UDC 624.07: 519.832.4

V.V. Romanuke

Khmelnytskyy National University, Khmelnytskyy

A LIABLE CASE OPTIMAL STRATEGY IN PROJECTING THE FOUR-MOUNT CONSTRUCTION UNDER RANGE UNCERTAINTIES WITH INCORRECT PRE-EVALUATIONS OF TWO LEFT AND ONE RIGHT ENDPOINTS

There is being circumscribed an antagonistic model of adjusting the mounting square in projecting the four-mount construction under range uncertainties with incorrect pre-evaluations of two left and one right endpoints. The theorem on the single projector optimal strategy under a supplementary condition has been proved. Two left incorrect pre-evaluation endpoints have appeared to be components of the projector optimal strategy. However, as it is underscored, there sometimes may be generated the projector optimal strategy with only left endpoints.

Key words: *antagonistic model, projecting the mount construction, four-mount construction, range uncertainties, incorrect pre-evaluation, projector optimal strategy.*

A study matter

Building support constructions concerns uncertain factors, where there is the range-valued potential compression on the construction mount elements [1, 2]. This compression may be unit-normed to compare and operate it in modeling [3, 4]. At the four-mount construction the unit-normed compression on the i-th mount x_i is enclosed within the range $[a_i;\, b_i] \subset (0;\, 1)$ by $b_i > a_i$ for $i = \overline{1, 3}$ [5, 6]. So, the nonzero fourth unit-normed compression is $x_4 = 1 - x_1 - x_2 - x_3$ due to the unit-normalization. The problem is to adjust the mounting square against that potential compression optimally [3, 7, 8]. Surely, this square may be unit-normed also, and the i-th mount cross-section square is y_i, where due to the unit-normalization $y_i \in [a_i;\, b_i] \subset (0;\, 1)$ for $i = \overline{1, 3}$ by $y_4 = 1 - y_1 - y_2 - y_3$.

Pertinent references analysis

The hypersurface

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T(x_1, x_2, x_3;\, y_1, y_2, y_3) = \\ = \max\left\{ x_1 y_1^{-2},\, x_2 y_2^{-2},\, x_3 y_3^{-2},\, \frac{1 - x_1 - x_2 - x_3}{(1 - y_1 - y_2 - y_3)^2} \right\} \quad (1)$$

is the kernel of a convex antagonistic game, defined on the hyperparallelepiped [3, 6, 7]

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} \times \boldsymbol{\mathcal{Y}} = \prod_{p=1}^{2} [a_1;\, b_1] \times [a_2;\, b_2] \times [a_3;\, b_3] = \\ = \prod_{p=1}^{2} \left(\prod_{i=1}^{3} [a_i;\, b_i] \right) \subset \prod_{d=1}^{6} (0;\, 1) \subset \prod_{d=1}^{6} [0;\, 1] \subset \mathbb{R}^6 \quad (2)$$

of pure strategies (unit-normed compressions)

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \in \boldsymbol{\mathcal{X}} = [a_1;\, b_1] \times [a_2;\, b_2] \times [a_3;\, b_3] = \\ = \prod_{i=1}^{3} [a_i;\, b_i] \subset \prod_{i=1}^{3} (0;\, 1) \subset \prod_{i=1}^{3} [0;\, 1] \subset \mathbb{R}^3 \quad (3)$$

of the first player and of pure strategies (cross-section squares)

$$\mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \in \boldsymbol{\mathcal{Y}} = [a_1;\, b_1] \times [a_2;\, b_2] \times [a_3;\, b_3] = \\ = \prod_{i=1}^{3} [a_i;\, b_i] \subset \prod_{i=1}^{3} (0;\, 1) \subset \prod_{i=1}^{3} [0;\, 1] \subset \mathbb{R}^3 \quad (4)$$

of the second player. This game is a model for adjusting squares $\{y_i\}_{i=1}^{3}$ optimally under range uncertainties $\{[a_i;\, b_i]\}_{i=1}^{3}$, where the first player personifies the natural factors, which can't be foreknown, and the second player personifies the projection responsible person (projector of the four-mount construction). Relying on the theorem [3, 9, 10] on the second player optimal strategies in the convex game [3, 11], there is an optimal strategy

$$\mathbf{Y}_* = [y_1^* \quad y_2^* \quad y_3^*] \in [a_1;\, b_1] \times [a_2;\, b_2] \times [a_3;\, b_3] = \boldsymbol{\mathcal{Y}} \quad (5)$$

of the projector [3, 6, 7]. It is determined from the four-parted equality

$$\frac{b_1}{(y_1^*)^2} = \frac{b_2}{(y_2^*)^2} = \frac{b_3}{(y_3^*)^2} = \frac{1 - a_1 - a_2 - a_3}{(1 - y_1^* - y_2^* - y_3^*)^2} \quad (6)$$

by its roots

$$y_i^* = \frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{b_3} + \sqrt{1 - a_1 - a_2 - a_3}} \quad \forall\, i = \overline{1, 3}. \quad (7)$$

