

УДК 519.876.5

С.И. Лапта<sup>1</sup>, О.И. Соловьева<sup>2</sup>, С.С. Лапта<sup>3</sup><sup>1</sup>Харьковский национальный экономический университет, Харьков<sup>2</sup>Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков<sup>3</sup>Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков

## ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОДХОД К ИМИТАЦИОННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ГОМЕОСТАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Предложен новый компартиментный, функционально-структурный подход к имитационному моделированию гомеостатических систем, широко распространенных в различных областях природы, техники и общественных отношений. Получен новый класс математических моделей систем с саморегуляцией одномерной переменной выхода при выведении ее из равновесного состояния под действием внешнего возмущающего фактора, обобщающий функциональную модель Н. Винера “черного ящика”. Эффективность нового подхода продемонстрирована на примере наиболее экспериментально исследованной физиологической системы регуляции углеводного обмена.*

**Ключевые слова:** имитационное моделирование, параметрическая идентификация, последствие в саморегуляции, гомеостатическая система, компартимент.

### Введение

**Постановка проблемы.** Широкая распространенность в различных областях природы, техники и общественных отношений сложных динамических систем, имеющих свойство гомеостатического самосохранения равновесных состояний, обусловила актуальность их эффективного математического описания, которое с необходимостью имеет характер имитационного. Однако оба предложенных до последнего времени подхода к их имитационному моделированию оказались неудовлетворительными: функциональный подход [1] является недостаточным для решения многих теоретических и практических задач, структурно функциональный [2] – неэффективен вследствие гипотетичности и громоздкости.

**Анализ последних достижений и публикаций.** В настоящее время среди разнообразных гомеостатических систем наиболее изученной на концептуальном уровне, наиболее удобной для проверки теоретических выводов является физиологическая система регуляции углеводного обмена [2, 3]. Большинство из до сих пор предложенных имитационных моделей гомеостатических систем были разработаны именно в этой области. При этом все они оказались ограничено адекватными.

**Формулировка цели статьи.** В связи с вышеизложенным представляется целесообразной следующая постановка задачи исследования: развитие теории имитационного моделирования гомеостатических систем на примере наиболее изученной на концептуальном уровне физиологической системы регуляции углеводного обмена.

### Изложение основного материала

Выяснено, что осцилляционное возвращение систем с саморегуляцией к равновесному состоянию обусловлено наличием у них инерционности или последей-

ствия, которое может иметь как интегральный характер, что при математическом моделировании приводит к традиционным обыкновенным дифференциальным уравнениям порядка не ниже второго, так и локальный характер, который естественно описывается дифференциальным уравнением 1-го порядка с запаздывающим аргументом. Хотя существует большой класс гомеостатических систем с локальным последствием, долго этого не замечали и пытались неэффективно описывать такие системы не присущими им обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Неудовлетворительный характер существующих функциональных и гипотетических структурно-функциональных имитационных моделей гомеостатических систем обусловил целесообразность разработки нового компартиментного, функционально-структурного подхода к их построению. Он базируется на следующих принципах, обусловленных существенным недостатком содержательных данных, необходимых для исчерпывающего математического описания морфологии этих систем:

– компартиментное моделирование динамики процессов, которые определяют временную зависимость выходных переменных системы без учета ее морфологии и пространственных координат;

– описание динамики только тех содержательных переменных системы, которые можно практически измерить, с опосредственным функциональным учетом через их значения всех остальных существенных факторов;

– проведение содержательной структурной идентификации модели системы;

– сохранение целостного описания сложных систем при поэтапной декомпозиции их моделей и при повышении их структурированности в функциональном аспекте.

