

УДК 624.07

А.Ф. Санін

Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск

МОДЕЛЬ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ДИСКРЕТНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ УСИЛИВАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ОТ ДЕЙСТВИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Расчет круговых цилиндрических оболочек представляет собой достаточно сложную инженерную задачу. Предложенный алгоритм решения задачи позволяет свести бесконечную систему алгоритмических уравнений к бесконечному числу уже не связанных между собой уравнений, что ведет к существенному упрощению задачи в целом.

круговые цилиндрические оболочки, силы взаимодействия

Введение

Постановка проблемы. Существо проблемы заключается в том, что благодаря специальному представлению нагрузки, действующей между оболочкой двумя силовыми элементами, предоставляется свести решение задачи вместо бесконечного числа связанных алгебраических уравнений к бесконечному числу уже не связанных между собой алгебраических уравнений. **Цель работы** состоит в том, чтобы предоставить силы взаимодействия между оболочкой и продольными силовыми элементами таким образом, при котором бесконечная система связанных алгебраических уравнений, обеспечивающих эффективное решение важной в практическом отношении задачи; распространять применяемый подход к решению более сложных составных задач: оболочки – силовые элементы, включающих не только задачи статики, но и динамики.

Анализ литературы. Развитие авиации, подводного флота и особенно ракетной техники привело к резкому стимулированию исследований оболочных конструкций как при статическом, динамическом режимах, так и при режимах, связанных устойчивостью оболочек. Обзор литературы по широкому кругу вопросов расчета оболочек приводится отчасти в [4, 5]. Применение ЭВМ позволило существенно расширить круг решаемых задач и точности получаемых результатов. В то же время применение и развитие аналитических (в сочетании) с численными методами расчета позволяли получать расчеты при существенно мень-

ших затратах машинного времени, что в ряде случаев могло являться критичной величиной.

Основная часть

Для решения поставленной задачи можно воспользоваться известными дифференциальными зависимостями, описывающими напряженно-деформированное состояние как цилиндрической оболочки, так и продольных усиливающих элементов от действия произвольной внешней нагрузки.

В частности, расчет цилиндрической оболочки можно проводить, используя следующие уравнения [1]:

$$\begin{aligned} \nabla^8 \Phi_x + \frac{1-v^2}{C^2} \cdot \frac{\partial^4 \Phi_x}{\partial \alpha^4} &= -\frac{R^4}{D} X; \\ \nabla^8 \Phi_y + \frac{1-v^2}{C^2} \cdot \frac{\partial^4 \Phi_y}{\partial \alpha^4} &= -\frac{R^4}{D} Y; \\ \nabla^8 \Phi_z + \frac{1-v^2}{C^2} \cdot \frac{\partial^4 \Phi_z}{\partial \alpha^4} &= -\frac{R^4}{D} Z; \end{aligned} \quad (1)$$

Положительное направление координатных осей, перемещений, внутренних усилий и моментов, а также внешних нагрузок показаны на рис. 1. Обычно усиливающие продольные элементы выполняются в виде тонкостенных стержней. Для их расчета можно воспользоваться системой уравнений, представленных в табл. 1, где

$$\bar{D}^i = \frac{d^i}{dx^i}; \quad S_z = \int_F z dF; \quad I_{zz} = \int_F z^2 dF \text{ и т. д.}$$

Таблица 1

Расчет усиливающих продольных элементов

u	v	ω	θ	Q
$F\bar{D}^2$	$-S_y\bar{D}^3$	$-S_z\bar{D}^3$	$-S_{\omega}\bar{D}^3$	$= -\frac{1}{E}(g_x + T_L - T_K);$
$S_y\bar{D}^3$	$-I_{yy}\bar{D}^4$	$-I_{yz}\bar{D}^4$	$-I_{\omega y}\bar{D}^4$	$= -\frac{1}{E}(q_{y+}T'_L y_L - T'_k y_k + \int_{\ell} y \frac{\partial p_x}{\partial x} ds);$
$S_z\bar{D}^3$	$-I_{zy}\bar{D}^4$	$-I_{zz}\bar{D}^4$	$I_{z\omega}\bar{D}^4$	$= -\frac{1}{E}(q_z + T'_L z_1 - T'_k z_k + \int_{\ell} z \frac{\partial p_x}{\partial x} ds);$
$S_{\omega}\bar{D}^3$	$-I_{\omega y}\bar{D}^4$	$-I_{\omega z}\bar{D}^4$	$-I_{\omega\omega}\bar{D}^4 + \frac{GI_d}{E}\bar{D}^2$	$= -\frac{1}{E}(m_k + T'_L \omega_L - T'_k \omega_k + \int_{\ell} \omega \frac{\partial p_x}{\partial x} ds).$

