УДК 519.876.5

О.И. Соловьева[1], С.И. Лапта[2], С.С. Лапта[3], Н.С. Бутенко[4]

[1]Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков
[2]Харьковский национальный экономический университет, Харьков
[3]Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков
[4]Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТИ СХЕМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Проведено исследование погрешности схемы численного решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом в виде многошаговой рекуррентной формулы, полученной при его решении новым численно-аналитическим методом с применением интерполяционного многочлена Ньютона в конце таблицы. Вычисления решения по рекуррентной формуле при повышении порядка интерполяционного многочлена подтвердили сходимость их результатов к значению, которое с большой точностью практически достигается на седьмом шаге. При этом практически всегда достаточную точность счета обеспечивает применение простой формулы линейной интерполяции.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, численный анализ, рекуррентная формула, погрешность вычислений.*

Введение

Постановка проблемы. Известно, что компартментный функционально-структурный подход к математическому моделированию гомеостатических систем, широко распространенных в различных областях природы, техники и общественных отношений, приводит к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом, которые в общем случае необходимо решать численно. В связи с известной неэффективностью применения для этого традиционных методов вычислений [1] актуальной является проблема их численного анализа.

Анализ последних достижений и публикаций. Авторами настоящей статьи в работе [2] был предложен численно-аналитический метод решения дифференциального уравнения 1-го порядка с запаздывающим аргументом, отличающийся от известных тем, что значения искомой функции в узлах равномерной фиксированной сетки находятся по многошаговой рекуррентной формуле, полученной при интегрировании интерполяционного многочлена Ньютона.

Формулировка цели статьи. В связи с выше изложенным представляется целесообразным получение практической оценки достигаемой точности вычислений по предложенной схеме численного решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, ее зависимости от степени интерполяционного многочлена.

Изложение основного материала

Дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом гомеостатической саморегуляции имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} & y' = \varphi(t); \qquad t \ge 0; \\ & \varphi(t) = (1-\alpha)\cdot f(t) - \beta\cdot y(t-\tau) - \gamma\cdot \mathrm{Es}\big(y(t-\delta)\big); \quad (1) \\ & y(t) = \phi(t); \quad -\max(\tau,\delta) \le t < 0, \end{aligned}$$

где $y(t)$ – отклонение гомеостатически сохраняемой переменной $u(t)$ от ее равновесного значения u_p: $y(t) = u(t) - u_p$; $\tau \ge \delta > 0$ – два времени запаздывания; пороговая функция $\mathrm{Es}(z) = z\cdot e(z)$ определяется как произведение ее аргумента на единичную функцию Хевисайда $e(z)$; $f(t)$ и $\varphi(t)$ – известные функции.

Параметрическая идентификация модели (1) (вектора ее числовых параметров $Z = (\alpha, \beta, \gamma)$) проводится традиционным формальным образом по достижению минимума функционала нормированной невязки выходов системы $u^o(t)$ и модели $u^M(t, Z)$, взятых в моменты времени t_n $(n = 1, 2, 3, ..., N)$ в виде:

$$\Phi(Z) = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{u^M(t_n, Z) - u^o(t_n)}{u^M(t_n, Z)}\right)^2}, \quad (2)$$

который соответствует методу наименьших квадратов:

$$k = \min_{Z \in R_+^B} \Phi(Z) = \Phi(\bar{Z}). \quad (3)$$

Это предусматривает выполнение требований, которые обычно выполняются: ошибки измерений центрированные, независимые и имеют гауссово распределение.

Полученное при проведении параметрической идентификации модели значение функционала (3) можно считать количественным показателем ее качества. Его достаточно малое значение некоторым образом свидетельствует также про адекватность модели, хотя и не гарантирует ее. Традиционно этот показатель дополняют еще тремя качественными критериями адекватности из содержательных соображений: гомоморфности модели объекту, т.е. однозначности воспроизведения моделью выходной функции оригинала, а также выполнение критериев формы и минимальной математической сложности.