Новизна этого подхода состоит, прежде всего, в трех последних принципах, а также в их сочетании с первым. Этот подход к моделированию предусматривает сначала максимальное упрощение концептуальной содержательной модели гомеостатической системы, оставляя на дальнейшее ее поэтапную декомпозицию, обобщение и развитие. При этом параметрическая идентификация модели (вектора ее параметров  $Z = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_B)$ ) проводится традиционным формальным образом с достижением минимума функционала нормированной невязки выходов системы  $x^O(t)$  и модели  $x^M(t, Z)$  (в случае одномерной переменной выхода), взятых в моменты времени  $t_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), в виде:

$$\Psi(Z) = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{n=1}^N \left( \frac{x^M(t_n, Z) - x^O(t_n)}{x^M(t_n, Z)} \right)^2}, \quad (1)$$

который соответствует методу наименьших квадратов:

$$k = \min_{Z \in \mathbb{R}_+^B} \Psi(Z) = \Psi(\bar{Z}). \quad (2)$$

Это требует выполнения условий, которые обычно обеспечены: ошибки измерений централизованы, независимы и имеют распределение Гаусса. В общем случае многомерного вектора переменной выхода суммирование в функционале (1) обобщается на каждую из его координат, а при переходе от дискретных моментов наблюдения к интервалу времени соответствующая сумма заменяется интегралом.

Полученное при проведении параметрической идентификации модели значение функционала (2) можно считать количественным показателем ее качества. Его достаточно малое значение в некоторой мере свидетельствует также про адекватность модели, хотя не гарантирует ее. Традиционно к этому добавляют еще три качественных содержательных критерия: гомоморфности модели системе, то есть однозначного воспроизведения моделью выходной функции оригинала, а также критериев формы и минимальной математической сложности.

Опыт проведения идентификации математических моделей гомеостатических систем обусловил целесообразность их дополнения следующими новыми критериями. Это:

– критерий содержательного смысла модели, ее соответствия содержательным данным и представлениям;

– критерий глобальности формы, который состоит в выполнении традиционного критерия формы во всех возможных состояниях системы;

– критерий инвариантности структурной и параметрической идентификации модели относительно характера внешних воздействий, выводящих систему из равновесного состояния;

– факторный критерий, в соответствии с которым для адекватной модели значение параметра  $k$  (2) не должно возрастать с повышением уровня учета факторов исследования.

В соответствии с предложенным подходом был получен новый класс математических моделей систем с саморегуляцией одномерной переменной выхода  $u(t)$  при выведении ее из равновесного состояния под действием внешнего возмущающего фактора с интенсивностью  $f(t)$  в виде интегро-дифференциального уравнения:

$$y'(t) = (1 - \alpha)f(t) - \Phi(y'(t)) - \sum_{i=1}^n F_i(y(t - \tau_i)) - F_0\left(\int_{t_0}^t b(s)y(s)ds\right) - k \text{Es}(u(t - \delta) - u_{i\delta}), \quad (3)$$

которое обобщает функциональную модель Н. Винера отрицательной обратной связи ("черного ящика").

В отличие от ее предыдущих усовершенствований в рамках структурно-функционального подхода с морфологическим расчленением исследуемой системы и применением к моделированию ее частей того же функционального подхода с их последующей композицией в условиях недостаточной информации про их взаимосвязи, приводящей к гипотетичности и чрезмерной численности переменных описания, неадекватной возможностям экспериментальной проверки, теперь декомпозиция проводится не в морфологическом, а в функциональном аспекте. При этом в уравнении (3) динамики саморегулируемой переменной, уровень которой устанавливается на равновесном значении, влияние всех промежуточных факторов ее регуляции учтено косвенно через значения ее самой.

Этот класс моделей обобщает известные уравнения переходных процессов в механических системах, в электрических цепях и в технических системах автоматического регулирования. В нем учитываются все возможные типы саморегуляции по параметру  $y(t) = u(t) - u_\delta$  (отклонению переменной  $u(t)$  от ее равновесного значения  $u_\delta$ ): по его текущему значению, в частности с последствием, по его производной  $y'(t)$ , а также по возмущающему фактору  $f(t)$ .

Это последствие вообще может иметь как локальный характер в виде запаздывающих аргументов на время  $\tau_i: F_i(y(t - \tau_i))$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , так и интегральный – с накоплением последствия:

$$F_0\left(\int_{t_0}^t b(s)y(s)ds\right).$$

Учтена также возможность пороговых регуляций относительно пороговых значений переменной  $u_{i\delta}$  с запаздыванием на время  $\delta$  (в уравнении (3) для упрощения показана только одна

из них):  $kEs(u(t-\delta)-u_{i\delta})$ , где  $Es(z) = ze(z)$ , причем  $e(z)$  – единичная функция Хевисайда. Все использованные в модели функции  $\Phi(z)$ ,  $F_i(z)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) имеют такие свойства: они нечетные, обращаются в нуль в нуле, при положительных значениях аргумента принимают положительные значения и возрастают по модулю вместе с модулем аргумента.

