УДК 519.7.004.8; 621.396

Б.А. Демьянчук, Ю.Г. Душкин, П.В. Проценко, В.Б. Радимушкин

Научный центр боевого применения Сухопутных войск, Одесса

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ПУНКТОВ БОЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОТИВОВОЗДУШНОЙ ОБОРОНЫ СУХОПУТНЫХ ВОЙСК

Предлагается модель для оценки методом максимального правдоподобия вероятностей успешного целераспределения в зависимости от интенсивностей потока СВН, а также для оценки интенсивности заявок на целераспределение, которые могут быть обслужены ПБУ с заданной вероятностью.

***Ключевые слова:** воздушная обстановка, статистическое моделирование, эффективность ПБУ, целераспределение, плотность потока СВН, вероятностная модель.*

Введение

Решение задачи объективной оценки возможностей ПБУ по целераспределению обычно связано с двумя видами трудностей. Теоретические оценки возможностей ПБУ являются мало приемлемыми из-за многофакторности исходных условий для целераспределения и неопределенностей случайного и антагонистического характера. Экспериментальные же оценки вообще являются проблематичными из-за практической невозможности адекватного воспроизведения воздушной обстановки, близкой к реальной.

В известной литературе [1 – 4] наиболее часто эта задача решается с помощью математического или имитационного моделирования. Однако, отсутствие проверенных реальним опытом данных о параметрах распределения случайных процессов, касающихся вариантов действия противника и боевого расчета ПБУ в сложной обстановке, снижает ценность результатов такого моделирования.

Представляется целесообразным предлагаемое здесь статистическое моделирование процесса целераспределения, основанное, во-первых, на построении вероятностной модели, учитывающей обобщенные факторы, которые способствуют, и факторы, которые препятствуют успешному целераспределению; во-вторых, на получении экспериментальных данных об относительном количестве (доле В) успешных целераспределений при малых значениях интенсивностей (плотности потока ν) заявок на целераспределение. Целью этого этапа является экспериментальное выявление закономерности $B(\nu)$ по ограниченному количеству данных реальных испытаний ПБУ при неизбежных ограничениях, касающихся наличия и занятости целевых и ракетных каналов, наличия запаса ракет и т.п. Особенности построения вероятностной модели, которая учитывает одновременное противоборство факторов более адекватно, чем известные модели, и это отображается вероятностями противоположных событий в виде $B(\nu)$ и $[1- B(\nu)]$, сводятся к следующему.

Поскольку указанные факторы воздействуют синхронно, то результирующая скорость изменения вероятности (частости, доли) успешных целераспределений $dB(\nu)/d\nu$ должна быть пропорциональна произведению указанных вероятностей $B(\nu)$ и $[1-B(\nu)]$. В качестве коэффициента пропорциональности при этом целесообразно взять так называемый коэффициент γ противодействия факторов, имеющий смысл разности интенсивностей их противодействия. В результате получаем дифференциальное уравнение, которое адекватно отображает особенности моделируемого процесса в виде

$$dB(\nu)/d\nu = \gamma\, B(\nu)\cdot[1-B(\nu)]. \qquad (1)$$

Интегрируя (1) при начальных условиях, например, $B(\nu = \nu_{0,5}) = 0{,}5$, где $\nu_{0,5}$ – плотность потока СВН (заявок на целераспределение), при котором достигнутый уровень доли успешных целераспределений достигает половины его максимального значения, получаем на данном этапе вероятностную модель (тренд) зависимости вероятностей успешного целераспределения $B(\nu)$ от интенсивности потока заявок ν на целераспределение в виде (рис. 1)

$$B(\nu) = \{1 + \exp[\gamma(\nu - \nu_{0,5})]\}^{-1}. \qquad (2)$$

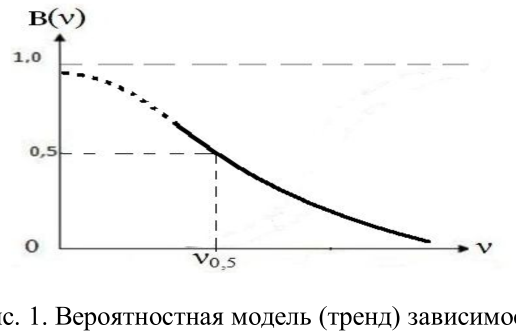

Рис. 1. Вероятностная модель (тренд) зависимости вероятностей успешного целераспределения $B(\nu)$

Пусть далее задача состоит в нахождении оценок максимального правдоподобия параметров γ и $\nu_{0,5}$ и погрешностей этих оценок по ограниченной совокупности m значений функции (2), наблюдаемых на начальном интервале значений ν, т.е. по дискретным экспериментальным данным, например, через каждые 0,1 $\nu_{\text{макс}}$.

