УДК 532/534:001.8

О.О. Юрченко

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

РОЗРАХУНОК ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ

В статті викладається метод дослідження вимушених коливань механічних систем за допомогою апарата, який заснований на рівняннях Лагранжа другого роду. Розглянуті дискретні системи з n ступенями вільності під дією гармонічних обурюючих сил.

Ключові слова: *дискретна система, гармонічна сила, квадратична форма.*

Вступ

Основою математичної моделі при розрахункових дослідженнях вимушених коливань є система диференціальних рівнянь, яку в залежності від типу конкретної інженерної задачі, можна скласти за допомогою основних законів та принципів механіки.

В роботі [1] розглядався спосіб вивчення руху нелінійних коливань дискретних механічних систем за допомогою диференціальних рівнянь, які складалися на основі теорії загальних теорем динаміки. Однак, це не єдиний шлях дослідження коливальних рухів механічних систем.

В інженерній практиці деякі силові елементи літальних апаратів та окремі їх конструкції при розрахунках можна уявити як дискретні моделі, які мають велику кількість ступенів вільності і працюють в умовах вимушених коливань. Для отримання диференціальних рівнянь руху лінійних коливальних систем більш ефективним являється метод, який заснований на теорії рівнянь Лагранжа другого роду.

Перевага рівнянь Лагранжа у порівнянні з іншими методами (принцип Д'Аламбера, загальні теореми динаміки) полягає в тому, що при їх використанні складові в системі диференціальних рівнянь руху отримуються автоматично. Вони можуть мати фізичний зміст лінійних пружних сил, мас або моментів інерції, які залежать від узагальнених координат або лінійних сил опору.

Необхідні і достатні умови використання рівнянь Лагранжа – це можливість уявити кінетичну і потенціальну енергії механічної системи, а також дисипативну функцію Релея у вигляді квадратичних форм відносно узагальнених координат і узагальнених швидкостей.

Основна частина

Розглянемо вимушені коливання лінійної механічної системи з n ступенями вільності під дією узагальненої обурюючої сили, яка змінюється за гармонічним законом:

$$Q_k = H_k \sin pt. \qquad (1)$$

Рівняння Лагранжа другого роду для випадку стаціонарних голономних і утримуючих в'язей записується таким чином:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \qquad k = 1, 2, ..., n, \qquad (2)$$

де T – кінетична енергія системи, яка визначається через узагальненні координати і узагальненні швидкості;

q_k; $\dot q_k$ – узагальнені координати і узагальнені швидкості;

Q_k – узагальнена сила, яка відповідає k-й узагальненій координаті;

n – кількість ступенів вільності системи.

В аналітичній механіці найбільш поширений спосіб відношення узагальненої сили для консервативної системи заснований на понятті потенціальної енергії, яку треба виразити через узагальнені координати

$$Q_p = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}, \qquad k = 1, 2, ..., n, \qquad (3)$$

де $\Pi(q_1, ..., q_n)$ – потенціальна енергія системи з n ступенями вільності.

В подальшому скористаємось виразами кінетичної енергії T, потенціальної енергії П, а також функцією Релея Ф для механічної системи з n ступенями вільності.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot q_i \dot q_j; \quad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot q_i \dot q_j;$$
$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\dot q_i \dot q_j. \qquad (4)$$

Узагальнену силу опору визначимо через дисипативну функцію за формулою

$$Q_\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot q_k}. \qquad (5)$$

При наявності в механічній системі потенціальних і обурюючих сил кожну узагальнену силу можна уявити у вигляді суми

$$Q_k = Q_p + Q_{\hat{o}},$$

де Q_p – визначається за формулою (3), а $Q_{\hat{o}}$ – за формулою (5).

За допомогою невизначених множників рівняння Лагранжа можна узагальнити і на системи з неголономними в'язами. При наявності неутримуючих в'язей, від яких в даному вібраційному процесі можна позбавитись, рівняння Лагранжа використовуються на кожному інтервалі часу, де кількість ступенів вільності не змінюється.

