УДК 519.2

Т.В. Редькина[1], Г.А. Лушникова[2]

[1] *Ставропольский государственный университет, Ставрополь*
[2] *Филиал ГОУ ВПО «Московский государственный университет приборостроения и информатики», Ставрополь*

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В статье рассмотрено построение преобразования Бэклунда для солитонного уравнения, полученного в [1].

Ключевые слова: *нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, солитонные уравнения.*

Рассмотрим разработанный Клэрэном метод построения преобразований Бэклунда как общего вида, так и для уравнения

$$\tilde{z}_{\xi\eta} = B_1 \frac{\partial}{\partial\xi} e^{\tilde{z}} + B_2 \frac{\partial}{\partial\eta} e^{\tilde{z}}. \qquad (1)$$

Дифференциальные уравнения второго порядка (1) относится к виду, часто называемому уравнениями Монжа – Ампера

$$\begin{aligned} & f_1(\xi,\eta,z,z_\xi,z_\eta)\, z_{\xi\xi} + f_2(\xi,\eta,z,z_\xi,z_\eta)\, z_{\xi\eta} + \\ & + f_3(\xi,\eta,z,z_\xi,z_\eta)\, z_{\eta\eta} + f_4(\xi,\eta,z,z_\xi,z_\eta) = 0. \end{aligned} \qquad (1a)$$

Преобразование Бэклунда, связывающее два таких уравнения второго порядка для функций $\tilde{z}$ и z, задается парой диф. уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial\xi} = F_1\left(z, \tilde{z}, \frac{\partial\tilde{z}}{\partial\xi}, \frac{\partial\tilde{z}}{\partial\eta} \right), \qquad (2a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial\eta} = F_2\left(z, \tilde{z}, \frac{\partial\tilde{z}}{\partial\xi}, \frac{\partial\tilde{z}}{\partial\eta} \right). \qquad (2b)$$

Для задания явного вида преобразования необходимо найти функции F_1 и F_2. Условие совместности 2а, 2б (равенство смешанных вторых производных) требует, чтобы функции (2) удовлетворяли соотношению

$$\Omega \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial\eta\partial\xi} - \frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = 0\,. \qquad (3)$$

Продифференцировав 2а, 2б по η, ξ соответственно, получим условие совместности в виде

$$\left(-\frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}_\xi}\right)\tilde{z}_{\xi\xi}+\left(\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\xi}-\frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}_\eta}\right)\tilde{z}_{\xi\eta}+\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\eta}\tilde{z}_{\eta\eta}- \\ -\frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}}\tilde{z}_\xi+\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}}\tilde{z}_\eta+F_2\frac{\partial F_1}{\partial z}-F_1\frac{\partial F_2}{\partial z}=0. \tag{5}$$

Функцию $\tilde{z}$ считаем удовлетворяющей уравнению (1). Тогда, пока хотя бы один из коэффициентов

$$\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\eta},\quad \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}_\xi}\ \text{или}\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\xi}-\frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}_\eta}\right)$$

не равен нулю, уравнение (5) является дифференциальным уравнением в частных производных для функции $\tilde{z}$ и содержит полный набор вторых производных $\tilde{z}_{\eta\eta}$, $\tilde{z}_{\xi\xi}$ $\tilde{z}_{\xi\eta}$.

Предположим

$$\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\eta}=0,\ \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}_\xi}=0. \tag{6}$$

Равенство (5) после подстановки (6) и (1) примет вид

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\xi}-\frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}_\eta}\right)\left(B_1\frac{\partial}{\partial\xi}e^{\tilde{z}}+B_2\frac{\partial}{\partial\eta}e^{\tilde{z}}\right)- \\ -\frac{\partial F_2}{\partial \tilde{z}}\tilde{z}_\xi+\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}}\tilde{z}_\eta+F_2\frac{\partial F_1}{\partial z}-F_1\frac{\partial F_2}{\partial z}=0. \tag{7}$$

Определим, какова должна быть зависимость функций F_1, F_2 от $\tilde{z}_\eta$ $\tilde{z}_\xi$.

Для этого продифференцируем (2а) по η, учитывая, что $\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\eta}\tilde{z}_{\eta\eta}=0$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial F_1}{\partial z}F_2+\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}}\tilde{z}_\eta+ \\ +\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}_\xi}\left(B_1\frac{\partial}{\partial\xi}e^{\tilde{z}}+B_2\frac{\partial}{\partial\eta}e^{\tilde{z}}\right)=R(z,\ z_\xi,\ z_\eta). \tag{8}$$

Продифференцировав (8) по $\tilde{z}_\eta$ дважды, получим

$$\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{z}}\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{z}_\eta^2}=0.$$

Проделав аналогичную работу для равенства (2б), но дифференцируя сначала по ξ и дважды по $\tilde{z}_\xi$, получим

$$\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{z}_\xi^2}=0.$$

Предположим $\frac{\partial F_2}{\partial z}\neq 0$, $\frac{\partial F_1}{\partial z}\neq 0$. Следовательно, функции F_1, F_2 имеют линейный вид относительно $\tilde{z}_\eta$ и $\tilde{z}_\xi$ соответственно, тогда (2а, б) можно переписать в виде

$$\frac{\partial z}{\partial\xi}=f_1(z,\tilde{z})+p_1(z,\tilde{z})\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\xi}, \tag{9а}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\eta}=f_2(z,\tilde{z})+p_2(z,\tilde{z})\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\eta}, \tag{9б}$$

f_1, f_2, p_1, p_2 – пока произвольные функции, которые будут уточняться в дальнейшем рассуждении.