Наш опыт проведения идентификации математических моделей гомеостатических систем с разным уровнем учета факторов их экспериментального исследования (способов выведения их из равновесного состояния и объема множества измерений), недостаточная эффективность существующих формальных методов идентификации, а также и традиционных качественных критериев адекватности модели объекту обусловил целесообразность их дополнения такими критериями:

– критерий содержательного смысла модели, ее соответствия содержательным данным и представлениям;

– критерий глобальности формы, состоящий в выполнении традиционного критерия формы во всех возможных обстоятельствах;

– критерий инвариантности структурной и параметрической идентификации модели относительно характера внешнего воздействия;

– факторный критерий, в соответствии с которым для адекватной модели значения количественного параметра адекватности k (2) не должно возрастать с увеличением уровня учета факторов исследования.

Ранее к численному анализу таких уравнений (1) применяли те же методы, что и для обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом только усложнялись известные проблемы сходимости и устойчивости их решения. Вместо усилий по их преодолению мы устранили их благодаря существенному использованию имеющегося запаздывания и применения численного аналога на сетке метода шагов, известного ранее для получения аналитического решения этих уравнений. При этом дифференциальное уравнение (1) было сведено к последовательному определению значений неизвестной функции в узлах равномерной сетки с постоянным шагом h по формуле неопределенного интеграла с использованием ранее найденных их значений в предыдущих узлах и интерполяционной формулы Ньютона в конце таблицы (начальный шаг сетки произвольный, но не превышающий времени запаздывания δ, которое для удобства было взято кратным к значению h):

$$\begin{aligned} y^{(k)}(t_{i+1}) = y^{(k)}(t_i) + h\Big[\frac{1}{2}(\varphi_{i+1}+\varphi_i) - \frac{1}{12}\Delta^2\varphi_{i-1} - \\ -\frac{1}{24}\Delta^3\varphi_{i-2} - \frac{19}{720}\Delta^4\varphi_{i-3} - \frac{3}{160}\Delta^5\varphi_{i-4} - \\ -\frac{1}{70}\Delta^6\varphi_{i-5} - \frac{275}{24192}\Delta^7\varphi_{i-6} + \ldots + A_k\Delta^k\varphi_{i+1-k}\Big] + \\ +R_{i+1,k}; \quad i = 0,1,2,\ldots,N; \quad k \ge 2, \end{aligned} \qquad (4)$$

где: $\Delta^m\varphi_i \ (m = 2,3,4,\ldots)$ – конечные (нисходящие) разности второго и более высоких порядков; A_k и $R_{i+1,k}$ – остаточные члены, определяющие погрешность, убывающие с ростом степени интерполяционного многочлена Ньютона k не хуже, чем $k^{-1,35}$.

Для оценки практической точности вычислений было проведено сопоставление результатов счета, полученных по формуле (4) при $h = 1 \ (t_i \equiv i)$ и внешнем возмущении $f(t)$ в виде прямоугольного импульса в процессе повышения степени интерполяционного многочлена $k = 1, 2, 3, \ldots$ Они частично представлены в табл. 1 и наглядно приведены на рис. 1.

Как и следовало ожидать, результаты счета по формуле (4) подтвердили возрастание его точности с повышением порядка интерполяционного многочлена. При этом формула (4) при $k = 5$ всегда обеспечивает абсолютную точность счета не хуже, чем 10^{-5}, что вполне достаточно для прикладных задач.

Таблица 1

Значения решения (7) на некоторых шагах вычислений i и различных порядках интерполяционного многочлена

i	Степень k интерполяционного многочлена						
	первая	вторая	третья	четвертая	пятая	шестая	седьмая
10	5,05500	5,05498	5,05496	5,05491	5,05482	5,05670	5,04883
50	18,70208	18,70187	18,70187	18,70188	18,70192	18,70201	18,70183
100	0,79359	0,79359	0,79359	0,79359	0,79359	0,79359	0,79359
150	-3,89454	-3,89453	-3,89453	-3,89453	-3,89453	-3,89453	-3,89452
200	-2,21331	-2,21331	-2,21331	-2,21331	-2,21331	-2,21331	-2,21331
250	-0,81959	-0,81959	-0,81959	-0,81959	-0,81959	-0,81959	-0,81959

