

УДК 539.3

С.Н. Гребенюк<sup>1</sup>, О.П. Мелашенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Запорозький національний університет, Запорозжє

<sup>2</sup> Харківський національний університет внутрішніх дел, Харків

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЧНОСТИ ТКАНЕВОГО КОМПОЗИТА

*В данной работе на основе критериев Мизеса, Фишера, Ашкенази и Цая-Ву была определена величина критической нагрузки при расчете конструкций из тканевых композитов. В качестве численного метода использовалась модификация метода конечных элементов – моментная схема конечного элемента. Определено напряженно-деформированное состояние образца из тканевого композита. Проведен анализ полученных результатов и сравнение их с экспериментальными данными.*

**Ключевые слова:** *тканевые композиты, метод конечных элементов, критерии прочности.*

### Введение

Композиционные материалы (КМ) находят широкое применение в различных отраслях промыш-

ленности, строительства, транспорта и других. В частности, одним из таких видов композиционных материалов являются тканевые композиты. В процессе эксплуатации в конструкциях могут возникать

значительные напряжения, которые приводят к их разрушению. Поэтому при проектировании конструкций из тканевых композитов одним их основных расчетов является расчет напряженно-деформированного состояния и расчет на прочность. При таких расчетах необходимо учитывать, что композиционные материалы обладают анизотропией механических свойств. Часто при расчете прочности таких материалов их механические характеристики усредняют, и материал полагают изотропным. Это может приводить к погрешностям в расчетах прочности композиционных материалов. Не менее важным является вопрос выбора критерия прочности при моделировании разрушения анизотропного материала. На сегодняшний день существует множество критериев разрушения для анизотропных материалов. Однако каждый из них имеет ограниченную сферу применимости [1].

**Анализ литературы.** В работе [1] рассмотрены особенности деформирования и разрушения анизотропных материалов при использовании критериев разрушения Цая-Ву, Хоффмана, Ашкенази, Мизеса-Хилла. Задача решалась численно методом конечных элементов в трехмерной постановке.

Гагауз Ф.М., Гагауз П.М. в [2] указывают, что при расчете тонкостенных силовых элементов из КМ не всегда напряженно-деформированное состояние можно точно описать в двумерной постановке. И в некоторых случаях трехмерные эффекты имеют значительное влияние, поэтому необходимо использовать более точные методы расчета и соответствующие критерии прочности, учитывающие трехмерное напряженное состояние изделий из КМ.

В статье [3] рассматривается теоретический подход, применимый для достоверной оценки прочности композиционных материалов. На примере модели представлена методика построения теоретических вычислений, позволяющих дать сравнительную оценку прочности, как изготовленных композитов, так и на промежуточных стадиях их производства.

Бадамшиным И. Х. в работе [4] приведена модернизированная обобщенная модель и методика расчета на прочность элементов конструкций из эвтектических композитов на примере рабочей лопасти турбины.

В [5] исследован механизм разрушения слоистых композитных материалов при кратковременном статическом и длительном циклическом нагружении. Анализ основан на результатах обширного экспериментального исследования прочности, деформативности и разрушения стекло-, угле- и органических композитов в условиях мало- и многоциклового усталости при растяжении, сжатии, симметричном цикле растяжения-сжатия, плоском чистом изгибе и межслойном сдвиге.

Суворова Е.С. в [6] рассматривает основы теории прочности и деформационные критерии разру-

шения, зависящие от предыстории нагружения и влияющие на длительную прочность композита, работающего в условиях ползучести.

В [7] предложена статистическая модель оценки надежности по критерию конструкционной прочности изделий из полимерных композиционных материалов.

В [8] проведен сравнительный анализ применимости различных тензорно-полиномиальных критериев разрушения анизотропных материалов при ударе. Установлено, что критерий второго порядка с прочностными характеристиками при комбинированном нагружении, прост для применения, не имеет никаких ограничений, но для определения необходимых констант материала требуются сложные эксперименты. Для критерия Ашкенази, содержащего компоненты тензора напряжений во второй и четвертой степени и пределы прочности в диагональном направлении к осям симметрии материала, наоборот требуются большие вычислительные затраты при достаточно легко получаемых свойствах материала.

Таким образом, выбор критерия разрушения анизотропного материала должен зависеть от многих факторов: от анизотропии характеристик материала при растяжении и при сжатии, от наличия экспериментальных данных, полученных не только в одномерных опытах, но и двумерных [1].