Вернемся к условию совместности (7) с новым видом функций F_1 и F_2 (9):

$$(p_1-p_2)\ B_1e^{\tilde{z}}\tilde{z}_\xi+B_2e^{\tilde{z}}\tilde{z}_\eta\ -\frac{\partial(f_2+p_2\tilde{z}_\eta)}{\partial\tilde{z}}\tilde{z}_\xi+ \\ +\frac{\partial(f_1+p_1\tilde{z}_\xi)}{\partial\tilde{z}}\tilde{z}_\eta+(f_2+p_2\tilde{z}_\eta)\frac{\partial(f_1+p_1\tilde{z}_\xi)}{\partial z}- \\ -(f_1+p_1\tilde{z}_\xi)\frac{\partial(f_2+p_2\tilde{z}_\eta)}{\partial z}=0. \tag{10}$$

Уточним вид p_1 и p_2, для этого продифференцируем выражение по $\tilde{z}_\eta$, а затем по $\tilde{z}_\xi$:

$$\frac{\partial p_1}{\partial\tilde{z}}+p_2\frac{\partial p_1}{\partial z}=p_1\frac{\partial p_2}{\partial z}+\frac{\partial p_2}{\partial\tilde{z}}. \tag{11}$$

В результате получено уравнение в частных производных, содержащее только функции p_1 и p_2. Очевидно, что его решение может быть выбрано неоднозначно. Выберем p_1 и p_2 так, чтобы

$$p_1-p_2=\varphi(z),\quad \frac{p_1}{p_2}=\psi(\tilde{z}),$$

тогда

$$p_1=\frac{\varphi(z)\psi(\tilde{z})}{\psi(\tilde{z})-1},\quad p_2=\frac{\varphi(z)}{\psi(\tilde{z})-1},$$

при этом равенство (11) выполняется тождественно.

Выполним подстановку полученных элементов p_1 и p_2 в равенство (10) и сгруппируем элементы с $\tilde{z}_\eta$ и $\tilde{z}_\xi$, получим:

$$\left(\varphi(z)B_1e^{\tilde{z}}+f_2\frac{\psi(\tilde{z})}{\psi(\tilde{z})-1}\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}-\frac{\varphi(z)\psi(\tilde{z})}{\psi(\tilde{z})-1}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\tilde{z}_\xi+ \\ +\left(\varphi(z)B_2e^{\tilde{z}}+\frac{\partial f_1}{\partial\tilde{z}}+\frac{\varphi(z)}{\psi(\tilde{z})-1}\frac{\partial f_1}{\partial z}-f_1\frac{1}{\psi(\tilde{z})-1}\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\right)\tilde{z}_\eta+ \\ +\left(f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}-f_1\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)=0. \tag{12}$$

Очевидно, что равенство (12) распадается на систему

$$\begin{cases}\varphi(z)B_1e^{\tilde{z}}-\frac{\partial f_2}{\partial\tilde{z}}+f_2\frac{\psi(\tilde{z})}{\psi(\tilde{z})-1}\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}-\frac{\varphi(z)\psi(\tilde{z})}{\psi(\tilde{z})-1}\frac{\partial f_2}{\partial z}=0;\\ \varphi(z)B_2e^{\tilde{z}}+\frac{\partial f_1}{\partial\tilde{z}}+\frac{\varphi(z)}{\psi(\tilde{z})-1}\frac{\partial f_1}{\partial z}-f_1\frac{1}{\psi(\tilde{z})-1}\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}=0;\\ f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}-f_1\frac{\partial f_2}{\partial z}=0.\end{cases} \tag{13}$$

Третье уравнение системы дает $\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{f_1}{f_2}=0$, его решение определим в виде $f_1=\psi_1(\tilde z)g(z)$, $f_2=\psi_2(\tilde z)g(z)$. Выберем самый простой вид функции $g(z)$. Пусть $g(z)=z$, тогда

$$\begin{aligned}f_1&=\psi_1(\tilde z)z;\\ f_2&=\psi_2(\tilde z)z.\end{aligned} \qquad (14)$$

