УДК 519.859

Г.Н. Яськов

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ РАЗНЫХ КРУГОВ С ВЫБОРОМ ПЕРСПЕКТИВНЫХ НАЧАЛЬНЫХ ТОЧЕК

В статье рассматривается новый метод решения задачи размещения кругов в прямоугольнике заданных размеров, основанный на построении перспективных начальных точек с помощью "жадного" алгоритма и локальной оптимизации с использованием метода возможных направлений Зонтендейка.

Ключевые слова: *упаковка, круг, прямоугольник, жадный алгоритм, локальный максимум.*

Введение

Задачи упаковки кругов имеют разнообразные практические применения. Например, задача упаковки кругов в круге возникает при прокладке кабеля в каналах и трубах. Также задачи упаковки кругов возникают в лесной промышленности, при транспортировке и складировании. Решение задачи позволяет эффективно использовать ресурсы и уменьшить стоимость работ.

К.Ф. Гаусс доказал, что решетчатая упаковка кругов с максимальной плотностью является гексагональной, т.е. центры кругов размещаются в узлах гексагональной решетки. При этом каждый круг касается шести других кругов. Плотность такой упаковки составляет $\pi/\sqrt{12} \approx 0.91$. В 1940 году венгерский математик Л.Ф. Тот [1] доказал, что гексагональная решетка является самой плотной из всех возможных упаковок кругов, как регулярных, так и нерегулярных.

В статье [2] делается обзор наиболее эффективных моделей и методов для упаковки кругов и шаров. В работе [5] для поиска локально оптимального решения в задачах упаковки используется метод возможных направлений Зонтендейка.

В статьях [3, 4] предложен эффективный алгоритм упаковки кругов различного радиуса, основанный на жадном алгоритме или оптимизации по группам переменных. Авторы предлагают правило MHD (maximal hole degree – “дырки максимального размера”).

В данной работе предлагается метод решения задачи размещения кругов разных радиусов в прямоугольнике заданных размеров. Математическая модель задачи построена таким образом, что радиусы кругов могут быть переменными. Однако глобальное решение поставленной задачи обеспечивает упаковку заданного набора кругов. Для построения начальной точки используется модификация "жадного" алгоритма. В основе модификации лежит правило MHD.

Постановка задачи и математическая модель

Пусть имеется набор кругов C_i, радиусы которых $\overline{r}_i$, $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$, и прямоугольник P с размерами a и b:

$$P = \left\{(x, y) \in R^2,\ 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\right\}.$$

Размещение кругов C_i в пространстве R^2 определяется координатами их центров $u_i = (x_i, y_i)$, $i \in I$:

$$C_i = \left\{(x, y) \in R^2,\ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - \overline{r}_i^2 \le 0\right\}.$$

Задача. Необходимо найти вектор $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in R^{2n}$, который обеспечивает упаковку кругов C_i, $i \in I$, в прямоугольнике P.

Полагаем, что радиусы кругов C_i, $i \in I$, являются переменными. Обозначим их r_i, $i \in I$, соответственно. Тогда решение поставленной задачи сводится к задаче:

$$F(X^*) = \max F(X) \qquad (1)$$

при условии, что $X \in D \subset R^{3n}$, где

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} r_i,\ X = (v, u),$$

$$v = (r_1, r_2, ..., r_n),\ u = (u_1, u_2, ..., u_n), \qquad (2)$$

$$D = \left\{X \in R^{2n} : \Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \ge 0,\ 0 < i < j \in I,\right. \qquad (3)$$

$$\left.\Phi_i(r_i, u_i) \ge 0,\ \overline{r}_i - r_i \ge 0,\ r_i \ge 0,\ i \in I\right\},$$

$$\Phi_i(r_i, u_i) = \min\{x_i - r_i, y_i - r_i, a - x_i - r_i, b - y_i - r_i\},$$

$$\Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) = \left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 - (r_i + r_j)^2,$$

$$0 < i < j \in I.$$

Неравенства $\Phi_i(r_i, u_i) \ge 0$ задают условие размещения кругов C_i, $i \in I$, в прямоугольнике P, а неравенства $\Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \ge 0$ – условие непересечения кругов C_i, $i \in I$, между собой.

