

УДК 621.301

Б.Т. Кононов, А.А. Мушаров

Харківський університет Воздушних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

### ФЕРРОРЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С РАЗЛИЧНЫМИ СХЕМАМИ СОЕДИНЕНИЯ АКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ, ЕМКОСТИ И КАТУШКИ С ФЕРРОМАГНИТНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

В статье предложены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие феррорезонансные явления, изложен метод их решения и приведены аналитические соотношения, устанавливающие взаимосвязь параметров электрических цепей и амплитуды и частоты приложенного напряжения при возникновении и протекании феррорезонансных процессов.

**Ключевые слова:** феррорезонанс токов, феррорезонанс напряжений, дифференциальные уравнения, аналитические зависимости.

#### Введение

**Постановка проблемы.** Известные в настоящее время технические средства деструктивного воздействия, относимые в [1] к электромагнитному оружию, имеют в своем составе конденсатор связи, емкостной накопитель и трансформатор, способны вызвать повреждение всех электроприемников, получающих электрическую энергию от трансформаторной подстанции, на которую воздействуют террористы.

Для выяснения способов защиты от электромагнитного терроризма необходимо иметь возможность оценить такие параметры, как амплитуда, длительность и энергия электромагнитного импульса, возникающего в системе электроснабжения при силовых деструктивных воздействиях, в ряде случаев приводящих к появлению резонансных и феррорезонансных процессов.

**Анализ литературы.** Феррорезонансные процессы рассматриваются в [2]. Здесь для установления закономерностей, происходящих в случаях феррорезонанса тока и феррорезонанса напряжения, предложено использовать уравнение Дуффинга. Однако при этом в процессе решения уравнения Дуффинга не учитывается влияние высших гармонических составляющих, амплитудные значения которых могут быть большими амплитуды первой гармонической составляющей. Учет высших гармоник предлагается в [3], однако здесь рассмотрен идеализированный вариант электрической цепи, в котором не учтено влияние на результаты решения активного сопротивления элементов электрической цепи.

Целью настоящей статьи является получение аналитических соотношений, описывающих феррорезонансные процессы в электрических цепях с различными вариантами соединения активного сопротивления, емкости и катушки с ферромагнитным сердечником.

#### Основной материал

Рассмотрим феррорезонансные процессы, возникающие в следующих схемах параллельного и последовательного включения активного сопротивления, показанных на рис. 1 – 4.

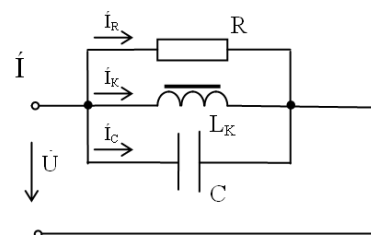


Рис. 1. Параллельное включение R, L<sub>к</sub>, C

Для схемы, приведенной на рис. 1, суммарный ток равен сумме токов ее ветвей:

$$i = i_R + i_K + i_C, \quad (1)$$

а напряжения  $u_R = u_L = u_C$  одинаковы и определяются из соотношения

$$u_K = \frac{d\psi}{dt}, \quad (2)$$

где  $\psi$  – потокосцепление катушки с ферромагнитным сердечником. Исходя из того, что напряжение

на конденсаторе, емкость которого равна  $C$ , определяется его зарядом  $q$ , мгновенное значение емкостного тока  $i_C$ , равно:

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{dCu_C}{dt} = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d^2\psi}{dt^2}. \quad (3)$$

Мгновенное значение тока на активном сопротивлении  $R$  определяется следующим образом:

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{u_K}{R} = \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt}, \quad (4)$$

а мгновенное значение тока в катушке аппроксимируем укороченным полиномом третьей степени

$$i_K = a_1\psi + a_2\psi^3. \quad (5)$$

Подставляя в (1) значения  $i_R$ ,  $i_K$ ,  $i_C$ , определяемые из (4), (5) и (3), получим

$$i = C \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt} + a_1\psi + a_2\psi^3. \quad (6)$$