Подставив найденные выражения в систему (13) и решив ее относительно ψ_1 и ψ_2, получим:

$$\psi_1=\left(-B_2e^{\tilde z}+C_2\right),$$

$$\psi_2=\left(B_1e^{\tilde z}+C_1\right),$$

следовательно,

$$\begin{aligned}f_1&=\left(-B_2e^{\tilde z}+C_2\right)z,\\ f_2&=\left(B_1e^{\tilde z}+C_1\right)z.\end{aligned} \qquad (15)$$

Теперь преобразования (9) с учетом (15) и (11), и связь между z и $\tilde z$ принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial\xi}&=\left(-B_2e^{\tilde z}+C_2\right)z+\frac{z\psi(\tilde z)}{\psi(\tilde z)-1}\frac{\partial\tilde z}{\partial\xi};\\ \frac{\partial z}{\partial\eta}&=\left(B_1e^{\tilde z}+C_1\right)z+\frac{z}{\psi(\tilde z)-1}\frac{\partial\tilde z}{\partial\xi}.\end{aligned} \qquad (16)$$

Как видно, таких преобразований существует бесконечно много, т.к. функция $\psi(\tilde z)$ осталась неопределенной. Придадим функции значение $\psi(\tilde z)=2$, чтобы получить самый простой вид преобразований, а постоянные интегрирования C_1, C_2 положим равными нулю, тогда равенства (16) примут вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial\xi}&=-B_2e^{\tilde z}z+2z\frac{\partial\tilde z}{\partial\xi}\\ \frac{\partial z}{\partial\eta}&=B_1e^{\tilde z}z+z\frac{\partial\tilde z}{\partial\eta}\end{aligned} \qquad (17)$$

Очевидно, дифференцируя первое равенство по ξ, а второе – по η и вычитая из первого второе, получим исходное уравнение (1).

Посмотрим, к какому уравнению сведется уравнение (1) при заданном преобразовании Бэклунда вида (17). Для этого необходимо в системе (16) избавиться от $\tilde z$ и ее производных. Разделим обе части равенства (16) на $e^{\tilde z}$:

$$\begin{cases}e^{-\tilde z}z_\xi-2z\tilde z_\xi e^{-\tilde z}=-B_2z;\\ e^{-\tilde z}z_\eta-z\tilde z_\eta e^{-\tilde z}=B_1z.\end{cases} \qquad (18)$$

Очевидно, что во втором равенстве системы (18) можно выделить полную производную по η, и аналогичную структуру можно выделить в первом уравнении.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(ze^{-\tilde z})}{\partial\xi}-z\tilde z_\xi e^{-\tilde z}=-B_2z;\\ \dfrac{\partial(ze^{-\tilde z})}{\partial\eta}=B_1z.\end{cases} \qquad (19)$$

Чтобы выразить $\tilde z$ из полученной системы, введем замену $z=w_\eta$, позволяющую проинтегрировать второе равенство:

$$ze^{-\tilde z}=B_1w\text{, или }\tilde z=\ln\left(\frac{w_\eta}{B_1w}\right).$$

После подстановки полученных элементов в первое уравнение системы, получим равенство, не зависящее от $\tilde z$:

$$2B_1w_\xi w_\eta-B_1w_{\eta\xi}w+B_2w_\eta^2=0. \qquad (20)$$

Итак, доказана следующая

Теорема:

Уравнение (1) с помощью преобразования Беклунда вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial\xi}&=-B_2e^{\tilde z}z+2z\frac{\partial\tilde z}{\partial\xi}\\ \frac{\partial z}{\partial\eta}&=B_1e^{\tilde z}z+z\frac{\partial\tilde z}{\partial\eta}\end{aligned}$$

переходит в равенство

$$2B_1w_\xi w_\eta-B_1w_{\eta\xi}w+B_2w_\eta^2=0.$$

Список литературы

1. Редькина Т.В., Карюк А.И., Лушникова Г.А. Нелинейные уравнения в частных производных, имеющие операторную структуру изоспектральной деформации / Т.В. Редькина, А.И. Карюк, Г.А. Лушникова // Системи обробки інформації. – Х.: Харківський університет Повітряних Сил, 2008. – Вып. 2(69). – С. 18-28.

Поступила в редколлегию 28.08.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Бильчук, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

ПЕРЕТВОРЕННЯ БЕКЛУНДА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В ЧАСТКОВИХ ПОХІДНИХ

Т.В. Редькіна, Г.О. Лушнікова

У статті розглянута побудова перетворення Беклунда для солітонного рівняння, отриманого в [1].

***Ключові слова:** нелінійні диференціальні рівняння в часткових похідних, солітонні рівняння.*

BEKLUND'S TRANSFORMATION FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUALIZATION IN PRIVATE DERIVATIVES

T.V. Redkina, G.A. Lushnikova

In the article the construction of Beklund's transformation is considered for soliton equalization, got in [1].

***Keywords:** nonlinear differential equalizations are in private derivatives, soliton equalizations.*