Отметим некоторые свойства задачи (1 – 3).

1. Область допустимых решений D определяется линейными и квадратичными неравенствами.

2. Вследствие линейности функции цели $F(X)$ локальные максимумы задачи (1-3) достигаются в крайних точках области допустимых решений D.

3. Задача является NP-трудной.

4. Глобальный минимум задачи $F(X^*) = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i$ соответствует упаковке заданного набора кругов C_i, $i \in I$.

Метод решения

Для решения задачи предлагается модификация метода возможных направлений Зонтедейка [5].

Модификация осуществляется по следующей итеративной формуле:

$$X^{l+1} = X^l + t^l Z^l,\ l = 0, 1, ..., \qquad (4)$$

где $t^l > 0$, $Z^l = (z_1^l, z_2^l, ..., z_{3n}^l)$ – решение задачи линейного программирования:

$$\max \chi \qquad (5)$$

при условии, что $(\chi, Z^l) \in G^l \subset R^{3n+1}$,

$$G^l = \left\{(\chi, Z^l) \in R^{3n+1} : z_1^l \ge 1,\ (\nabla g_i(X^l), Z^l) \ge \chi,\ i \in J^l,\right.$$

$$\left.|z_i^k| \le 1,\ i = 1, 2, ..., 3n + 1\right\}, \qquad (6)$$

g_i – левые части неравенств, входящих в формулу (3), J^l – множество индексов неравенств, активных в точке X^l

Для выбора начальной точки X^0 в (4 – 6) используется "жадный алгоритм", реализуемый по правилу MHD. Суть алгоритма состоит в следующем.

На каждом шаге размещается один круг из заданного набора. На первом шаге первый круг (его номер выбирается случайно) размещается в один из четырех углов прямоугольника. Первый круг считается размещенным, центр его координат фиксируется. После этого определяются максимально возможные радиусы кругов, которые не будут пересекаться с размещенным кругом и касаются тройки объектов из набора: размещенный круг и стороны прямоугольника. Эти круги дают нам "дырки" (hole) в прямоугольнике.

На втором шаге второй круг выбирается из списка неразмещенных кругов таким образом, чтобы он наиболее точно подходил по размеру к какой-нибудь из "дырок". В качестве критерия отбора в работе предлагается оценивать абсолютная величина разности между площадью "дырки" и размещаемого круга. Перебор идет по всем "дыркам" и неразмещенным кругам. Причем, если круг меньше, чем "дырка", он размещается со своим начальным радиусом $\overline{r}_i$. В противном случае, величина радиуса круга выбирается равной радиусу "дырки".

После этого радиус и координаты второго круга фиксируются, снова определяются "дырки" и размещается уже третий круг и т.д. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут размещены все круги из заданного набора.

Для получения разнообразных начальных точек на первых шагах алгоритма, когда радиусы "дырок" значительно больше радиусов размещаемых кругов, выбор номера размещаемого круга осуществляется случайным образом. В противном случае это привело бы к выбору единственной последовательности размещения кругов в порядке убывания их радиусов.

Выбор таких начальных точек позволяет рационально использовать незанятую часть прямоугольника.

Если при решении задачи (1 – 3) имеем $F(X^*) < \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i$, то выполняется поиск новой начальной точки. Такой процесс выполняется до тех пор, пока не будет получен глобальный минимум задачи (1 – 3): $F(X^*) = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i$, гарантирующий размещение всех кругов, или исчерпан выделенный лимит времени.

Численные эксперименты

Для оценки эффективности работы алгоритма были выбраны 2 тестовых примера, предложенных в работах [4].

Расчеты были проведены с использованием процессора P-III (1ГГц).

