

УДК 389.14

Н.Д. Кошевой, А.В. Павлик, В.П. Сироклы

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков

КЛАССИФИКАЦИЯ ПЛАНОВ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассмотрены виды эквивалентности планов многофакторного эксперимента. Предложен метод классификации планов многофакторного эксперимента на основе *SP*-преобразований, в котором используются принципы унификации и типизации т.е. рациональное сокращение процессов одинакового функционального назначения и разработка типовых решений, в которых отражаются общие для ряда процессов элементы или характеристики. Получены оценки количества типовых структур планов и характеристики классов эквивалентности. Приведены примеры каталогов типовых структур.

Ключевые слова: многофакторный эксперимент, *SP*-преобразование, комбинаторные схемы, унификация, типизация

Введение

Постановка проблемы. Оптимальное планирование экспериментов часто требует сложного упорядочения опытов в соответствии с уровнями факторов, и такие упорядочения основаны на комбинаторных схемах [1]. Планы для решения таких задач, как правило, строятся на основе стандартных комбинаторных конфигураций и таблиц типа латинских квадратов, блок-схем, но общий подход к классификации планов многофакторного эксперимента (МФЭ) в настоящее время отсутствует.

Анализ последних исследований и публикаций. В настоящее время вопросы классификации планов МФЭ исследовались для узких классов комбинаторных планов. Классификация латинских кубов предложена К. Кишеном, который ввел понятие первого, второго или g -го порядков для кубов и гиперкубов и описал полностью ортогонализированные гипер-греко-латинские кубы [2]. На основе результатов исследования множества латинских кубических планов построены специальные таблицы и графики, которые могут быть использованы при выборе плана эксперимента [3]. Уточнения классификации латинских кубических планов сделаны Д. Присом, С. Пирсом и Дж. Керром [4], которые ввели понятия регулярности и нерегулярности. Эта классификация значительно расширяет класс кубических латинских планов, так как параллелепипеды и частично ортогональные латинские кубы второго порядка практически не изучены и упоминаются в литературе крайне редко [5].

Цель работы: разработка метода классификация планов МФЭ на основе *SP*-преобразований.

Основная часть

Решение задачи. В основе классификации планов МФЭ лежат принципы унификации и типизации. Для рассматриваемой задачи унификация – это рациональное сокращение процессов одинакового функционального назначения, а типизация – разработка типо-

вых решений, в которых отражаются общие для ряда процессов элементы или характеристики.

В основе унификации и типизации объектов и процессов лежит понятие эквивалентности. В общем случае эквивалентность – бинарное отношение на множестве, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Любые два класса одной эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают, т.е. любая эквивалентность определяет разбиение множества. И обратно, любое разбиение множества на непересекающиеся классы порождает эквивалентность [6, 7].

Классификация планов МФЭ состоит из следующих этапов (рис. 1): разбиение множества планов МФЭ на S эквивалентные подмножества, в зависимости от структуры плана; выделение в S -эквивалентных структурах P -эквивалентных планов; определение типовых представителей P -эквивалентных планов; составление каталога типовых представителей.

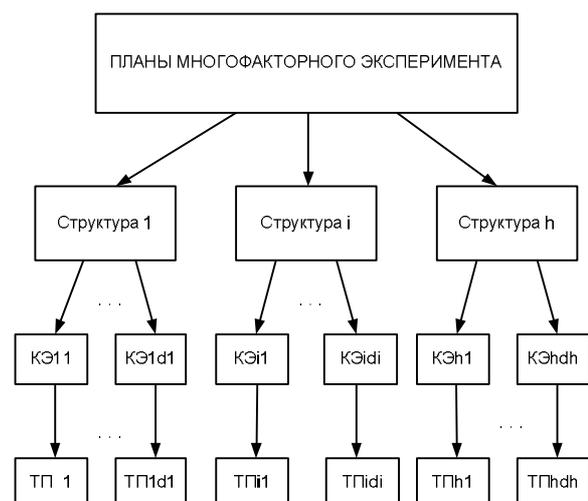


Рис. 1. Классификация планов МФЭ

На рис. 1 представлен процесс классификации планов МФЭ. Количество структур обозначено h , ко-

личество классов (КЭ) i -ой структуры обозначено d_i , j -й типовой представитель i -го КЭ обозначено $ТП_{ij}$.