But it occurs with pre-evaluations $\{a_i\}_{i=1}^{3}$ and $\{b_i\}_{i=1}^{3}$ that this equality is not true [5, 6] within the parallelepiped $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ in (4). While there is no possibility to correct them, the second player should equalize the broken into some inequality statement (6) as much as maximum possible.

Study intention

Suppose that the roots of (6) have appeared to be out of the parallelepiped $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ in (4), and by $\{p, q, k\} = \{1, 2, 3\}$ they are

$$\sqrt{b_p} \Big/ \left(\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{b_3} + \sqrt{1 - a_1 - a_2 - a_3} \right) < a_p, \quad (8)$$

$$\sqrt{b_q}\Big/\left(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{b_3}+\sqrt{1-a_1-a_2-a_3}\right)<a_q\,, \quad (9)$$

$$\sqrt{b_k}\Big/\left(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{b_3}+\sqrt{1-a_1-a_2-a_3}\right)>b_k\,. \quad (10)$$

These inequalities signify that the endpoints a_p, a_q and b_k of the range uncertainties $\left\{[a_i;\, b_i]\right\}_{i=1}^{3}$ by $\{p,\, q,\, k\}=\{1,\, 2,\, 3\}$ was pre-evaluated incorrectly. So, will find the projector optimal strategy (5) in supposition of having the range uncertainties $\left\{[a_i;\, b_i]\right\}_{i=1}^{3}$ with incorrectly pre-evaluated two left and one right endpoints as (8) – (10). Before starting, it is useful to say that here

$$y_p^* > \sqrt{b_p}\Big/\left(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{b_3}+\sqrt{1-a_1-a_2-a_3}\right), \quad (11)$$

$$y_q^* > \sqrt{b_q}\Big/\left(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{b_3}+\sqrt{1-a_1-a_2-a_3}\right), \quad (12)$$

$$y_k^* < \sqrt{b_k}\Big/\left(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{b_3}+\sqrt{1-a_1-a_2-a_3}\right), \quad (13)$$

being the corollaries of the conditions (8) – (10). Actually, the inequalities (8) – (10) give one of the four following inequalities instead of (6):

$$\frac{1}{b_k} > \frac{b_r}{a_r^2} > \frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-a_p-a_q-b_k\right)^2} \text{ by } r\in\{p,\, q\}\,, \quad (14)$$

$$\frac{1}{b_k} > \frac{b_p}{a_p^2} \geq \frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-a_p-a_q-b_k\right)^2} \geq \frac{b_q}{a_q^2}\,, \quad (15)$$

$$\frac{1}{b_k} \geq \frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-a_p-a_q-b_k\right)^2} > \frac{b_r}{a_r^2} \text{ by } r\in\{p,\, q\}\,, \quad (16)$$

$$\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-a_p-a_q-b_k\right)^2} > \frac{1}{b_k} > \frac{b_r}{a_r^2} \text{ by } r\in\{p,\, q\}\,. \quad (17)$$

The last inequality reflects a liable case of unequalization of the equality (6) due to the incorrectly pre-evaluated endpoints a_p, a_q and b_k, inasmuch as the statement $1-y_1^*-y_2^*-y_3^*$ increases once by pulling y_k^* more left to the nearest b_k, and this statement decreases twice by pulling y_p^* and y_q^* righter to the nearest a_p and a_q, what is likely to decrease the statement $1-y_1^*-y_2^*-y_3^*$ and increase the ratio $\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-a_p-a_q-b_k\right)^2}$ much. So, while searching components $\left\{y_i^*\right\}_{i=1}^{3}$ will stay under the supplementary condition (17).

Theorem on the single projector optimal strategy (5) by (8) – (10) under the supplementary condition (17)

Obviously the projector must apply such components $\left\{y_i^*\right\}_{i=1}^{3}$ that they would equalize the inequality (17), decreasing the payoff down to the optimal game value V_{opt}. May it be proved the singularity of each of those optimal strategy (5) components.