Пример 1. $n = 25$, $a = 14.3785$, $b = 9$. Радиусы и координаты центров кругов C_i, $i = 1, 2, ..., 25$, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Радиусы и координаты центров кругов C_i, $i = 1, 2, ..., 25$

i	r_i	x_i	y_i
1	1.782	8.0672	7.1673
2	0.833	0.8300	2.0591
3	2.147	9.3488	2.1470
4	0.549	0.1376	1.7027
5	0.997	7.2695	4.5052
6	0.954	13.4245	5.2069
7	0.837	5.6449	8.1630
8	0.991	10.7094	8.0090
9	1.647	1.6691	7.3530
10	1.945	5.2617	1.9451
11	1.547	1.0939	5.4814
12	0.509	7.2517	0.5090
13	1.245	2.4220	3.3983
14	1.362	13.0131	7.5206
15	0.576	13.6811	0.5804
16	0.627	8.8506	4.8760
17	0.595	0.5950	0.6026
18	0.904	0.9040	4.9194
19	0.804	3.9732	8.1888
20	1.812	4.7185	5.6813
21	0.948	12.2021	0.9480
22	1.044	2.4118	1.0440
23	0.589	0.5890	3.4601
24	0.587	2.3625	5.2293
25	1.273	12.6249	3.1284

Упаковка кругов приведена на рис. 1. Плотность упаковки 85.08%. Время счета 15 минут. Улучшение по сравнению с [4], где в качестве функции цели выбирался минимум занятой длины прямоугольника, составило 1.42% по плотности упаковки.

Пример 2. $n = 30$, $a = 17.19681$, $b = 9.5$. Радиусы и координаты центров кругов C_i, $i = 1, 2, ..., 30$, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Радиусы и координаты центров кругов C_i, $i = 1, 2, ..., 30$

i	r_i	x_i	y_i
1	1.275	15.9218	3.1286
2	0.760	0.7600	1.8323
3	1.274	14.1731	1.2740
4	1.374	6.9277	5.3015
5	1.281	15.8096	6.0880
6	1.493	4.4840	3.8021
7	1.044	16.1528	8.4560
8	1.484	13.6795	7.9328
9	1.739	8.9070	7.7610
10	1.180	5.4448	1.1800
11	0.868	3.3094	8.6320
12	1.404	3.1043	6.3693
13	1.085	7.7078	1.0850
14	0.887	16.2992	0.8870
15	0.853	0.8530	6.2086
16	1.237	1.2370	8.2630
17	1.491	1.5040	3.9568
18	0.592	5.0222	5.8165
19	2.050	12.8877	4.4887
20	0.845	11.3595	6.9475
21	0.855	11.4516	8.6450
22	0.527	0.5270	0.5270
23	0.955	6.7553	2.8890
24	1.670	9.3684	3.2833
25	0.564	8.8593	5.4585
26	0.747	10.1671	5.5645
27	1.399	2.8751	1.3990
28	1.292	11.6081	13.4497
29	0.807	9.5792	0.8070
30	1.551	5.6207	7.9183

Соответствующая упаковка кругов приведена на рис. 2. Плотность упаковки 84.61%. Время счета 1 час 15 минут. Улучшение по сравнению с [4] составило 0.24% по плотности упаковки.

Выводы

Очевидно, что построенный метод является эффективным для решения задач упаковки кругов небольшой размерности.

Результаты были получены, благодаря введению дополнительных переменных – радиусов некоторых кругов и учету этого как при построении начальных точек с помощью модификации "жадного" алгоритма, так и при локальной оптимизации.

Направлением дальнейших исследований является построение принципиально новой математической модели на основе увеличения размерности задачи.