Следуя [3], будем считать, что ток в системе электроснабжения можно представить как

$$i \omega t = \begin{cases} I_{\max} & \text{при } 0 < \omega t < \pi; \\ -I_{\max} & \text{при } \pi < \omega t < 2\pi. \end{cases} \quad (7)$$

Результат разложения (7) в ряд Фурье представим в виде

$$i \omega t \approx \frac{4}{\pi} I_{\max} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} \right). \quad (8)$$

Очевидно, что для схемы, приведенной на рис. 1, результирующее дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{d\psi}{dt} + \frac{a_1\psi}{c} + \frac{a_2\psi^3}{c} = \\ = \frac{4}{\pi C} I_{\max} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Введя замены:

$$\frac{1}{RC} = \tau, \quad \frac{a_1}{C} = \omega_0^2, \quad \frac{a_2}{C} = h, \quad \frac{4}{\pi C} I_{\max} = B, \text{ получим:}$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \tau \frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2\psi + h\psi^3 = B \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} \right). \quad (10)$$

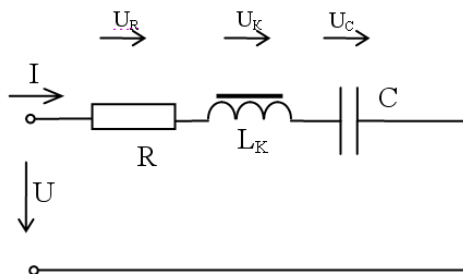


Рис. 2. Последовательное включение  $R$ ,  $L_K$ ,  $C$

Для варианта последовательного включения  $R$ ,  $L_K$ , и  $C$  (рис. 2) справедливо следующее соотношение:

$$u = u_R + u_K + u_C, \quad (11)$$

которое можно представить в виде

$$u = iR + \frac{d\psi}{dt} + \frac{q}{C}. \quad (12)$$

Продифференцировав (12), получим

$$\frac{du}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt}. \quad (13)$$

Учитывая соотношение (5), получим

$$\frac{du}{dt} = R a_1 + 3a_2\psi^2 \frac{d\psi}{dt} + \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{C} a_1\psi + a_2\psi^3. \quad (14)$$

Следуя [3], примем, что  $u$  описывается знакопеременной функцией вида

$$u \omega t = \begin{cases} U_{\max} & \text{при } 0 < \omega t < \pi; \\ -U_{\max} & \text{при } \pi < \omega t < 2\pi, \end{cases} \quad (15)$$

или

$$u(\omega t) \approx \frac{4}{\pi} U_{\max} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} \right). \quad (16)$$

Сопоставив (14) и (16), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dt^2} + R(a_1 + 3a_2\psi^2) \frac{d\psi}{dt} + \frac{a_1}{C} \psi + \frac{a_2}{C} \psi^3 = \\ = \frac{4}{\pi} U_{\max} \left( \cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{3} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Введя замены, используемые при выводе соотношения (10), и считая, что  $Ra_1 = \theta_1$ ,  $3Ra_2 = \theta_2$ , а  $4\omega U_{\max}/\pi = D$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dt^2} + (\theta_1 + \theta_2\psi^2) \frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2\psi + h\psi^3 = \\ = D \cos \omega t + \cos 3\omega t. \end{aligned} \quad (18)$$

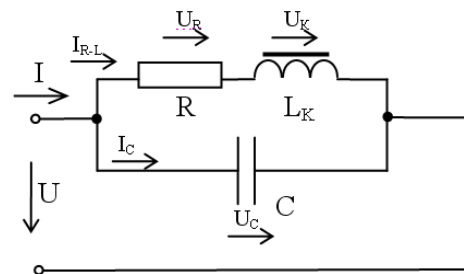


Рис. 3. Последовательное включение  $R$ ,  $L_K$  и  $C$

Для варианта схемы, приведенного на рис. 3, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} i = i_C + i_K; \\ u_R + u_K = u_C = i_R + \frac{d\psi}{dt} = \frac{q}{C}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) следует, что

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + R \frac{di}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt}. \quad (20)$$

