УДК 514.753

А.В. Панкратов, Т.Е. Романова, В.О. Синявин

Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков

ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ 3D-ОБЪЕКТОВ

Рассматривается информационная система 3D-Clustering, предназначенная для решения задач оптимальной кластеризации 3D phi-объектов. Приводится архитектура системы, основанная на современных методах математического моделирования оптимизационных задач размещения.

Ключевые слова: *базовые 3D-объекты, phi-функции, математическая модель, оптимальная кластеризация.*

Введение

Оптимизационные задачи размещения (Packing and Cutting [1, 2]), в частности, задачи кластеризации, относятся к классу NP-сложных задач. Эффективное решение задач данной предметной области обусловлено возможностью построения математических моделей в виде задач условной оптимизации [3].

Задача оптимальной кластеризации объектов сводится к задаче включения ориентированных 3D-объектов A и B в контейнер Ω с целью минимизации заданного критерия качества F, при условии, что $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B = \varnothing$, где $\operatorname{int} A$ – внутренность объекта A. В пределах данного исследования, полагаем $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$; $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$, где A, B принадлежат к классу phi-объектов [2] (рис. 1), $A_i \in \mathfrak{I}$, $B_j \in \mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}$ – семейство базовых 3D объектов.

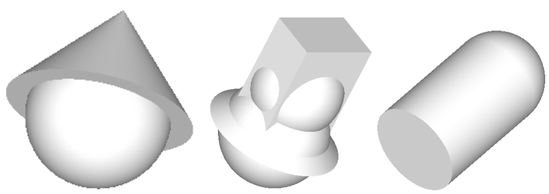
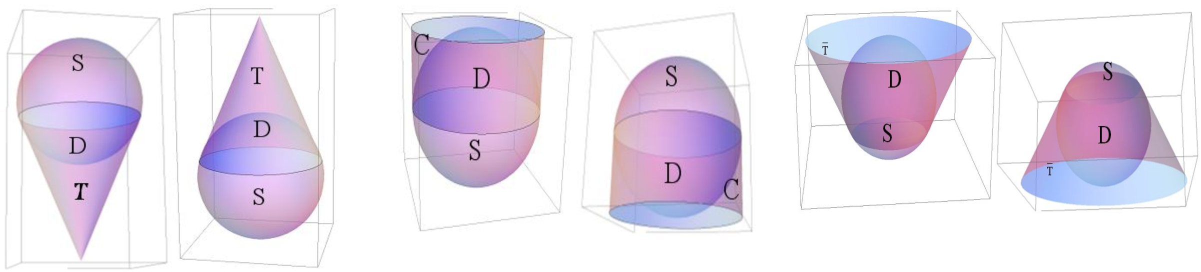


Рис. 1. Примеры составных 3D phi-объектов

В качестве базовых 3D-объектов рассматриваются: шар S, прямой параллепипед P, прямой круговой цилиндр C, конус T (возможны две ориентации, при этом основание конуса T параллельно плоскости OXY), усечённый конус $\overline{T}$ (возможны две ориентации, при этом основания конуса $\overline{T}$ параллельны плоскости OXY), шаровой сегмент D (возможны две ориентации, при этом основание сегмента D параллельно плоскости OXY), заданные своими метрическими характеристиками: $m_S = (r)$, где r радиус шара S; $m_P = (a, b, h)$, где $2a$ длина, $2b$ ширина, $2h$ высота параллелепипеда P; $m_C = (r, h)$, где $2h$ высота, r радиус цилиндра C; $m_T = (r, h)$, где h высота, r радиус основания конуса T; $m_{\overline{T}} = (h, r_1, r_2)$, где h высота, r_1 и r_2 радиусы нижнего и верхнего оснований $\overline{T}$ ($r_1 > r_2$ или $r_1 < r_2$); $m_D = (r, h)$, где r радиус образующего шара, h высота D. Определим объект D в зависимости от метрических характеристик следующим образом: $D = S \cap T$, если $h < r$ (рис. 2, а); $D = S \cap C$, если $h = r$ (рис. 2, б); $D = S \cap \overline{T}$, если $h > r$ (рис. 2, в). Начало собственной системы координат (в дальнейшем, полюс) базовых объектов находится: в центре симметрии для центрально симметричных базовых объектов; в центре основания конуса T; в центре основания усеченного конуса $\overline{T}$; в центре образующего шара сегмента D. Положение ориентированного объекта A (B) в пространстве R^3 однозначно определяет вектор трансляции $u_1(u_2)$, где $u_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$.