В [9] указывается, что в большинстве случаев разрушение слоистого композита начинается с разрушения одного слоя или связей между ними. Поэтому при построении предельных поверхностей считается, что разрушение локализовано в одном слое и критерий прочности следует определять именно для этого слоя.

## Основной материал

В данной работе рассматривается применение различных критериев прочности при расчете конструкций из тканевых композитов в трехмерной постановке. В качестве численного метода использовалась модификация метода конечных элементов – моментная схема конечного элемента.

Механические характеристики композитов с армирующими каркасами, образованными пространственным плетением, можно прогнозировать, зная свойства волокна, матрицы, строение армирующего волокнистого каркаса. Основу анализа должны составлять определение и количественное описание геометрической элементарной ячейки, характеризующей структуру материала. Зная геометрию элементарной ячейки, а также механические характеристики волокна и матрицы, можно составить матрицу жесткостей [10].

Для вывода основных соотношений МКЭ в перемещениях необходимо иметь выражения для вариации упругой энергии деформации. Компоненты тензора напряжений для упругого тела определяются

на основе обобщенного закона Гука, который имеет вид [11]:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

где  $C^{ijkl}$  – компоненты тензора упругих постоянных;  $\sigma^{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{kl}$  – компоненты тензора деформаций.

Компоненты тензора упругих постоянных  $C^{ijkl}$  вычисляются следующим образом [12]:

$$[\tilde{N}^{ijkl}] = \sum R_i [C_i],$$

где  $R_i$  – парциальный объем  $i$ -й системы нитей. Для каждой системы нитей матрица  $[C_i]$  имеет вид

$$[C_i] = [T_{\varepsilon,i}] [C] [T_{\varepsilon,i}]^{-1},$$

где  $[C_i]$  – матрица жесткостей  $i$ -й системы нитей;  $[T_{\varepsilon,i}]$  – матрица геометрического преобразования деформации  $i$ -й системы нитей и  $[\tilde{N}]$  – матрица жесткостей аналогичного однонаправленного композита.

Матрица поворота  $[T_{\varepsilon,i}]$  представляет собой матрицу преобразования в форме тензора Гамильтона, которую можно определить в следующей форме:

$$[\dot{O}_{\varepsilon,i}] = \begin{pmatrix} l^2 & m^2 & n^2 & 2mn & 2l'n & 2lm \\ l'^2 & m'^2 & n'^2 & 2m'n' & 2l'n' & 2l'm' \\ l''^2 & m''^2 & n''^2 & 2m''n'' & 2l''n'' & 2l''m'' \\ l'l'' & m'm'' & n'n'' & m'n''+m''n' & l'n''+l''n' & l'm''+l''m' \\ l'l' & m'm' & n'n' & mn'+m'n & 1n''+l''n & lm''+l''m \\ l'l & m'm & n'n & mn'+m'n & 1n'+l'n & lm'+l'm \end{pmatrix},$$

$$l = \cos \theta, m = 0, n = -\sin \theta, l' = \sin \theta \cos \beta,$$

где  $m' = \sin \beta, n' = \cos \theta \cos \beta, l'' = \sin \theta \sin \beta,$

$$m'' = -\cos \beta, n'' = \cos \theta \sin \beta.$$

Здесь  $\theta$  – угол ориентации волокна относительно продольной оси,  $\beta$  – азимутальный угол волокна (рис. 1).

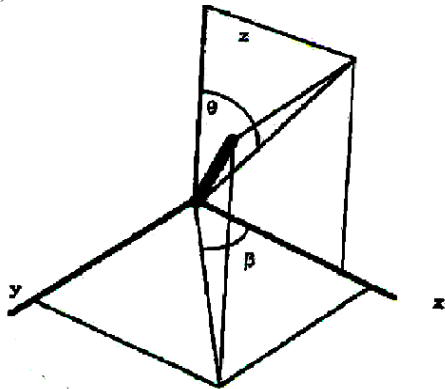


Рис. 1. Пространственная ориентация волокон

Пространственная плетеная структура может содержать продольные, поперечные и переплетаемые компоненты, ориентация которых,  $(\theta, \beta)$  определяется значениями  $(0^\circ, 0^\circ)$  для продольных,  $(90^\circ, 0^\circ)$  для поперечных,  $(\theta^*, \beta^*)$  для переплетаемых. Величины  $\theta^*$  и  $\beta^*$  для переплетаемых компонентов можно получить из следующих соотношений:

$$\theta^* = \arctg \left[ \operatorname{tg} \theta_0' (\operatorname{tg} \theta_0' (1+k^2))^{1/2} \right], \beta^* = \arctg (1/k),$$

где  $k$  – отношение перемещения приемного механизма к перемещению колонны веретен;  $\theta_0'$  – поверхностный угол нити.