Виконуючи операції, які зазначені в рівнянні Лагранжа, отримаємо систему диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат $q_1, q_2, ..., q_n$, яка має вигляд

$$\begin{aligned} &a_{11}\ddot{q}_1 + b_{11}\dot{q}_1 + c_{11}q_1 + ... + a_{1n}\ddot{q}_n + b_{1n}\dot{q}_n + c_{1n}q_n = H_1 \sin pt; \\ &a_{21}\ddot{q}_1 + b_{21}\dot{q}_1 + c_{21}q_1 + ... + a_{2n}\ddot{q}_n + b_{2n}\dot{q}_n + c_{2n}q_n = \dot{H}_2 \sin pt; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}\ddot{q}_1 + b_{n1}\dot{q}_1 + c_{n1}q_1 + ... + a_{nn}\ddot{q}_n + b_{nn}\dot{q}_n + c_{nn}q_n = \dot{H}_n \sin pt. \end{aligned} \tag{6}$$

Це система лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку, яка має рішення

$$q_k(t) = q_{1k}(t) + q_{2k}(t), \tag{7}$$

де $q_{1k}(t)$ – загальне рішення однорідної системи рівнянь, яке відображує вільні коливання і залежить від початкових умов руху і коефіцієнтів опору.

Як і для випадку вільних затухаючих коливань систем з одним ступенем вільності, можна відмітити, що всі складові функції $q_{1k}(t)$ на протязі декілька коливань зменшуються практично до нуля і тому в зоні встановлених вимушених коливань їх можна не враховувати.

Друга складова q_{2k} являє собою часткове рішення системи (6), яке шукається у вигляді

$$q_k = \hat{O}_k' \sin pt + \hat{O}_k'' \cos pt. \tag{8}$$

Для визначення значень $\hat{O}_k'$ і $\hat{O}_k''$ треба рішення (8) підставити в систему (6) і прирівняти коефіцієнти перед однаковими функціями $\sin pt$ і $\cos pt$, тобто

$$\begin{aligned} &\left(c_{ik} - a_{ik}p^2\right)\hat{O}_1' \sin pt + b_{ik}p\hat{O}_1' \cos pt + \\ &+\left(c_{ik} - a_{ik}p^2\right)\hat{O}_2' \sin pt + b_{ik}p\hat{O}_2' \cos pt + \\ &+\left(c_{ik} - a_{ik}p^2\right)\hat{O}_1'' \cos pt - b_{ik}p\hat{O}_1'' \sin pt + \\ &+\left(c_{ik} - a_{ik}p^2\right)\hat{O}_2'' \cos pt - b_{ik}p\hat{O}_2'' \sin pt = H_k \sin pt. \end{aligned} \tag{9}$$

Очевидно, що при відсутності тертя при $b_{ik} = 0 \ (i, k = 1, 2, ..., n)$ всі $\hat{O}_k''$ дорівнюють нулю.

Прирівнюючи в системі рівнянь(9) відповідні коефіцієнти запишемо основні співвідношення для механічної системи, наприклад, з двома ступенями вільності:

$$\begin{aligned} &\left(c_{11} - a_{11}p^2\right)\hat{O}_1' - b_{11}p\hat{O}_1'' + \left(c_{12} - a_{12}p^2\right)\hat{O}_2' - b_{12}p\hat{O}_2'' = H_1; \\ &b_{11}p\hat{O}_1' + \left(c_{11} - a_{11}p^2\right)\hat{O}_1'' + b_{12}p\hat{O}_2' + \left(c_{12} - a_{12}p^2\right)\hat{O}_2'' = 0; \\ &\left(c_{21} - a_{21}p^2\right)\hat{O}_1' - b_{21}p\hat{O}_1'' + \left(c_{22} - a_{22}p^2\right)\hat{O}_2' - b_{22}p\hat{O}_2'' = H_2; \\ &b_{21}p\hat{O}_1' + \left(c_{21} - a_{21}p^2\right)\hat{O}_1'' + b_{22}p\hat{O}_2' + \left(c_{22} - a_{22}p^2\right)\hat{O}_2'' = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

В результаті отримаємо систему чотирьох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих величин.