Theorem. In the antagonistic game with the kernel (1) on the hyperparallelepiped (2) by the conditions (8) – (10) and (17) the second player has the single optimal strategy (5) with its components

$$y_r^* = a_r \text{ by } r\in\{p,\, q\} \quad (18)$$

and

$$y_k^* = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(1-a_p-a_q\right)\sqrt{b_k}}{\sqrt{b_k}+\sqrt{1-a_1-a_2-a_3}}+a_k+\\ +\left(\dfrac{\left(1-a_p-a_q\right)\sqrt{b_k}}{\sqrt{b_k}+\sqrt{1-a_1-a_2-a_3}}-a_k\right)\times\\ \times\operatorname{sign}\left(\dfrac{\left(1-a_p-a_q\right)\sqrt{b_k}}{\sqrt{b_k}+\sqrt{1-a_1-a_2-a_3}}-a_k\right)\end{array}\right] \quad (19)$$

by $\{p,\, q,\, k\}=\{1,\, 2,\, 3\}$.

Proof. Suppose that $y_p^*>a_p$ and $y_q^*>a_q$ or, at least, $y_p^*>a_p$ or $y_q^*>a_q$. Then

$$1-y_p^*-y_q^*-y_k^* < 1-a_p-a_q-y_k^*$$

and

$$\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-y_p^*-y_q^*-y_k^*\right)^2} > \frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-a_p-a_q-y_k^*\right)^2} \quad (20)$$

for any fixed y_k^*. The inequality (20) cancels optimality of the component $y_p^*>a_p$ and of the component $y_q^*>a_q$, so (18) is valid. The second player may decrease payoff by decreasing only y_k^*, what leads to solving the equality

$$\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-a_p-a_q-y_k^*\right)^2} = \frac{b_k}{\left(y_k^*\right)^2}\,, \quad (21)$$

whence

$$y_k^*\sqrt{1-a_1-a_2-a_3} = \left(1-a_p-a_q-y_k^*\right)\sqrt{b_k}$$

and the equality (21) root is

$$y_k^* = \frac{\left(1-a_p-a_q\right)\sqrt{b_k}}{\sqrt{b_k}+\sqrt{1-a_1-a_2-a_3}}\,. \quad (22)$$

This root is the k-th component of the optimal strategy (5) if

$$\frac{\left(1-a_p-a_q\right)\sqrt{b_k}}{\sqrt{b_k}+\sqrt{1-a_1-a_2-a_3}} \geq a_k \quad (23)$$

and $y_k^*=a_k$ by

$$\frac{\left(1-a_p-a_q\right)\sqrt{b_k}}{\sqrt{b_k}+\sqrt{1-a_1-a_2-a_3}} < a_k\,. \quad (24)$$

Unification of the conditions (23) and (24) for the k-th component is represented as (19). And there are no any other optimal strategies for the second player, what confirms it has only optimal strategy (5) with its components (18) and (19) by $\{p,\, q,\, k\}=\{1,\, 2,\, 3\}$. The theorem has been proved.

In accordance to this theorem, here the optimal game value is

$$V_{opt} = (1 - a_1 - a_2 - a_3) \Big/ (1 - a_p - a_q - y_k^*)^2$$

by y_k^* as (19). And if (24) is valid then

$$V_{opt} = 1 \big/ (1 - a_1 - a_2 - a_3),$$

where $y_i^* = a_i \quad \forall\, i = \overline{1, 3}$. Consequently, the considered case of the projector optimal strategy (5) by (8) – (10) under the supplementary condition (17) may sometimes generate the "left-ended" projector optimal strategy (5).

Conclusion and working further perspective

Now, being guided by the proved theorem, the projector easily determines cross-section squares $\{y_i^*\}_{i=1}^3$ as (18) and (19) by $\{p, q, k\} = \{1, 2, 3\}$ at $y_4^* = 1 - a_p - a_q - y_k^*$. Nevertheless, this unambiguity is not always so good in projecting the four-mount construction, because of the case with $y_k^* = a_k$ inclines towards thought that all the three left endpoint $\{a_i\}_{i=1}^3$ in the range uncertainties $\{[a_i; b_i]\}_{i=1}^3$ was pre-evaluated incorrectly, and such the construction mounting square over three mount elements with $y_i^* = a_i \quad \forall\, i = \overline{1, 3}$ may be unbalanced. Perspective of working further lies in discussing such deep incorrectnesses and developing recommendations to prevent [1, 2, 8, 9, 12, 13] them.