Построение матрицы жесткости пространственного конечного элемента для тканевого композита на основе моментной схемы приведено в работе [13].

Рассмотрим стеклопластик КАСТ-В, который обладает трехосной анизотропией механических свойств по следующим трем главным направлениям: вдоль основы стеклоткани (ось 1), вдоль утка стеклоткани (ось 2), перпендикулярно к осям стеклоткани (ось 3). Прочность при двухосном сжатии определялась для случая одновременного действия сил – по направлениям основы и утка стеклоткани.

Для оценки прочности при двухосном сжатии применим критерии прочности, учитывающие анизотропию упругих свойств.

В случае двухосного напряженного состояния критерий Мизеса [14] имеет вид:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1n}^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2n}^2} + \sigma_1 \sigma_2 \left( \frac{1}{\sigma_{1n}^2} + \frac{1}{\sigma_{2n}^2} - \frac{1}{\tau_{45}^2} \right) = 1,$$

где  $\sigma_1, \sigma_2$  – нормальные напряжения в направлениях, совпадающих с координатными осями, указанными индексами;  $\sigma_{1n}, \sigma_{2n}$  – пределы прочности КМ при сжатии в направлении осей  $x, y$ ;  $\tau_{45}$  – предел прочности анизотропного КМ при сдвиге в плоскостях  $x$  и  $y$ .

Условие прочности Фишера основано на использовании критерии энергии формоизменения, в аналитическое выражение которого введены упругие и прочностные характеристики анизотропного материала. При двухосном напряженном состоянии это условие записывается следующим образом:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1n}^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2n}^2} - B \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{1c} \sigma_{2c}} = 1;$$

$$B = \frac{[\hat{A}_1(1+\mu_{21}) + \hat{A}_2(1+\mu_{12})]}{2\sqrt{\hat{A}_1 \hat{A}_2 (1+\mu_{12})(1+\mu_{21})}},$$

где  $\sigma_1, \sigma_2$  – нормальные напряжения в направлениях, совпадающих с координатными осями, указанными индексами;  $\sigma_{1c}, \sigma_{2c}$  – пределы прочности КМ при сжатии в направлении осей  $x, y$ ;  $E_1, E_2$  – модули упругости анизотропных КМ при растяжении (сжа-

ти) в напрямленні осей  $x, y$ ;  $\mu_{\delta\delta}, \mu_{\sigma\sigma}$  – коефіцієнти Пуассона [14]

Принимая, что функцию равноопасных состояний можно задать в форме полинома четвертой степени, Ашкенази предложила условие прочности при двухосном сжатии принять в виде [15]:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1n}^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2n}^2} + \sigma_1\sigma_2 \left( \frac{1}{\sigma_{1n}^2} + \frac{1}{\sigma_{2n}^2} - \frac{1}{\tau_{45}^2} \right) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2}$$

где  $\sigma_1, \sigma_2$  – нормальные напряжения в направлениях, совпадающих с координатными осями, указанными индексами;  $\sigma_{1n}, \sigma_{2n}$  – пределы прочности КМ при сжатии в направлении осей  $x, y$ ;  $\tau_{45}$  – предел прочности анизотропного КМ при сдвиге в плоскостях  $x$  и  $y$ .

Для оценки прочности стеклопластика КАСТ-В размером  $20 \times 20 \times 30$  мм при двухосном сжатии применим критерии прочности Мизеса, Фишера, Ашкенази. Упругие характеристики стеклопластика приведены в табл. 1 [14].

Таблица 1

Упругие характеристики стеклопластика КАСТ –В

$E_1$ ГПа	$E_2$ ГПа	$E_3$ ГПа	$\mu_{12}$	$\mu_{13}$	$\mu_{21}$	$\mu_{23}$	$\mu_{31}$	$\mu_{32}$
22,2	17,5	4,0	0,13	0,65	0,09	0,45	0,10	0,11

Пределы прочности стеклопластика КАСТ-В при сжатии вдоль главных осей анизотропии и модули сдвига стеклопластика приведены в табл. 2 [14, 16].

Таблица 2

Пределы прочности и модули сдвига

$\sigma_1$ ГПа	$\sigma_2$ ГПа	$\sigma_3$ ГПа	$G$ , ГПа по основе	$G$ , ГПа по утку
0,098	0,109	0,360	4,0	4,0

Результаты расчета для сетки конечных элементов  $8 \times 8 \times 8$  приведены в табл. 3.