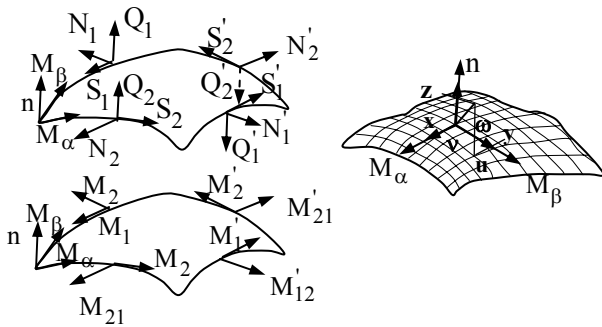


Рис. 1. Схема положительных направлений

Отметим, что все характеристики усиливающих элементов определяются относительно местной системы координат (рис. 2).

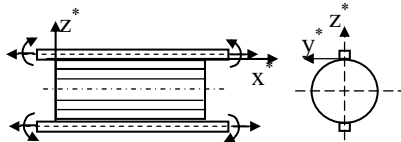


Рис. 2. Определение характеристик усиливающих элементов

Более подробное пояснение к табл. 1 можно найти в работах [2, 3].

В целом ряде практически важных случаев система уравнений, представленная таблицей 1, существенно может быть упрощена. Например, при наличии симметрии геометрии сечения и деформации тонкостенного стержня относительно оси Z^* (рис. 2), а также при отсутствии деформации поперечного сечения система уравнений может быть сведена к более простому виду:

$$F\bar{D}^2 u - S_z\bar{D}^3 \omega = -\frac{1}{E} \cdot (g_x + T_L - T_K); \quad (2)$$

$$S_2\bar{D}^3 u - I_{zz}\bar{D}^4 \omega = -\frac{1}{E} \cdot (g_z + T'_L z_L - T'_k z_k + \int_1 \frac{dp_x}{dx} ds).$$

Если на продольные элементы действует лишь краевая нагрузка и реакция оболочки, то в этом случае возможны дальнейшие упрощения:

$$F\bar{D}^2 u - S_z\bar{D}^3 \omega = -\frac{1}{E} T_k; \quad S_2\bar{D}^3 u - I_{zz}\bar{D}^4 \omega = -\frac{1}{E} g_z, \quad (3)$$

где T_k и g_z – составляющие реакции со стороны оболочки на стержень в направлении осей X^* и Z^* .

Излагаемая методика решения задачи принципиально позволяет производить расчеты цилиндрической оболочки, подкрепленной различными по геометрии и расположенными на произвольных расстояниях относительно друг друга продольными элементами. Однако в дальнейшем будет рассмотрен частный случай, когда продольные элементы расположены по контуру поперечного сечения

на равных расстояниях друг от друга, имеют одинаковую геометрию сечения и загрузка одинаковой внешней нагрузкой. Заметим, что уравнения (1) и (2) легко можно было бы проинтегрировать,

если бы были известны силы взаимодействия между оболочкой и продольными элементами. Поскольку же последние неизвестны, то возникает дополнительная необходимость в их определении. При этом целесообразно воспользоваться тем обстоятельством, что характер распределения сил взаимодействия по поперечным сечениям оказывается известным и имеет вид всплеска нагрузки (рис. 3). В этом случае поверхностную нагрузку на оболочку от действия продольных элементов можно представить как:

$$X(\alpha, \varphi) = \sum_{m=1,3,5...} \sum_{n=0}^{\infty} X_m A_n \cos \frac{m\pi\alpha R}{L} \cdot \cos n\varphi; \quad Y(\alpha\varphi) = 0; \quad (4)$$

$$Z(\alpha, \varphi) = \sum_{m=1,3,5...} \sum_{n=0}^{\infty} Z_m A_n \sin \frac{m\pi\alpha R}{L} \cdot \cos n\varphi;$$

где $A_n = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sin n\varphi_0}$; $A_0 = \frac{2}{\pi} \varphi_0$; $\alpha = \frac{x}{R}$; $2\varphi_0$ – центральный угол, характеризующий ширину контактируемого участка оболочки с продольным элементом; s – число продольных элементов.

Подобное представление поверхностной нагрузки позволяет существенным образом сократить объем вычислительных работ, так как сводит определение сил взаимодействия к решению бесконеч-

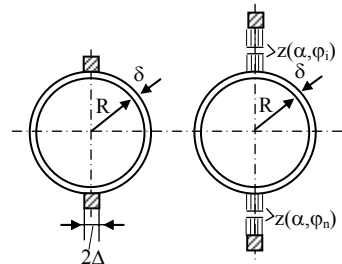


Рис. 3. Всплеск нагрузки

ного числа не связанных между собой систем алгебраических уравнений лишь третьего порядка. В общем случае требовалось бы решение бесконечной системы алгебраических уравнений при задании поверхностной нагрузки в виде:

$$X = \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_{mn} \cos \frac{m\pi\alpha R}{L} \cdot \cos \beta_n \varphi; \quad (5)$$

$$Z = \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_{mn} \sin \frac{m\pi\alpha R}{L} \cdot \cos \beta_n \varphi.$$