List of references

1. Дарков А.В. Строительная механика : [учебник для строит. спец. вузов] / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – [8-е изд.]. – М. : Высш. шк., 1986. – 607 с.

2. Киселев В.А. Строительная механика: Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений: [учебник для вузов] / В.А. Киселев. – М. : Стройиздат, 1980. – 616 с.

3. Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьёв Н.Н. – М.: Наука, Гл. редакция физико-математической литературы, 1985. – 272 с.

4. Томашевський В.М. Моделювання систем / Томашевський В.М. – К. : Видавнича група BHV, 2005. – 352 с.

5. Romanuke V.V. Digression on the right off-bound projector optimal strategy in four props construction being pressed uncertainly / V.V. Romanuke // Системи обробки інформації. – 2011. – Вип. 2 (92). – С. 129 – 132.

6. Романюк В.В. Нерегулярна ліворуч оптимальна стратегія проектувальника першого степеня у моделі усунення чотирьохелементних невизначеностей як антагоністичній грі на шестивимірному гіперпаралелепіпеді для оптимізації конструювання чотирьохопорної платформи / В.В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2011. – № 4. – С. 74 – 82.

7. Романюк В.В. Теорія антагоністичних ігор : [навчальний посібник] / Романюк В.В. – Львів : "Новий Світ – 2000", 2010. – 294 с.

8. Таха Хемди А. Введение в исследование операций / Хемди А. Таха ; [пер. с англ.]. – 7-е изд. – М. : Издательский дом "Вильямс", 2005. – 902 с.

9. Оуэн Г. Теория игр / Г. Оуэн; [пер. с англ.]. – 2-е изд. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.

10. Теория игр : [учеб. пособие для ун-тов] / Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. – М. : Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998. – 304 с.

11. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б.Н. Пшеничный– М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 320 с.

12. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределённости / Трухаев Р.И. – М.: Наука, 1981. – 258 с.

13. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений / Черноруцкий И.Г. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.

Поступила в редколлегию 15.10.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Р.В. Сорокатий, Хмельницький національний університет, Хмельницький.

ОПТИМАЛЬНА СТРАТЕГІЯ В ОДНОМУ МОЖЛИВОМУ ВИПАДКУ У ПРОЕКТУВАННІ ЧОТИРЬОХОПОРНОЇ КОНСТРУКЦІЇ В УМОВАХ ІНТЕРВАЛЬНИХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ З НЕКОРЕКТНИМИ ПОПЕРЕДНІМИ ОЦІНКАМИ ДВОХ ЛІВИХ Й ОДНОГО ПРАВОГО КІНЦІВ

В.В. Романюк

Виокремлюється антагоністична модель добору опорної площі у проектуванні чотирьохопорної конструкції в умовах інтервальних невизначеностей з некоректними попередніми оцінками двох лівих й одного правого кінців. Доведено теорему про єдину оптимальну стратегію проектувальника з однією додатковою умовою. Два лівих кінці некоректного попереднього оцінювання виявились компонентами оптимальної стратегії проектувальника. Однак, як зазначається, іноді оптимальна стратегія проектувальника може породжуватися лише з лівими кінцями.

Ключові слова: *антагоністична модель, проектування опорної конструкції, чотирьохопорна конструкція, інтервальні невизначеності, некоректне попереднє оцінювання, оптимальна стратегія проектувальника.*

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ В ОДНОМ ВОЗМОЖНОМ СЛУЧАЕ В ПРОЕКТИРОВАНИИ ЧЕТЫРЁХОПОРНОЙ КОНСТРУКЦИИ В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ С НЕКОРРЕКТНЫМИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМИ ОЦЕНКАМИ ДВУХ ЛЕВЫХ И ОДНОГО ПРАВОГО КОНЦОВ

В.В. Романюк

Выделяется антагонистическая модель подбора опорной площади в проектировании четырёхопорной конструкции в условиях интервальных неопределённостей с некорректными предварительными оценками двух левых и одного правого концов. Доказана теорема о единственной оптимальной стратегии проектировщика с одним дополнительным условием. Два левых конца некорректного предварительного оценивания оказались компонентами оптимальной стратегии проектировщика. Однако, как подчёркивается, иногда оптимальная стратегия проектировщика может порождаться только с левыми концами.

Ключевые слова: *антагонистическая модель, проектирование опорной конструкции, четырёхопорная конструкция, интервальные неопределённости, некорректное предварительное оценивание, оптимальная стратегия проектировщика.*