Считаем, что для тренда (2) экспериментально получены его дискретные значения для аргумента $\nu = \nu_k$, $k = 1,\dots,т$.

Оптимальные оценки $(\nu_{0,5})^*$ и γ^* без принятия специальных мер для линеаризации тренда (2) найти не удается. Поэтому будем искать их в два этапа.

Прежде всего, получим опорные значения $(\nu_{0,5})_о$ и $\gamma_о$ по двум значениям функции (2), например, для известных и наиболее удаленных (на экспериментальном интервале) значений аргумента $\nu = \nu_1$ и $\nu = \nu_m$.

При этом получим систему уравнений в виде

$$B(\nu_1) = \left\{1+\exp\left[-\gamma_0\left(\nu_1-\nu_{0,5}\right)\right]\right\}^{-1};$$

$$B(\nu_m) = \left\{1+\exp\left[-\gamma_0\left(\nu_m-\nu_{0,5}\right)\right]\right\}^{-1}.$$

Решение системы дает опорные параметры:

$$\gamma_о = \left[\ln(1/B_1-1)-\ln(1/B_m-1)\right]/(\nu_m-\nu_1);$$

$$\left(\nu_{0,5}\right)_о = \left[\nu_m\ln(1/B_1-1)-\nu_1\ln(1/B_m-1)\right]/ \left[\ln(1/B_1-1)-\ln(1/B_m-1)\right]. \quad (3)$$

Для нахождения оценок $\left(\nu_{0,5}\right)$ и γ методом максимального правдоподобия, с учетом их опорных значений (3) и всех значений функции $B(\nu)$ на интервале $[\nu=0,\ \nu=\nu_m]$ известных с погрешностями $\sigma_1, \sigma_2,\dots, \sigma_m$, введем обозначения:

$$b_1 = \left(\nu_{0,5}\right)_о + \Delta\left(\nu_{0,5}\right) = b_{01}+\Delta b_1;$$
$$b_2 = \gamma_о + \Delta\gamma = b_{02}+\Delta b_2. \quad (4)$$

Разложим $B(\nu)$ в ряд Тейлора по параметрам b_1 и b_2 в окрестности вектора

$$b_0^T = \left(b_{01,} b_{02}\right),$$

ограничиваясь первыми членами разложения. При этом для $\nu=\nu_k$, $k=1,\dots,т$ получим значение k-й дискреты в виде

$$B(\nu_k) = B_{00}(\nu_k) + \sum_1^2 \left[dB(\nu_k)/db_i\right]_{b_{0i}}(b_i-b_{0i}) =$$
$$= B_{00}(\nu_k) + \sum\nolimits_1^2 B_i(\nu_k)(b_i-b_{0i}), \quad (5)$$

где

$$B_{0,0}(\nu_k) = \left\{1+\exp\left[-b_{02}\left(\nu_k-b_{01}\right)\right]\right\}^{-1};$$

$$B_1(\nu_k) = -\left\{1+\exp\left[-b_{02}\left(\nu_k-b_{01}\right)\right]\right\}^{-2}\times$$
$$\times\exp\left[-b_{02}\left(\nu_k-b_{01}\right)\right]b_{02};$$

$$B_2(\nu_k) = \left\{1+\exp\left[-b_{02}\left(\nu_k-b_{01}\right)\right]\right\}^{-2}\times$$
$$\times\exp\left[-b_{02}\left(\nu_k-b_{01}\right)\right]\left(\nu_k-b_{01}\right).$$