Планы МФЭ, имеющие одинаковую структуру называются S -эквивалентными.

Под структурой плана МФЭ будем понимать способ образования столбцов матрицы планирования, имеющих одинаковые размеры. Матрицу планирования эксперимента можно представить в виде совокупности двух частей – базовой и производной. В базовой части представлены все возможные комбинации n факторов, а в произвольной части возможные произведения значений базовых факторов.

В табл. 1 приведен пример матрицы планирования эксперимента с разбиением матрицы на составляющие ее части.

Рангом (R) будем называть количество столбцов матрицы взаимодействия.

Определим максимальное значение ранга при n факторах. Столбцы матрицы взаимодействия формируются в результате умножения значений соответствующих факторов, поэтому максимальное значение ранга R_{max} определяется количеством сочетаний факторов, т.е.

$$R_{max} = C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n.$$

Таблица 1

Матрица планирования для полного n -факторного эксперимента

Базовая матрица				Матрица взаимодействий			
X_1	X_2	...	X_n	X_1X_2	X_1X_3	...	$X_1X_2 \dots X_n$
-	-	...	-	+	+
-	-	...	+	+	+
...				...			
+	+	+	+	+	+

Поскольку

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n,$$

то

$$R_{max} = (C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n) - C_n^0 - C_n^1 = 2^n - C_n^0 - C_n^1 = 2^n - n - 1.$$

Количество вариантов структур (L_R) ранга R определяется следующим образом:

$$L_R = C_{2^n - n - 1}^R.$$

Для описания структуры ранга R необходимо указать как формируются произведения факторов, входящих в матрицу взаимодействий.

Например, для $n = 4$ и $R = 5$ одним из возможных вариантов структур является план МФЭ, в котором матрица взаимодействий получена путем произведения следующих факторов $X_1X_2, X_1X_3, X_2X_4, X_1X_2X_3, X_1X_2X_4, X_1X_2X_3X_4$. Среди указанных произведений три произведения двух факторов, два - трех и одно - четырех.

Для упрощения записи структуры плана МФЭ введем обозначение αp^β для α произведений из β факторов. Тогда в "сжатом" виде эту структуру можно записать следующим образом: $\{3p^2, 2p^3, p^4\}$.

В табл. 2 приведены варианты структур планов МФЭ для $n = 3$. Разработан алгоритм формирования структур планов МФЭ, получены значения и вид структур для $n = 3, 4, 5, 6$.

В табл. 3 приведены значения числа планов МФЭ (L_r), количества S -эквивалентных структур (N_s) и отношение числа структур к числу планов МФЭ (N_s/L_r) в зависимости от ранга для $n = 4$.

Таблица 2
Варианты структур планов МФЭ для $n = 3$

R	L_R	Вид структур
1	2	$\{p^2\}, \{p^3\}$
2	2	$\{2p^2\}, \{p^2, p^3\}$
3	2	$\{3p^2\}, \{2p^2, p^3\}$
4	1	$\{3p^2, p^3\}$

Таблица 3

Характеристики планов МФЭ в зависимости от ранга для $n = 4$

R	L_r	N_s	$N_s/L_r(\%)$
1	11	3	27
2	55	5	9
3	165	7	4,2
4	330	9	2,7
5	462	10	2,1
6	462	10	2,1
7	330	9	2,7
8	165	7	4,2
9	55	5	9
10	11	3	2,7

Типовые варианты S -эквивалентных структур планов МФЭ для $n = 4, R = 2, \dots, 6$ приведены в табл. 4.

При исследовании планов МФЭ нет необходимости рассматривать все возможные планы (количество которых растет полиномиально с ростом количества факторов) и затруднительно уже при $n = 4$, а достаточно рассмотреть только представителей планов, имеющих одинаковую структуру. Эффективность такого подхода доказывает то, что количество типовых структур для трех факторов составляет 45%, для четырех – 3%, а для пяти – 0,06% от количества планов МФЭ.