Таким образом, ток на емкости равен

$$i_C = C \frac{d^2\psi}{dt^2} + RC \frac{di}{dt}. \quad (21)$$

Используя соотношения (5) и (7) и введенные ранее подстановки, получим из (19)

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + (\theta_1 + \theta_2\psi^2) \frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2\psi + h\psi^3 = B \sin \omega t + \sin 3\omega t / 3 . \quad (22)$$

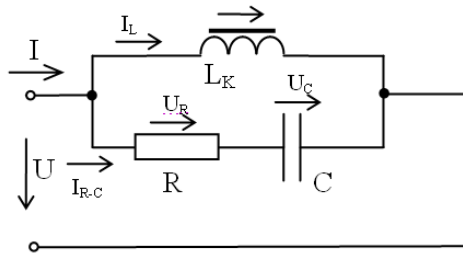


Рис. 4. Последовательное включение  $L_K$  и  $R, C$

Для варианта схемы, приведенного на рис. 4, справедливы следующие равенства

$$iR + \frac{q}{C} = \frac{d\psi}{dt}; \quad i = i_K + i_C. \quad (23)$$

Выполняя дифференцирование первого уравнения системы (23), получим

$$R \frac{di_C}{dt} + \frac{1}{C} i_C = \frac{d^2\psi}{dt^2}. \quad (24)$$

Из (24) следует, что ток в ветви с емкостью равен

$$i_C = \frac{Cp^2\psi}{(pCR + 1)}, \quad (25)$$

где символ  $p$  обозначает оператор дифференцирования  $p = \frac{d}{dt}$ . В результате получим

$$\frac{p^2\psi}{pR + 1/C} + a_1\psi + a_2\psi^3 = \frac{4}{\pi} I_{\max} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} \right)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dt^2} + a_1R \frac{d\psi}{dt} + 3a_2R\psi^2 \frac{d\psi}{dt} + \frac{a_1}{C} \psi + \frac{a_2}{C} \psi^3 = \\ = \frac{4}{\pi} RI_{\max} \omega \cos \omega t + \cos 3\omega t + \\ + \frac{4}{\pi} I_{\max} \frac{1}{C} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} \right). \end{aligned}$$

С учетом введенных замен (25) примет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + (\alpha_1 + \alpha_2\psi^2) \frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2\psi + h\psi^3 = \quad (26)$$

$$= B_1 \cos \omega t + \cos 3\omega t + B_2 \sin \omega t + \sin 3\omega t / 3 ,$$

где  $B_1 = B\omega RC$ ;  $B_2 = B$ .

**Обсуждение результатов.** Полученные дифференциальные уравнения (10), (18), (22) и (26) описывают феррорезонансные явления, происходящие при параллельном и последовательном соединении активного сопротивления, емкости и катушки с ферромагнитным сердечником. Решение этих уравнений будем искать в виде суммы синусоидальных и косинусоидальных функций. В настоящей статье предлагается результаты решения уравнения (10), представить в виде

$$\psi = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t , \quad (27)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  неизвестные коэффициенты, зависящие от значений  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\tau$ ,  $h$  и от значений  $B_1$  и  $B_2$ , определяемых результатами представления знакопеременной функции в ряд Фурье, а именно ее первой и третьей гармонической составляющими. После подстановки  $\psi$ , определенной в виде соотношения (27),  $\frac{d\psi}{dt}$  и  $\frac{d^2\psi}{dt^2}$  в уравнение (10) и приравнивания коэффициентов в правой и левой частях полученного тождества, получим систему:

$$\begin{cases} A_1(\omega_0^2 - \omega^2) - A_2\tau\omega + \frac{3h}{4}(A_1^3 + A_1A_2^2) = B_1; \\ A_2(\omega_0^2 - \omega^2) + A_1\tau\omega + \frac{3h}{4}(A_2^3 + A_2A_1^2) = 0; \\ -\frac{1}{4}hA_1^3 + \frac{3}{4}hA_1A_2^2 = B_2; \\ \frac{hA_2^3}{4} - \frac{3}{4}hA_1^2A_2 = 0, \end{cases} \quad (28)$$

где  $B_1 = B = \frac{4}{\pi C}$ , а  $B_2 = \frac{B}{3}$ .