Представим для $\nu=\nu_k$, $k=1,\dots,т$ выражение (5) системой вида:

$$A^T\cdot\Delta b = C;\ A = \begin{pmatrix} B_1(\nu_1)\cdots B_1(\nu_m) \\ B_2(\nu_1)\cdots B_2(\nu_m)\end{pmatrix};$$

$$\Delta b = \begin{pmatrix}\Delta b_1 \\ \Delta b_2\end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} B(\nu_1) & - & B_{00}(\nu_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B(\nu_m) & - & B_{00}(\nu_m)\end{pmatrix}. \quad (7)$$

Прежде чем перейти к отысканию вектора оценок Δb, найдем, используя правило Саррюса, определитель информационной матрицы Фишера, который согласно (7) равняется

$$\left|A^TA\right| = \sum_{k=1}^m B_1^2(\nu_k)\sum_{k=1}^m B_2^2(\nu_k) - \left[\sum_{k=1}^m B_1(\nu_k)B_2(\nu_k)\right]^2. \quad (8)$$

Из (8), имея в виду (6), можно сделать вывод о том, что определитель матрицы $\left|A^TA\right|$ не равен нулю, следовательно, при решении уравнения (7) можно получить оценки, обладающие конечной дисперсией.

Учтем неточное описание процесса $B(\nu)$ на интервале экспериментальных измерений. Значения проекций вектора C содержат ошибку. Случайный вектор в виде $C+\delta$ имеет реализацию

$$y = C+\delta. \quad (9)$$

Если ошибки описания рассматриваемого процесса распределены нормально (это предположение не противоречит предельной теореме Ляпунова, поскольку процесс развивается под влиянием множества независимых факторов) с нулевым средним значением, то их плотность вероятности имеет вид

$$\varphi(\delta') = (2\pi)^{-\frac{m}{2}}\left|\Pi\right|^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\delta'^T\cdot\Pi^{-1}\delta'\right\}, \quad (10)$$

где Π – матрица коваріаций ошибок описания процесса.

Функция правдоподобия параметров Δb, подлежащих оцениванию, согласно (9), равняется

$$\psi(\Delta b/y) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}}\left|\Pi\right|^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y-A\cdot\Delta b\right)^T\cdot\Pi^{-1}\left(y-A\cdot\Delta b\right)\right\}, \quad (11)$$

где $A=A(b_0)$; $y=y(\Delta b_{ист}, \delta')$.

Для независимых ошибок неравноточного описания процесса $B(\nu)$ матрица коваріаций и обратная ей являются диагональными

$$\Pi = \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_m^2\end{pmatrix};\quad W_k = \sigma_k^{-2},$$

$$\Pi^{-1} = \begin{pmatrix}W_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & W_m\end{pmatrix}; \quad (12)$$

где σ_k^2 – дисперсия ошибки k-го отсчета $B(\nu)$, равная $\sigma_k^2 = M\left[\delta^2\right]$.

Уравнение правдоподобия получается из (11) после дифференцирования логарифма ψ:

$$\left(A^T\Pi^{-1}A\right)\cdot \Delta b = A^T\Pi^{-1}y\,. \qquad (13)$$

Согласно (7) и (12)

$$\left(A^T\Pi^{-1}A\right)^{-1} =$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}^2\sum_{k=1}^{m}W_kB_{2k}^2-\left(\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}B_{2k}\right)^2\right]^{-1}\times \qquad (14)$$

$$\times\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}^2 & -\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}B_{2k}\\ -\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}B_{2k} & \sum_{k=1}^{m}W_kB_{2k}^2\end{pmatrix}.$$

В соответствии с (3), (4), (6), (12), (14) в результате получаются оптимальные оценки параметров ожидаемых темпов изменения показателя реальной эффективности целераспределения в зависимости от плотности потока заявок на целераспределение, означающих все более усложняющуюся обстановку для осуществления успешного целераспределения в ПБУ.