Таблица 4

Типовые варианты S-эквивалентных структур планов МФЭ для $n = 4$, $R = 2, \dots, 6$

№	R	p ²	p ³	p ⁴	№	R	p ²	p ³	p ⁴	№	R	p ²	p ³	p ⁴
1	1			1	16	4		3	1	31	5	3	2	
2	1		1		17	4		4		32	5	4		1
3	1	1			18	4	1	2	1	33	5	4	1	
4	2		1	1	19	4	1	3		34	5	5		
5	2		2		20	4	2	1	1	35	6	1	4	1
6	2	1		1	21	4	2	2		36	6	2	3	1
7	2	1	1		22	4	3		1	37	6	2	4	
8	2	2			23	4	3	1		38	6	3	2	1
9	3		2	1	24	4	4			39	6	3	3	
10	3		3		25	5		4	1	40	6	4	1	1
11	3	1	1	1	26	5	1	3	1	41	6	4	2	
12	3	1	2		26	5	1	4		42	6	5		1
13	3	2		1	28	5	2	1	1	43	6	5	1	
14	3	2	1		29	5	2	3		44	6	6		
15	3	3			30	5	3	1	1					

Выводы

Предложен метод классификации планов МФЭ на основе SP-преобразований. Получены оценки количества типовых структур планов и приведены примеры каталогов типовых структур.

Следующим этапом исследований является выделение в S-эквивалентных структурах R-эквивалентных планов МФЭ и определение их типовых представителей.

Список литературы

1. Дисперсионный анализ и синтез планов на ЭВМ / Е.В. Маркова, В.И. Денисов, И.А. Полетаева, В.В. Пономарев. – М.: Наука, 1982. – 194 с.
2. Kishen K. On the construction of latin and hyper-graeco-latin cubes and hyper cubes. – J. Indian Soc. Agr. Statist., 1950, № 2. – Pp. 20-48.
3. Маркова Е.В., Лисенков А.Н. Комбинаторные планы в задачах многофакторного эксперимента. – М.: Наука, 1979. – 347 с.

4. Preece D.A., Pearce S.C., Kerr J.R. Orthogonal designs for three-dimensional experiments. – Biometrika, 1973, № 60. – Pp. 349-356.

5. Маркова Е.В. Руководство по применению латинских планов при планировании эксперимента с качественными факторами. – Челябинск: Южно-Урал. кн.изд-во, 1971. – 156 с.

6. Кошевой Н.Д., Бестань С.Г., Дергачев В.А. Применение комбинаторного анализа при выборе оптимальных планов многофакторного эксперимента // Теорія і практика перебудови економіки. Зб. наукових праць. – Черкаси: ЧПТ, 2001. – С. 224-227.

7. Кошевой Н.Д., Бестань С.Г., Дергачев В.А. Планирование эксперимента на основе комбинаторных конфигураций // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2001. – № 3. – С. 69-72.

Поступила в редколлегию 20.02.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Ю. Соколов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.

КЛАСИФІКАЦІЯ ПЛАНІВ БАГАТОФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Н.Д. Кошовий, А.В. Павлик, В.П. Сіроклін

Розглянуті види еквівалентності планів багатofакторного експерименту. Запропонований метод класифікації планів багатofакторного експерименту основі SP-перетворень, в якому використовуються принципи уніфікації і типізації, тобто раціональне скорочення процесів однакового функціонального призначення і розробка типових рішень, в яких відбиваються загальні для ряду процесів елементи або характеристики. Отримані оцінки кількості типових структур планів і характеристики класів еквівалентності. Приведені приклади каталогів типових структур.

Ключові слова: експеримент багаточинника, SP-перетворення, комбінаторні схеми, уніфікація, типізація.

CLASSIFICATION OF PLANS OF MULTIFACTOR EXPERIMENT

N.D. Koshevoy, A.V. Pavlik, V.P. Siroklyn

The types of equivalence of plans of multifactor experiment are considered. The method of classification of plans of multifactor experiment is offered on the basis of SP-transformations, in which principles of standardization and typification, are used rational reduction of processes of the identical functional setting and development of decisions of models, general for the row of processes elements or descriptions are reflected in which. The estimations of amount of model structures of plans and description of classes of equivalence are got. The examples of catalogues of model structures are resulted.

Keywords: multifactor experiment, SP-transformations, combinatorial charts, standardization, typification.