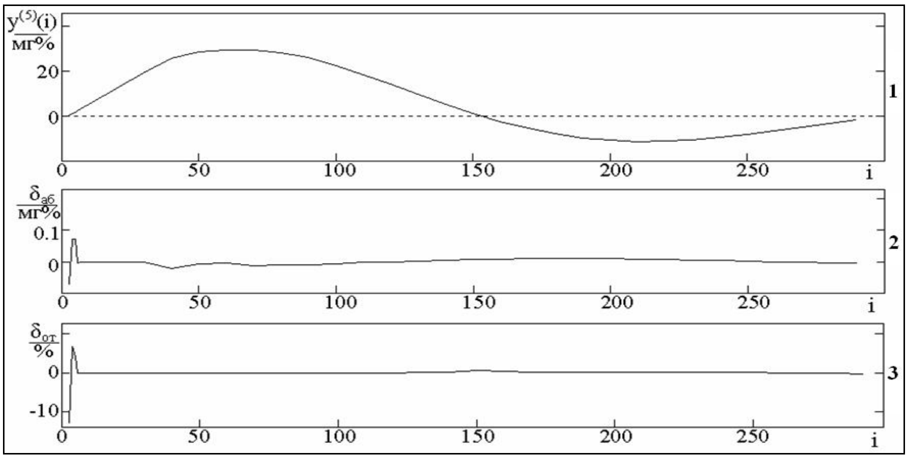

Рис. 1. Абсолютная и относительная погрешности применения формулы линейной интерполяции (5) в % от "точного" значения, полученного при использовании интерполяционного полинома 7 степени, в зависимости от шага вычислений i : 1 – "точное" значение $y^{(7)}(i)$;
2 – абсолютная $\delta_{аб}(i) = y^{(1)}(i) - y^{(7)}(i)$, 3 – относительная $\delta_{от}(i) = \delta(i) / y^{(7)}(i)$ погрешности

Несколько худшие результаты дает применение формулы (4) при k, равном 2 – 4. Наибольшие абсолютную и относительную погрешности, особенно в первые минуты, дает применение формулы линейной интерполяции при $k = 1$:

$$y^{(1)}(i+1) = y^{(1)}(i) + \frac{1}{2}\left(\varphi_{i+1} + \varphi_i\right). \qquad (5)$$

Однако даже она после десятой минуты обеспечивает относительную точность не хуже 0,1%, что наглядно представлено кривыми 2 и 3 на рис. 1. Поэтому для практических целей, по-видимому, вполне достаточно и ее применение.

Выводы

Таким образом, выяснено, что при численном решении дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом новым методом, сводящим его к вычислениям по многошаговой рекуррентной формуле вполне достаточно ограничиться случаем простой линейной интерполяции.

Список литературы

1. *Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1991. – 304 с.*
2. *Лапта С.И. Аналитическое решение одного дифференциально-разностного уравнения динамики гликемии / С.И. Лапта // АСУ и приборы автоматики. – Х.: ХНУРЭ. – 2002. – № 121. – С. 25-29.*

Поступила в редколлегию 6.12.2010

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. С.В. Смеляков, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОХИБКИ СХЕМИ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З АРГУМЕНТОМ, ЩО СПІЗНЮЄТЬСЯ

О.І. Соловйова, С.І. Лапта, С.С. Лапта, Н.С. Бутенко

Проведено дослідження похибки схеми чисельного розв'язку диференціального рівняння з аргументом, що спізнюється, у вигляді багатокрокової рекурентної формули, отриманої при його розв'язку новим чисельно-аналітичним методом із застосуванням інтерполяційного многочлена Ньютона у кінці таблиці. Обчислення розв'язку за рекурентною формулою при підвищенні порядку інтерполяційного многочлена підтвердило збіжність їх результатів до значення, яке з великою точністю практично досягається на сьомому кроці. При цьому практично завжди достатню точність рахунку забезпечує застосування простої формули лінійної інтерполяції.

Ключові слова: *диференціальне рівняння з аргументом, що спізнюється, чисельний аналіз, рекурентна формула, похибка обчислень.*

THE RESEARCH OF AN ERROR OF THE NUMERICAL SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION WITH DELAY ARGUMENT

O.I. Solovjova, S.I. Lapta, S.S. Lapta, N.S. Butenko

The research of an error of the numerical solution of the differential equation with delay argument is carried out. This solution is received by a new numerically-analytical method with using of interpolated multinomial of Newton at the end of the table and has a form of the multistage recurrent formula. Under raising an order of the interpolator multinomial, the formula calculations have confirmed with the great accuracy the convergence of their results to value, which is practically reached on the seventh step. The using of the simple formula of linear interpolation is provided with sufficient accuracy of the calculation.

Keywords: *the differential equation with late argument, the numerical analysis, the recurrent formula, an error of calculations.*