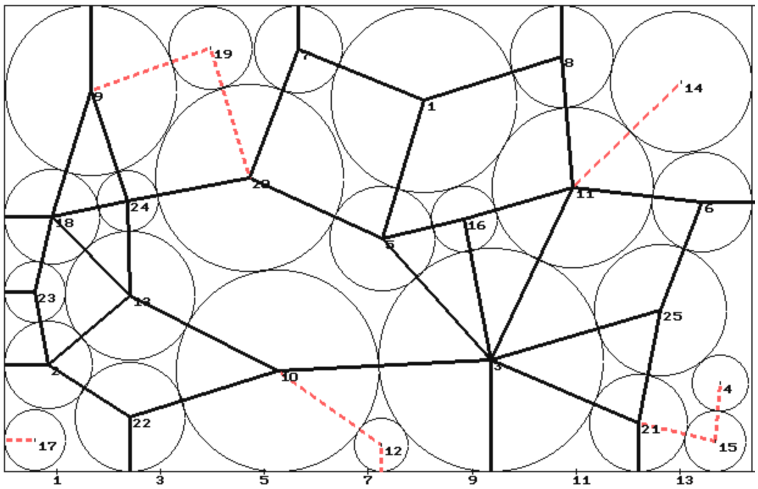

Рис. 1. Упаковка 25 кругов

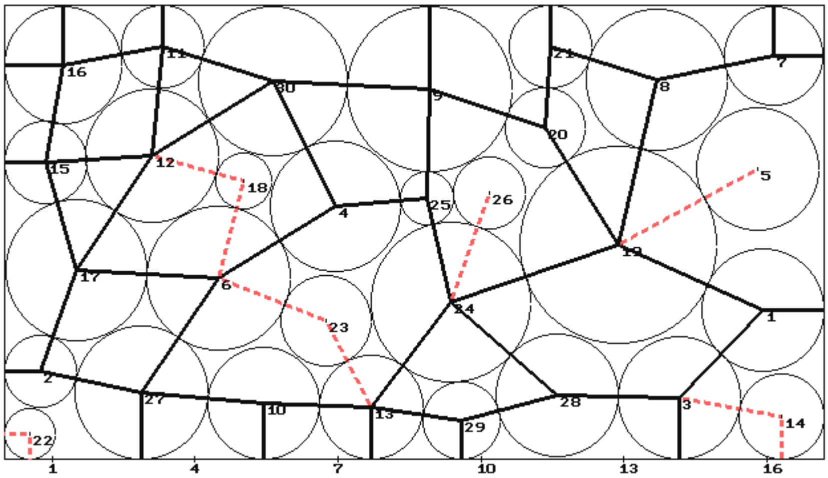

Рис. 2. Упаковка 30 кругов

Список литературы

1. Toth L.F. Über einem geometrischen Satz / L.F. Toth // Mathematische Zeitschrift. – 1940. – № 46. – P. 83-85.

2. Hifi M. A Literature Review on Circle and Sphere Packing Problems: Models and Methodologies / M. Hifi, R. M'Hallah // Advances in Operations Research. – 2009. – Vol. 2009. – 22 p.

3. Huang W.Q. Greedy algorithms for packing unequal circles / W.Q. Huang, Y. Li, H. Akeb, C.M. Li // Journal of the Opreational Research Society. – 2005. – Vol. 56. – P. 539-548.

4. Kubach T. Parallel greedy algorithms for packing unequal circles into a strip or a rectangle / T. Kubach, A. Bortfeldt, H. Gehring // Central European Journal of Operations Research. – 2009. – Vol. 17(4). – P. 461-477.

5. Stoyan Y. Packing Identical Spheres into a Rectangular Parallelepiped / Y. Stoyan, G. Yaskov // A. Bortfeldt, J. Homberger, H. Kopfer, G. Pankratz, R. Strangmeier (Eds.), Intelligent Decision Support. Current Challenges and Approaches. Wiesbaden: Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler | GWV Fachverlage GmbH. – 2008.– P. 46-67.

Поступила в редколлегию 30.07.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Т.Є. Романова, Інститут проблем машинобудування ім. А.Н. Подгорного НАН України, Харків.

МЕТОД РІШЕННЯ ЗАДАЧІ УПАКОВКИ РІЗНИХ КРУГІВ З ВИБОРОМ ПЕРСПЕКТИВНИХ ПОЧАТКОВИХ ТОЧОК

Г.Н. Яськов

У статті розглядається новий метод рішення задачі розміщення кругів в прямокутнику заданих розмірів, заснований на побудові перспективних початкових точок за допомогою "жадібного" алгоритму і локальної оптимізації з використанням методу можливих напрямів Зонтендейка.

Ключові слова: *упаковка, круг, прямокутник, жадібний алгоритм, локальний максимум.*

METHOD OF DECISION OF TASK OF PACKING OF DIFFERENT CIRCLES WITH CHOICE OF PERSPECTIVE INITIAL POINTS

G.N. Yas'kov

In the article the new method of decision of task of placing of circles is examined in the rectangle of the set sizes, based on the construction of perspective initial points by a "avid" algorithm and peep-hole optimization with the use of method of possible directions of Zontendeyk.

Keywords: *packing, circle, rectangle, avid algorithm, local maximum.*