Из четвертого уравнения системы (28) следует, что

$$A_2 = \pm\sqrt{3}A_1. \quad (29)$$

Из третьего уравнения системы (28), с учетом (29), получим, что

$$A_1^3 = B_2 / 2h . \quad (30)$$

Суммируя первое и второе уравнения системы (28) и учитывая равенства (29) и (30), получаем в случае, когда  $A_2 = \sqrt{3}A_1$

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3})A_1(\omega_0^2 - \omega^2) + (1 - \sqrt{3})A_1\tau\omega + \\ + 3(1 + \sqrt{3}) \cdot B_2 / 2 = B_1, \end{aligned} \quad (31)$$

а в случае, когда  $A_2 = -\sqrt{3}A_1$

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{3})A_1(\omega_0^2 - \omega^2) + (1 + \sqrt{3})A_1\tau\omega + \\ + 3(1 - \sqrt{3}) \cdot B_2 / 2 = B_1. \end{aligned} \quad (32)$$

Из (31) и (32) находят значения  $A_1$  для вариантов, когда  $A_2 = \sqrt{3}A_1$  и  $A_2 = -\sqrt{3}A_1$ . Для поиска двух других значений  $A_1$  в рассматриваемых вариантах предлагается использовать результаты, получаемые при графическом решении следующих кубических уравнений

$$\begin{aligned} A_1(\omega_0^2 - \omega^2) - \sqrt{3}A_1\tau\omega + 3hA_1^3 = B_1; \\ A_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \sqrt{3}A_1\tau\omega + 3hA_1^3 = B_1. \end{aligned} \quad (33)$$

При этом соотношения (33) предлагается представить состоящими из двух частей  $y_1$  и  $y_2$ , причем  $y_1 = (\omega^2 - \omega_0^2)A_1 \pm \sqrt{3}\tau\omega A_1 + B_1$ , а  $y_2 = 3hA_1^3$ . Значения  $A_1$  определяются из условия  $y_1 = y_2$ .

Для иллюстрации изложенного метода решения соотношений (33) на рис. 5 построены графики зависимостей  $y_1 = f(A_1)$  и  $y_2 = f(A_2)$ .

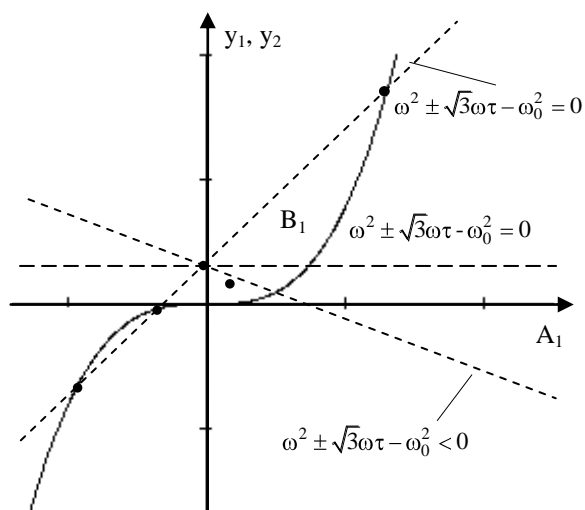


Рис. 5. Графічне рішення кубічних рівнянь (33)

График  $y_1 = f(A_1)$  представляет собой семейство прямых линий, проходящих через точку  $B_1$  на оси ординат, наклон этих прямых линий зависит от значения  $\omega^2 - \omega_0^2 \pm \sqrt{3}\tau\omega$ . График  $y_2 = f(A_1)$  представляет собой кубическую параболу, которая при  $h = 0$  переходит в ось абсцисс.

