательствами леммы и теоремы.

Лемма 1. Пусть $\varphi(x)=(3x+1)^2$. Если $x_i (i=1,2,3,4)$ целое и $x_i > -\frac{2^{2n_0-1}+1}{3}$, то равенство

$$\sum_{i=1}^{4}\varphi(x_i)=16^n$$

не имеет места ни при каком $n \geq n_0$.

Теорема 1. Все натуральные числа N вида $\frac{16^n-4}{3}$, где $n \geq n_0$, непредставимы в виде

$$N=\sum_{i=1}^{4} f(x_i), \tag{2}$$

где $x_i > -\frac{2^{2n_0-1}+1}{3}$.

Нам удалось доказать, что многочлен $f(x)=3x^2+4x$ также является «плохим» и найти вид натуральных чисел, непредставимых в виде суммы четырех значений этого многочлена. Для решения поставленной задачи мы провели аналогичное исследование, подметили особенности в доказательствах леммы и теоремы, выявили необходимые ограничения. Полученные результаты также сформулировали в виде леммы и теоремы.

Лемма 2. Пусть $\varphi(x)=(3x+2)^2$. Если $x_i (i=1,2,3,4)$ целые и $x_i > \frac{2^{2n_0-1}-2}{3}$, то равенство

$$\sum_{i=1}^{4}\varphi(x_i)=16^n \tag{3}$$

не имеет места ни при каком $n \ge n_0$.

Доказательство. Допустим, что при $n \ge n_0$ имеет место равенство (3). Пусть число $3x_i + 2$ делится на 2^{t_i} и не делится на 2^{t_i+1} $(i = 1,2,3,4)$, то есть $3x_i + 2 = 2^{t_i}(2z_i + 1)$. Можно считать, что $t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$. Рассмотрим два случая:

1. Если $t_1 \le 2n - 2$, то $\varphi(x_i) = 4^{t_i}(4z_i(z_i + 1) + 1) \equiv 4^{t_i} \left(\mathrm{mod}\, 2 \cdot 4^{t_i+1}\right)$, а так как $t_1 \le t_i$, то

$$\varphi(x_i) \equiv 4^{t_i} \left(\mathrm{mod}\, 2 \cdot 4^{t_1+1}\right)$$

Из равенства (3) следует сравнение $4^{t_1} + 4^{t_2} + 4^{t_3} + 4^{t_4} \equiv 4^{2n} \left(\mathrm{mod}\, 2 \cdot 4^{t_1+1}\right)$. Разделим обе части этого сравнения и модуль на 4^{t_1}, получим

$$1 + 4^{t_2 - t_1} + 4^{t_3 - t_1} + 4^{t_4 - t_1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 8),$$

так как $t_1 \le 2n - 2$. Но последнее сравнение невозможно.

2. Если $t_1 \ge 2n - 1$, то $3x_1 + 2 \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, 2^{2n-1}\right)$, а значит

$$3x_1 + 2 = 2^{2n-1} z. \tag{4}$$

Легко проверить, что $z \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$.

Пусть $z \ge 4$. Тогда $\varphi(x_1) = 4^{2n-1} z^2 \ge 4^{2n+1} = 4 \cdot 16^n$. Поскольку слагаемые $\varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4)$ положительны, то $\sum_{i=1}^{4} \varphi(x_i) > 16^n$, что противоречит (3).

Пусть теперь $z \le 1$, тогда из (4) следует $3x_1 + 2 \le 2^{2n-1}$, а так как $n \ge n_0$, то $3x_1 + 2 \le 2^{2n_0 - 1}$. Из последнего неравенства $x_1 \le \dfrac{2^{2n_0 - 1} - 2}{3}$, что противоречит условию леммы.

Теорема 2. Все натуральные числа N вида $\dfrac{16\left(16^{n-1} - 1\right)}{3}$, где $n \ge n_0$, непредставимы в виде (2),

где $x_i > \dfrac{2^{2n_0 - 1} - 2}{3}$.

Доказательство. Считая $N = \dfrac{16\left(16^{n-1} - 1\right)}{3}$, умножим обе части равенства (2) на 3 и затем прибавим к обеим частям 16. Получим равенство (3), невозможность которого доказана в **лемме 2.**

Таким образом, многочлен $f(x) = 3x^2 + 4x$ тоже является «плохим» в указанном выше смысле. Мы рассмотрели только одну из поставленных в статье [7] исследовательских задач. Наше исследование позволило нам сформулировать и свои задачи. Например, можно найти вид натуральных чисел, представимых в виде суммы значений квадратичной функции от четырех последовательных натуральных значений аргумента, или доказать, что таких натуральных чисел не существует.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Построение методической системы обучения математике направлено не только на постепенное и систематическое формирование логического мышления, но и является важнейшим и актуальным заданием. Обогащение школьного курса математики логическими составляющими способствует улучшению качества подготовки учеников к будущей профессиональной деятельности, формированию и развитию оригинальности, гибкости мышления. Эти качества полезны не только специалистам в области математики, но и в любой другой сфере человеческой деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Разумникова О. М. Функциональная организация коры головного мозга при дивергентном и конвергентном мышлении / М. О. Разумникова. – Новосибирск, 2003. — 312 с.
2. Лэзан К. Развитие математической инициативы / К. Лэзан. – М.: Типография И.Д. Сытина, 1908. – 166 с.
3. Нагибин Ф.Ф. Математическая шкатулка / Ф.Ф. Нагибин, Е. С. Канин. – М.: Просвещение, 1988. – 160с.
4. Зайкин М.И. Когда решать задачи интересно /М.И.Зайкин // Математика в школе. – 2009, № 4. – С.3-11.
5. Сабитов Р.А. Основы научных исследований: учеб. пособ. / Р.А.Сабитов. - Челябинск, Челяб. Гос. Ун-т., 2002. – 138 с.
6. Скопенков А.Б. Размышления об исследовательских задачах для школьников [Електронний ресурс]. / А.Б. Скопенков // Мат. Просвещение. - 2008. – №12. – С. 23-32; – Режим доступу: http://www.mccme.ru/free-books/matprosc.html.
7. Телесин Ю.З. О представлении натуральных чисел в виде суммы значений квадратного двучлена / Ю.З.Телесин // Мат. просвещение. – 1961. - № 6. – С.214-217.

УДК 371 (477) «18/19»

ЦЕЛЬ, ЗАДАЧИ, ПРИНЦИПЫ ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧЕБНЫХ ОКРУГОВ УКРАИНЫ В XIX – НАЧАЛЕ XX ВЕКА

Шушара Т.В., к.пед.н., доцент

Республиканское высшее учебное заведение «Крымский гуманитарный университет»

В данной статье сделана попытка уточнить цель, задачи, принципы организационно-методической деятельности учебных округов Украины в XIX - в начале XX века.

Ключевые слова: организационно-методическая деятельность, учебные округи, система образования, начальная школа, гимназии, высшие учебные учреждения.

ШУШАРА Т.В. МЕТА, ЗАВДАННЯ, ПРИНЦИПИ ОРГАНІЗАЦІЙНО-МЕТОДИЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ НАВЧАЛЬНИХ ОКРУГІВ УКРАЇНИ В XIX - НА ПОЧАТКУ XX СТОЛІТТЯ / РВУЗ «Кримський гуманітарний університет», Україна.

У статті здійснено спробу уточнити мету, завдання, принципи організаційно-методичної діяльності навчальних округів України у XIX на початку XX століття.

Ключові слова: організаційно-методична діяльність, навчальні округи, система освіти, початкова школа, гімназії, вищі навчальні заклади.