Оценки параметров, а именно, коэффициента интенсивности γ противодействия факторов, способствующих и препятствующих увеличению величины вероятности успешного целераспределения, и плотности потока целей $\nu_{0,5}$, зависящих от параметров ПБУ, получим в виде элементов матрицы:

$$\begin{pmatrix}\nu_{0,5}\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\nu_{0,5}\right)_0+\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left[W_1B_{1i}\sum_{k=1}^{m}W_kB_{2k}^2-W_1B_{2i}\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}B_{2k}\right]y_i}{\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}^2\sum_{k=1}^{m}W_kB_{2k}^2-\left(\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}B_{2k}\right)^2}\\ \gamma_0+\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left[W_1B_{2i}\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}^2-W_1B_{1i}\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}B_{2k}\right]y_i}{\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}^2\sum_{k=1}^{m}W_kB_{2k}^2-\left(\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}B_{2k}\right)^2}\end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Дисперсии оценок искомых параметров тренда (2), ν0,5 и γ в соответствии с (14) имеют вид

$$\sigma_\nu^2=\frac{\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}^2}{\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}^2\sum_{k=1}^{m}W_kB_{2k}^2-\left(\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}B_{2k}\right)^2};$$

$$\sigma_\nu^2=\frac{\sum_{k=1}^{m}W_kB_{2k}^2}{\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}^2\sum_{k=1}^{m}W_kB_{2k}^2-\left(\sum_{k=1}^{m}W_kB_{1k}B_{2k}\right)^2}.$$

Точности оценок параметров тренда (рис. 1) растут при увеличении числа дискрет и точности отсчетов $B(\nu_к)$.

Подставляя оценки параметров (15) в выражение (2) для тренда, получаем функцию, позволяющую прогнозировать ожидаемую закономерность изменения интегрального показателя эффективности целераспределения в зависимости от интенсивности поступающих заявок на целераспределение.

Выводы

1. Предлагаемая модель, учитывающая объективное противоборство факторов процесса, способствующих и препятствующих реализации эффекта успешного целераспределения, является более адекватной, чем известные.

2. Модель позволяет прогнозировать (по ограниченной совокупности экспериментальных данных) эффективность целераспределения в ПБУ (например, в виде доли успешных целераспределений за налет), которую можно достичь при известной интенсивности заявок, а также определять интенсивность потока заявок, которую можно реализовать с заданной вероятностью.

3. Статистическая модель является удобной для решения с помощью компьютера практических задач оценки эффективности целераспределения в ПБУ.

Список литературы

1. *Вентцель Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. – М.: Сов. радио, 1972. – 551 с.*
2. *Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле / Ю.В. Чуев. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.*
3. *Чуев Ю.В. Технические задачи исследования операций в военном деле / Ю.В. Чуев, Г.П. Спехова. – М.: Сов. радио, 1971. – 296 с.*
4. *Кириченко И.О.,Математичні основи теорії дуэльного боя / И.О. Кириченко, Л.Г. Раскин. – Х.: ІВВ МВС України. - 2005. – 290 с.*

Поступила в редколлегии 15.05.2012

Рецензент: д-р техн. наук, доц. В.В. Скачков, Научный центр боевого применения Сухопутных войск Военной академии, Одесса.

СТАТИСТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦІНКИ ПРОПУСКНОЇ СПРОМОЖНОСТІ ПУНКТІВ БОЙОВОГО УПРАВЛІННЯ ПРОТИПОВІТРЯНОЇ ОБОРОНИ СУХОПУТНИХ ВІЙСЬК

Б.А. Демьянчук, Ю.Г. Душкин, П.В. Проценко, В.Б. Радимушкин

Пропонується модель для оцінки методом максимальної правдоподібності вірогідності успішного цілерозподілу залежно від інтенсивностей потоку СВН, а також для оцінки інтенсивності заявок на цілерозподіл, які можуть бути обслужені ПБУ із заданою ймовірністю.

Ключові слова: *повітряна обстановка, статистичне моделювання, ефективність ПБУ, цілерозподіл, густина потоку ЗПН, імовірнісна модель.*

THE STATISTICAL MODEL FOR THE CAPACITY ESTIMATION OF THE ARMY AIR DEFENSE COMMAND-POST

B.A. Dem'yanchuk, Yu.G. Dushkin, P.V. Prozenko, V.B. Radimushkin

The model of estimation by means of maximum probability verisimilitude of successful purpose distribution is proposed depending on the intensity of air attack means and also, of intensity estimation of purpose distribution demands which can be serviced by the point of combat control with the given probability.

Keywords: *air situation, statistical modeling, command-post effectiveness, targeting assignement, air attack density, pro balistic model.*