Ранее к численному анализу таких уравнений с запаздыванием применяли те же методы, что и для обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом лишь усугублялись известные проблемы сходимости и устойчивости их решений. Вместо усилий по их преодолению эти проблемы были устранены за счет использования имеющегося запаздывания и применения числового аналога на сетке метода шагов, известного ранее для получения аналитического решения этих уравнений.

Проведена содержательная конкретизация математической модели гомеостатической саморегуляции для физиологической системы регуляции углеводного обмена. В функционировании этой регуляционной системы, которая гомеостатически поддерживает уровень глюкозы в крови на равновесном уровне, принимают участие множество физиологических факторов, детально описать которые не представляется возможным. Поэтому для ее описания естественным является уровень общей математической модели саморегуляции гомеостатически сохраняемой переменной выхода, всем элементам и структуре которой был придан содержательный смысл. Для этого был применен компартментно-

функциональный подход, в соответствии с которым вместо бесперспективных попыток описания многофункциональных органов организма с учетом их морфологии и тонкой структуры моделируются только процессы, обеспечивающие гомеостатические свойства, с выделением среди них главных, определяющих факторов и физиологических переменных, доступных для измерения.

### Выводы

В классе математических моделей с саморегуляцией по параметру с последствием локального типа разработана содержательная модель физиологической системы регуляции углеводного обмена. На ее основе построены алгоритмы, реализованные в виде программных модулей, которые разрешают актуальные вопросы клинической медицины по диагностике и терапии сахарного диабета.

### Список литературы

1. Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине: пер. с англ. / Н. Винер. – М.: Сов. радио, 1968. – 328 с.
2. Гомеостатика живого, технических, социальных и экологических систем / Под ред. В.И. Новосельцева. – Новосибирск: Наука, 1990. – 350 с.
3. Гомеостаз на различных уровнях организации биосистем / В.И. Нефедов, А.А. Ясайтис, В.И. Новосельцев и др.; под ред. В.И. Новосельцева. – Новосибирск: Наука, 1991. – 232 с.

Поступила в редколлегию 24.11.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.А. Краснобаев, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко, Харьков.

### ЕФЕКТИВНИЙ ПІДХІД ДО ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ГОМЕОСТАТИЧНИХ СИСТЕМ

С.І. Лапта, О.І. Соловйова, С.С. Лапта

*Запропоновано новий компартментний, функціонально-структурний підхід до імітаційного моделювання гомеостатичних систем, поширених у різних областях природи, техніки та суспільних відносин. Отримано новий клас математичних моделей систем із саморегуляцією одновимірної змінної виходу у разі її виведення з рівноважного стану під дією зовнішнього збурюючого фактора, що узагальнює функціональну модель Н. Вінера "чорної скриньки". Ефективність нового підходу продемонстровано на прикладі найбільш експериментально дослідженої фізіологічної системи регуляції вуглеводного обміну.*

**Ключові слова:** імітаційне моделювання, параметрична ідентифікація, післядія у саморегуляції, гомеостатична система, компартмент.

### THE EFFECTIVE METHOD OF APPROACH TO THE IMITATIVE MODELING OF THE HOMOEOSTATIC SYSTEMS

S.I. Lapta, O.I. Solovjova, S.S. Lapta

*The new compartment functionally-structural method of approach to the imitative modeling of the homoeostatic systems, widespread in the different areas of nature, technique and public relations, was offered. The new class of mathematical models of the systems with self-regulation of one-dimensional variable of exit at the leading out of it from the equilibrium state under the action of external disturbing factor, summarizing the functional model of N. Wiener's "black box", was got. The efficiency of new approach is shown on the example of the most experimentally investigated physiological system of carbohydrate exchange regulation.*

**Keywords:** imitative model, parametric identification, after-action in self-regulation, homoeostatic system, compartment.