Соотношения (33) позволяют исследовать зависимость абсолютного значения  $|A_1|$  от угловой частоты  $\omega$ , установить закономерности изменения  $|A|$  от  $B_1$  при фиксированном значении частоты  $\omega$  и найти геометрические места точек скачкообразного увеличения амплитуды при изменении  $\omega$ . Так, для поиска нижней границы неустойчивого участка,

что соответствует  $\frac{d(\omega^2 \pm \sqrt{3}\tau\omega)}{dA_1} = 0$ , представим соотношение (33) в виде

$$\omega^2 \pm 3\tau\omega = -\frac{B_1}{A_1} + \omega_0^2 - 3hA_1^2. \quad (34)$$

Из (34) следует, что

$$\frac{d(\omega^2 \pm \sqrt{3}\tau\omega)}{dA_1} = \frac{B_1}{A_1^2} - 6hA_1 = 0,$$

### ФЕРРОРЕЗОНАНС В ЕЛЕКТРИЧНИХ МЕРЕЖАХ З РІЗНИМИ СХЕМАМИ З'ЄДНАННЯ АКТИВНОГО ОПОРУ, ЄМНОСТІ І КАТУШКИ З ФЕРРОМАГНІТНИМ ОСЕРДДЯМ

Б.Т. Кононов, А.О. Мушаров

У статті запропоновані нелінійні диференціальні рівняння, які описують феррорезонансні явища, викладений метод їх вирішення і наведені аналітичні співвідношення, які встановлюють взаємозв'язок параметрів електричних кіл і амплітуди і частоти прикладеної напруги при виникненні і протікання феррорезонансних процесів.

**Ключові слова:** феррорезонанс струмів, феррорезонанс напруг, диференціальні рівняння, аналітичні залежності.

### FERRORRESONANCE IN ELECTRICAL CIRCUITS WITH DIFFERENT SCHEMAS CONNECTION IS ACTIVE RESISTANCE, CAPACITOR AND COIL WITH FERROMAGNETIC CORE

B.T. Kononov, A.A. Musharov

The article suggests nonlinear differential equations describing the ferroresonance phenomenon, we present a method of their solution and analytical relations are presented which establish the relationships between electric circuits, the amplitude and frequency of the applied voltage and the peculiarities of a ferroresonance and the flow of currents.

**Keywords:** ferroresonance of currents, ferroresonance of voltages, differential equations, analytical expressions.

то есть  $B_1 = 6hA_1^3$ , а после подстановки в (33) значения  $B_1$  получим

$$\omega^2 \pm \sqrt{3}\tau\omega = \omega_0^2 - 9hA_1^2. \quad (35)$$

Уравнение (35) представляет собой соотношение, определяющее геометрическое место точек скачкообразного изменения амплитуды при изменении угловой частоты  $\omega$  в феррорезонансной цепи.

### Выводы

1. Получены дифференциальные уравнения, описывающие феррорезонансные процессы для различных схем соединения активного сопротивления, емкости и катушки с ферромагнитным сердечником.

2. Предложен вариант решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего явление феррорезонанса токов и учитывающего имеющие место при этом потери мощности на активном сопротивлении.

3. Приведены аналитические соотношения, устанавливающие взаимосвязь между амплитудными значениями токов при феррорезонансе и параметрами элементов электрической цепи, а также изменением частоты питающего напряжения.

### Список литературы

1. Барсуков В.С. Безопасность: технологии, средства, услуги / В.С. Барсуков. – М. КУДИУ. – Образ, 2001. – 500 с.
2. Теоретические основы электротехники / Г.И. Атабеков, С.Д. Купелян, А.Б. Тимофеев, С.С. Хухриков; под ред. Г.И. Атабекова, ч. 2 и 3. Нелинейные цепи. Электромагнитное поле. – М.-Л.: Энергия, 1966. – 280 с.
3. Кононов Б.Т., Кононова Е.А., Мушаров А.А. Феррорезонанс в электрических сетях с поперечной и продольной компенсацией потерь напряжения / Б.Т. Кононов, Е.А. Кононова, А.А. Мушаров // Зб. наук. пр. ХУПС. – Х.: ХУПС, 2012. – Вип. 1 (30). – С. 144-146.

Поступила в редколлегию 16.02.2012

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.Н. Чинков, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.