Таблица 3

Значения критической нагрузки

Критерии	Нагрузка, ГПа	Полученное значение $\sigma_1$ , ГПа	Значение $\sigma_1$ в [14], ГПа	Отклонение от экспериментальных данных в [14]
Мизеса	0,224	0,103	0,101	-11%
Фишера	0,233	0,1072	0,105	-7%
Ашкенази	0,196	0,0902	0,0979	-14%

Рассмотрим композит Т300/Ероху828 с объемной долей волокон 78%, размеры  $2,28 \times 2,28 \times 0,162$  мм.

Для оценки прочности данного композита использовался критерий Цая-Ву [17]:

$$F_{ij}\sigma_i\sigma_j + F_i\sigma_i = 1, \quad i, j = 1..6;$$

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 = 1,$$

где

$$F_1 = \frac{1}{\sigma_{1t}} + \frac{1}{\sigma_{1c}}; F_2 = \frac{1}{\sigma_{2t}} + \frac{1}{\sigma_{2c}}; F_{11} = \frac{-1}{\sigma_{1t}\sigma_{1c}};$$

$$F_{22} = \frac{-1}{\sigma_{2t}\sigma_{2c}}; F_{66} = \frac{1}{\tau_{12}^2}; F_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{F_1F_2}.$$

В данных формулах:  $\sigma_{1t}, \sigma_{1c}$  – предел прочности при растяжении и сжатии в направлении оси X;  $\sigma_{2t}, \sigma_{2c}$  – предел прочности при растяжении и сжатии в направлении оси Y;  $\tau_{12}$  – предел прочности при сдвиге в плоскости X Y.

Механические характеристики композита Т300/Ероху828 представлены в табл. 4 [17], пределы прочности в табл. 5 [17]. Модель подвергается одноосному растяжению, нагрузка направлена параллельно оси  $x$ .

Таблица 4

Механические характеристики композита Т300/Ероху828

	$E_1$ ГПа	$E_2$ ГПа	$E_3$ ГПа	$\mu_{12}$	$\mu_{13}$	$G_{12}$ ГПа	$\mu_{23}$	$G_{31}$ ГПа	$G_{23}$ ГПа
Т300/ Ероху828	44,7	50,1	9,79	0,14	0,44	4,77	0,43	2,61	2,6

Таблица 5

Пределы прочности

	$F_{Lt}$ ГПа	$F_{Lc}$ ГПа	$F_{Tt}$ ГПа	$F_{Tc}$ ГПа	$S_{LT}$ ГПа	$S_{TT}$ ГПа	$V_f$
Т300 Carbon Fiber	1,99	1,49	0,09	0,28	0,093	0,093	0,78

Результаты расчета для сетки конечных элементов  $9 \times 9 \times 9$  на основе критерия Цая-Ву приведены в табл. 6.

Таблица 6

Значения критической нагрузки

Нагрузка, ГПа		Значение критерия	
работа [17]	рассчитанная	работа [17]	рассчитанное
0,097	0,0925	0,995	0,99

### Выводы

Анализируя результаты, найденные в первой задаче можно отметить, что большинство критериев приводит к удовлетворительному совпадению с результатами расчетов и экспериментальными результатами, приведенными в работе [14]: от -7% (критерий Фишера) до -14% (критерий Ашкенази).

Как видно из результатов расчёта, результаты, полученные с помощью критериев для плоских задач достаточно хорошо совпадают с результатами,

полученными с помощью критерия Ашкенази для пространственных задач.

Результат, найденный во второй задаче с помощью критерия Цая – Ву, близок к результатам, приведенным в работе [17] и подтвержденным экспериментально.

Получено хорошее согласование численных результатов с имеющимися в литературе. Численные результаты показали, что использование матрицы жесткости для тканого композиционного материала [13] с применением моментной схемы конечных элементов достаточно точно описывает его напряженно-деформированное состояние.