Записані співвідношення (10) досить легко узагальнюються на системі з будь-яким числом ступенів вільності. Причому в даному випадку більш зручною виявляється матрична форма записи співвідношень. Вводячи матриці A, B і C, отримаємо

$$\grave{A} = \begin{vmatrix} \grave{a}_{11} \ \grave{a}_{12} \ ... \ \grave{a}_{1n} \\ \grave{a}_{21} \ \grave{a}_{22} \ ... \ \grave{a}_{2n} \\ \grave{a}_{n1} \ \grave{a}_{n2} \ ... \ \grave{a}_{nn} \end{vmatrix}; \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} \ b_{12} \ ... \ b_{1n} \\ b_{21} \ b_{22} \ ... \ b_{2n} \\ b_{n1} \ b_{n2} \ ... \ b_{nn} \end{vmatrix};$$

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} \ c_{12} \ ... \ c_{1n} \\ c_{21} \ c_{22} \ ... \ c_{2n} \\ c_{n1} \ c_{n2} \ ... \ c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Позначаючи матрицю-стовпець зовнішніх сил у вигляді $\tilde{H} = \text{colon}\{H_1, ..., H_n\}$, запишемо систему рівнянь (6) таким чином:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = \tilde{H} \sin pt, \tag{11}$$

де $q = \text{colon}\{q_1, ..., q_n\}$.

Підставимо в рівняння (11) значення

$$q = \tilde{O}' \sin pt + \tilde{O}'' \cos pt,$$

де $\tilde{O}' = \text{colon}\{\tilde{O}_1', ..., \tilde{O}_n'\}$;

$$\tilde{O}'' = \text{colon}\{\tilde{O}_1'', ..., \tilde{O}_n''\}.$$

В результаті отримаємо векторне рівняння, яке має вигляд

$$-\text{À}\text{ð}^2\left(\tilde{O}'\sin pt+\tilde{O}''\cos pt\right)+$$
$$+\hat{A}\text{ð}\left(-\tilde{O}'\cos pt+\tilde{O}''\sin pt\right)+$$
$$+C\left(\tilde{O}'\sin pt+\tilde{O}''\cos pt\right)=H\sin pt.$$

Прирівнюючи нулю коефіцієнти при однакових тригонометричних функціях, отримаємо два векторних рівняння:

$$\left(C-Ap^2\right)\tilde{O}'+\hat{A}\tilde{O}''\text{ð}=\tilde{\Gamma},$$
$$-\hat{A}\tilde{O}'\text{ð}+\left(C-Ap^2\right)\tilde{O}''=0.$$

Якщо тертя відсутнє, то B=0 і $\tilde{O}''=0$, а вектор-стовпець амплітуд коливань в рішенні (8) перед синусом визначається із системи рівнянь

$$\left(C-Ap^2\right)\tilde{O}'=\tilde{\Gamma}.$$

В якості приклада розглянемо крутильні коливання двохступінчастого редуктора вертольота під дією пари сил, яка прикладена до першого зубчастого колеса з діючим моментом $\text{Ì}\ \cos pt$. На другу масу діє момент сил опору $M_{op}=-\beta_2\dot{\varphi}_2$. Моменти інерції коліс дорівнюють I_1 і I_2, жорсткості ділянок валів відповідно $\tilde{n}_1$ і $\tilde{n}_2$.

Оскільки головними будуть крутильні коливання, то розглянемо модель жорстких дисків, в якій пружні властивості вала зберігаються такими, як і в початковому валу [2].