Если считать, что загрузка оболочки происходит только через продольные элементы, то для шарнирно опертой оболочки можно записать следующие выражения для потенциальной функции:

$$\Phi_x(\alpha, \varphi) = -\frac{R^4}{D} \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_m \theta_{mn} \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi;$$

$$\Phi_z(\alpha, \varphi) = \frac{R^4}{D} \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_m \theta_{mn} \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi, \quad (6)$$

где X_m, Z_m – определяемые величины, характеризующие взаимодействие оболочки с продольными элементами; $\theta_{mn} = A_n / \left((\lambda_m^2 + \beta_n^2)^4 + ((1-\nu^2)/C^2) \lambda_m^4 \right)$;

$$\lambda_m = \frac{m\pi R}{L}; \beta_n = \beta_n; c^2 = \frac{\delta^2}{12R^2}; D = \frac{\delta^3 E}{12(1-\nu^2)};$$

Располагая выражениями для потенциальной функции (6), можно вычислить перемещения цилиндрической оболочки по линии контакта ее с продольным элементом [1]:

$$u_x^0 = \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_m u_{xmn}^0 \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi;$$

$$\omega_x^0 = \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_m \omega_{xmn}^0 \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi; \quad (7)$$

$$u_z^0 = \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_m u_{zmn}^0 \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi;$$

$$\omega_z^0 = \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_m \omega_{zmn}^0 \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi;$$

$$\text{где } u_{xmn}^0 = \frac{R^4}{D} \left[\lambda_m^2 + c^2 \left[\lambda_m^2 + \frac{2}{1-\nu} \beta_n^2 \right] (\lambda_m^2 + \beta_n^2) \right] \theta_{mn};$$

$$\omega_{xmn}^0 = -\frac{R^4}{D} \left[\lambda_m \beta_n^2 - \nu \lambda_m^3 \right] \theta_{mn}; \omega_{zmn}^0 = \frac{R^4}{D} (\lambda_m^2 + \beta_n^2)^2 \theta_{mn};$$

$$u_{zmn}^0 = -\frac{R^4}{D} \left[\lambda_m \beta_n - \nu \lambda_m^3 \right] \theta_{mn};$$

Введенная индексация в обозначении перемещений $u_{x0}, \omega_{x0} \dots$ означает, во-первых, что речь идет о перемещениях оболочки, и во-вторых, что данное перемещение соответствует поверхностной нагрузке либо $X(\alpha, \varphi)$, либо $Z(\alpha, \varphi)$. Аналогичная индексация применяется и при определении перемещений продольных элементов (стрингеров).

Таким образом, для рассматриваемого случая, когда поверхностная нагрузка имеет лишь две со-

ставляющие: $X(\alpha, \varphi)$ и $Z(\alpha, \varphi)$, суммарные перемещения в оболочке от действия сил со стороны продольных элементов можно представить как

$$u^0 = \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X_m u_{xmn}^0 + Z_m u_{zmn}^0) \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi; \quad (8)$$

$$\omega^0 = \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X_m \omega_{xmn}^0 + Z_m \omega_{zmn}^0) \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi.$$

Обращаясь к интегрированию системы дифференциальных уравнений (3), описывающих напряженно-деформированное состояние тонкостенного стержня, и учитывая (3), что

$$T_k(\alpha) = X(\alpha, \varphi_i) \cdot 2\Delta; \quad g_z(\alpha) = Z(\alpha, \varphi_i) \cdot 2\Delta, \quad (9)$$

получим следующие выражения осевых и радиальных перемещений усиливающего элемента по линии контакта его с оболочкой:

$$u^c = \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X_m u_{xmn}^c + Z_m u_{zmn}^c) \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi_i + A_0 + A_1 \alpha R + A_2 \frac{(\alpha R)^2}{2}; \quad (10)$$

$$\omega^c = \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X_m \omega_{xmn}^c + Z_m \omega_{zmn}^c) \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi_i + B_0 + B_1 \alpha R + B_2 \frac{(\alpha R)^2}{2} + B_3 \frac{(\alpha R)^3}{6};$$

$$\text{где } u_{xmn}^c = \frac{2\Delta R^3}{E} \lambda_m^{-2} \frac{\rho_0}{R} A_n; \quad u_{zmn}^c = \frac{2\Delta R^3}{E} \cdot \frac{r_0}{\lambda_m^3} A_n;$$

$$\omega_{xmn}^c = \frac{2\Delta R^4}{E} \lambda_m^{-3} \frac{r_0}{R} A_n; \quad \omega_{zmn}^c = -\frac{2\Delta R^3}{E} \cdot \frac{S_0}{\lambda_m^4} A_n; \quad (11)$$

$$\rho_0 = \frac{I_{zz}}{-FI_{zz} + S_z^2}; \quad r_0 = \frac{S_z}{-FI_{zz} + S_z^2}; \quad S_0 = \frac{F}{-FI_{zz} + S_z^2}.$$