### Список литературы

1. Радченко П.А. Влияние применения различных критериев прочности на поведение анизотропных материалов при динамическом нагружении / П.А. Радченко, А.В. Радченко – Режим доступа: <http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/40002/47886/RadchenkoPA.pdf>.
2. Гагауз Ф.М. Моделирование физико-механических характеристик композиционных материалов / Ф. М. Гагауз, П. М. Гагауз. // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2010. – №4(64) октябрь – декабрь. – С. 59-64.
3. Богатова С.Н. Теоретические аспекты прочности строительных композитов / С.Н. Богатова, А.С. Тюряхин В.Д. Черкасов. – Режим доступа: [http://marhdi.mrsu.ru/2008-2/pdf/78\\_Bogatova.pdf](http://marhdi.mrsu.ru/2008-2/pdf/78_Bogatova.pdf).
4. Бадамын И.Х. Прочность элементов конструкций из эвтектических композитов на основе электро-статической природы упругости / И.Х. Бадамын // Вестник УГАТУ. – 2010. – Т. 14, №2 (37). – С. 60-64.
5. Саркисян Н.Е. Разрушение волокнистых композитных материалов при длительном циклическом деформировании / Н.Е. Саркисян, Н.Н. Саркисян // Известия национальной академии наук Армении. – 2006. – Вып. 59, № 3. – С. 80-85.
6. Суворова Е.С. Надежность и долговечность изделий из органокомпозитов с учетом ползучести / Е.С. Суворова // Вестн. КРСУ. – 2009. – Т. 9, № 1. – С. 88-91.
7. Реутов А.И. Надежность изделий из полимерных композиционных материалов с учетом статистической изменчивости их характеристик / А.И. Реутов // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317, № 2. – С. 58-62.
8. Кобенко С.В. Численное моделирование анизотропных тел при ударных нагрузках: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: спец. 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела» / С. В. Кобенко. – Томск, 2003. – 18 с.
9. Жигилій Д.О. Конструкційна міцність комбінованих балонів високого тиску [Текст]: Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук / Д.О. Жигилій. – Суми: СумДУ, 2010. – 167 с.
10. Тканые конструкционные композиты: пер. с англ. / под. ред. Т.-В. Чу и Ф. Ко. – М.: Мир, 1991. – 432 с.
11. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб и др. – К.: Наук. думка, 2005. – 392 с.
12. Edgren F. Approximate analytical constitutive model for non-crimp fabric composites / F. Edgren, L.E. Asp // Composites. – Part A. – 2004. – P. 1-9.
13. Гребенюк С.Н. Матрица жесткости конечного элемента для тканого композиционного материала / С.Н. Гребенюк, О. П. Мелащенко // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2010. – № 4(64) октябрь – декабрь. – С. 71-82.
14. Белякин Ф.П. Прочность и деформативность стеклопластиков при двухосном сжатии / Ф.П. Белякин, В.Ф. Яценко, Г.Г. Марголин. – К.: Наук. думка, 1976. – 416 с.
15. Ашкенази Е.К. Экспериментальная проверка применимости полинома четвертой степени для описания поверхности равноопасных плоских напряженных состояний стеклопластиков / Е.К. Ашкенази, Ф.П. Пеккер // Механика полимеров. – 1970. – №2. – С. 294-384.
16. Копнов В.А. Сопроотивление материалов: Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ / В.А. Копнов, С. Н. Кривошапко. – М.: Высшая школа, 2003. – 351 с.
17. Tanaka R., Watanabe N. Fem simulation of failure process of woven CF/Epoxy laminates / R. Tanaka, N. Watanabe. – Режим доступа: [http://www.iccm-central.org/Proceedings/ICCM16proceedings/contents/pdf/TueK/TuKM1-02ge\\_tanakar224169p.pdf](http://www.iccm-central.org/Proceedings/ICCM16proceedings/contents/pdf/TueK/TuKM1-02ge_tanakar224169p.pdf).

Поступила в редколлегию 5.10.2011

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. С.Н. Герасин, Харьковский национальный университет внутренних дел, Харьков, Харьков.

### ВИЗНАЧЕННЯ МІЦНОСТІ ТКАНОГО КОМПОЗИТУ

С.М. Гребенюк, О.П. Мелащенко

На основі критеріїв Мізеса, Фішера, Ашкеназі і Цая-Ву була визначена величина критичного навантаження при розрахунку конструкцій з тканих композитів. Використовувалася модифікація методу скінченних елементів – моментна схема скінченного елемента. Визначено напружено-деформований стан зразка з тканого композиту. Проведено аналіз отриманих результатів і порівняння їх з експериментальними даними.

**Ключові слова:** тканинні композити, метод кінцевих елементів, критерії міцності.

### DETERMINING THE STRENGTH OF WOVEN COMPOSITES

S.N. Grebenyuk, O.P. Melashenko

Based on the criteria of Mises, Fisher, Ashkenazi and Tsaya - Wu was determined the critical load for calculating the structures of woven composites. We used the modified finite element method. Determined the deformation pattern of woven composite. The analysis of the results and their comparison with experimental data.

**Keywords:** tissue compos, method of eventual elements, criteria of durability.