Вибираючи за узагальнені координати кути обертання на першій і другій ділянці $q_1=\varphi_1$ і $q_2=\varphi_2$, рівняння руху можна записати таким чином

$$I_1\ddot{\varphi}_1=-\tilde{n}_1\varphi_1-\tilde{n}_2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+\text{Ì}\ \cos pt;$$
$$I_2\ddot{\varphi}_2=\tilde{n}_2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)-\beta_2\dot{\varphi}_2.$$

Вважаючи $\varphi_k=\hat{O}'_k\sin pt+\hat{O}''_k\cos pt\ (k=1,2)$, після перетворень отримаємо систему рівнянь

$$\left(\tilde{n}_1+\tilde{n}_2-I_1p^2\right)\hat{O}'_1-\tilde{n}_2\hat{O}'_2=0;$$
$$\left(\tilde{n}_1+\tilde{n}_2-I_1p^2\right)\hat{O}''_1-\tilde{n}_2\hat{O}''_2=\text{Ì};$$
$$-\tilde{n}_2\hat{O}'_1+\left(\tilde{n}_2-I_2p^2\right)\hat{O}'_2-\beta_2\text{ð}\hat{O}''_2=0;$$
$$-\tilde{n}_2\hat{O}''_1+\beta_2\text{ð}\hat{O}'_2+\left(\tilde{n}_2-I_2p^2\right)\hat{O}''_2=0.$$

Розв'язання цієї системи дає такі значення амплітуд коливань інерційних систем:

$$\hat{O}_1=\sqrt{\left(\hat{O}'_1\right)^2+\left(\hat{O}''_1\right)^2}=\frac{\text{Ì}\ \sqrt{\left(\tilde{n}_2-I_2p^2\right)^2+\left(\beta_2p\right)^2}}{\text{Ä}};$$

$$\hat{O}_2=\frac{\text{Ì}\ \tilde{n}_2}{\text{Ä}};$$

$$\text{äå}\ \ \text{Ä}=\Big\{\Big[I_1I_2p^4-\left(I_1\tilde{n}_2+I_2\tilde{n}_1+I_2C_2\right)p^2+\tilde{n}_1\tilde{n}_2\Big]^2+$$
$$+\beta_2^2p^2\left(\tilde{n}_1+\tilde{n}_2-I_1p^2\right)^2\Big\}^{1/2}.$$

Висновок

Таким чином, із проведених досліджень видно, що суттєвою перевагою рівнянь Лагранжа другого роду є можливість автоматичної дискретизації практично будь-яких механічних систем, у той час як при інших методах складання диференціальних рівнянь руху ця операція здійснюється за більш складною процедурою. Крім того, лінійні диференціальні рівняння відносно узагальнених координат задовільно описують коливальні процеси, які відбуваються в реальних механічних системах.

Список літератури

1. Юрченко О.О. Дослідження вимушених коливань дискретних систем з нелінійними характеристиками / О.О. Юрченко // Збірник наукових праць ХУ ПС. – Х.: ХУ ПС, 2010. – Вип. 1(23). – С. 178-179

2. Михеев Р.А. Прочность вертолета / Р.А. Михеев. – М.: Машиностроение, 1984. – 250 с.

Надійшла до редколегії 6.12.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Х.В. Раковський, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

РАСЧЕТ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

О.А. Юрченко

В статье выкладывается метод исследования вынужденных колебаний механических систем с помощью аппарата, который основан на уравнениях Лагранжа второго рода. Рассмотрены дискретные системы с n степенями вольности под действием гармонических возмущающих сил.

Ключевые слова: *дискретная система, гармоническая сила, квадратичная форма.*

CALCULATION OF HARMONIC VIBRATIONS OF THE LINEAR SYSTEMS BY THE METHOD OF LAGRANZHA OF THE SECOND FAMILY

O.A. Yurchenko

In the article the method of research of the forced vibrations of the mechanical systems is laid out by a vehicle which is based on equalizations of Lagranzha the second family. The discrete systems are considered with the n degrees of liberty under the action of harmonic revolting forces.

Keywords: *discrete system, harmonic force, quadratic form.*