Постоянные интегрирования A_1 и B_1 легко определяются из граничных условий. Удовлетворение граничным условиям приводит к следующим окончательным выражениям для осевых и радиальных перемещений усиливающих элементов:

$$u^c = \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X_m u_{xmn}^c + Z_m u_{zmn}^c) \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi_i + \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} u'_{0m} \cos \lambda_m \alpha;$$

$$\omega^c = \sum_{m=1,3,5\dots n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X_m \omega_{xmn}^c + Z_m \omega_{zmn}^c) \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi_i + \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \omega''_{0m} \sin \lambda_m \alpha;$$

$$\text{где } u'_{0m} = -\frac{4}{\alpha_0} [u^c]' \cdot R \left(\frac{\alpha_0}{m\pi} \right)^2; \quad \omega''_{0m} = -\frac{4}{\alpha_0} [\omega^c]'' \cdot R^2 \cdot \left(\frac{\alpha_0}{m\pi} \right)^3.$$

Таким образом, в выражения для осевых и радиальных перемещений оболочки, а также для продольных элементов вошли неизвестные величины X_m и Z_m . Для их определения можно воспользоваться условием равенства перемещений оболочки и продоль-

ных элементов по линии их контакта. Поскольку все необходимые величины известны, то из условия

$$u^0(\alpha, \varphi_i) = u_i^c(\alpha, \varphi_i); \quad \omega^0(\alpha, \varphi_i) = \omega^c(\alpha, \varphi_i); \quad (15)$$

можно получить следующие уравнения для определения неизвестных X_m и Z_m :

$$\begin{cases} X_m \sum_{n=0}^{\infty} (-u_{Xmn}^c + u_{Xmn}^0) \cos \beta_n \varphi_i + \\ + Z_m \sum_{n=0}^{\infty} (u_{Zmn}^c + u_{Zmn}^0) \cos \beta_n \varphi_i = u'_{0m}; \\ X_m \sum_{n=0}^{\infty} (-\omega_{Xmn}^c + \omega_{Xmn}^0) \cos \beta_n \varphi_i + \\ + Z_m \sum_{n=0}^{\infty} (\omega_{Zmn}^c + \omega_{Zmn}^0) \cos \beta_n \varphi_i = \omega'_{0m}. \end{cases} \quad (16)$$

Основные характеристики испытываемой конструкции: $L=100$ см; $R=12,5$ см; $\delta=0,08$ см, материал оболочки ст-3; $2\Delta=1,7$ см; $H=1,8$ см; материал стрингера Д=16. На основании проведенных расчетов можно заключить, что при выбранных соотношениях жесткостей оболочки и усиливающих элементов, которые принимались при исследованиях, оболочка очень медленно включается в работу.

При некоторых видах загрузки продольных элементов внешней нагрузки нормальная составляющая сил взаимодействия оболочки с продольными элементами может оказать существенное влияние на напряженное состояние конструкции.

Выводы

1. Приведенные в работе расчеты круговой цилиндрической оболочки соединенной двумя продольными силовыми элементами, расположенные диаметрально на поверхности оболочки позволили

сделать следующие основные выводы.

2. Применение уравнений теории пологих оболочек, разработанных Власовым В.В. [1], в форме Гольденвейзера А.Л. [4] показали, что решения, проведенные на их основе, приводят к практически совпадающим результатам, выполненных автором в эксперименте.

3. При выбранных для проведения экспериментов соотношения жесткостей оболочки и продольных силовых элементов отмечается весьма медленное включение оболочки в работу.

4. При имеющих место растяжениях продольных силовых элементов в оболочке (между силовыми элементами) возникали зоны сжатия, которые при определенных условиях могут являться очагами локальной потери устойчивости оболочки.

Список литературы

1. Власов В.З. *Избранные труды, т.1.* – М.: АН СССР, 1962. – 528 с.
2. Власов В.З. *Избранные труды, т.2.* – М.: АН СССР, 1963. – 503 с.
3. Власов В.З. *Избранные труды, т.3.* – М.: АН СССР, 1963. – 472 с.
4. Гольденвейзер А.Л., *Теория упругих тонких оболочек.* – М.: ГИТТЛ, 1953. – 544 с.
5. Кац С.Н. *Строительная механика оболочек.* – М.: Машиностроение, 1966. – 508 с.

Поступила в редколлегию 13.03.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.Н. Фоменко, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.