а б в

Рис. 2. Виды шарового сегмента: а – $h < r$; б – $h = r$; в – $h > r$

Результаты исследований

Пусть $u = (a, b, c, u_1, u_2) \in R^{\sigma}$ – вектор переменных, где (a, b, c) – переменные метрические характеристики контейнера $\Omega \in \{P\}$, u_1, u_2 – переменные параметры размещения phi-объектов A и B, R^{σ} – арифметическое евклидово пространство.

В качестве функции цели F рассматриваются: $F_1 = a \cdot b \cdot c$; $F_2 = a + b + c$.

Как известно [3], математическая модель задачи оптимальной кластеризации имеет вид

$$\min_{u \in W \subset R^{\sigma}} F(u), \tag{1}$$

где $W = \{u \in R^{\sigma} : \Lambda(u) \ge 0\}$;

$$\Lambda(u) = \min\{\Phi^{AB}, \Phi^{\Omega^* A}, \Phi^{\Omega^* B}\}, \tag{2}$$

Φ^{AB} – phi-функция, описывающая условие непересечения объектов A и B; $\Phi^{\Omega^* A}, \Phi^{\Omega^* B}$ – phi-функции, моделирующие условие включения объектов A и B в контейнер Ω, где $\Omega^* = R^3 \setminus \operatorname{int}\Omega$. В статье [3] определён полный класс phi-функций для объектов S, P, C, T, P^*. Phi-функции для усеченных конусов приведены в работе [4].

В этой связи определим семейство phi-функций для шарового сегмента D и базовых объектов:

$$\Phi^{DZ} = \max\{\Phi^{TZ}, \Phi^{SZ}\}, \text{ если } h < r;$$

$$\Phi^{DZ} = \max\{\Phi^{CZ}, \Phi^{SZ}\}, \text{ если } h = r;$$

$$\Phi^{DZ} = \max\{\Phi^{\overline{T}Z}, \Phi^{SZ}\}, \text{ если } h > r;$$

$$\Phi^{P^* D} = \min\{\Phi^{P_i D}, i = 1, ..., 6\},$$

где $Z \in \{P, S, C, T, \overline{T}, D\}$; $P^* = R^3 \setminus \operatorname{int} P$, $P^* = \bigcup_{i=1}^{6} P_i$,

$P_1 = \{(x, y, z) \in R^3 : x \ge a\}$; $P_2 = \{(x, y, z) \in R^3 : y \ge b\}$;

$P_3 = \{(x, y, z) \in R^3 : z \ge c\}$; $P_4 = \{(x, y, z) \in R^3 : x \le -a\}$;

$P_5 = \{(x, y, z) \in R^3 : y \le -b\}$; $P_6 = \{(x, y, z) \in R^3 : z \le -c\}$.

Следуя [2], имеем:

$$\Phi^{AB} = \min\{\Phi_{ij}, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n\};$$

$$\Phi^{\Omega^* A} = \min\{\Phi_i, i = 1, ..., m\}; \ \Phi^{\Omega^* B} = \min\{\Phi_j, j = 1, ..., n\},$$

где Φ_{ij} – phi-функция для базовых объектов $A_i \in \Im$ и $B_j \in \Im$; Φ_i – phi-функция для базового объекта $A_i \in \Im$ и Ω^*; Φ_j – phi-функция для базового объекта $B_j \in \Im$ и Ω^*.

Из соотношения (2) следует, что $\Lambda(u) \ge 0$ когда: $\Phi^{AB} \ge 0$; $\Phi^{\Omega^* A} \ge 0$ и $\Phi^{\Omega^* B} \ge 0$.

Каждая из phi-функций в (2) является композицией минимумов базовых phi-функций.

По аналогии с двумерным случаем [5], каждому phi-неравенству $\Phi^{AB} \ge 0$, $\Phi^{\Omega^* A} \ge 0$, $\Phi^{\Omega^* B} \ge 0$ поставим в соответствие phi-дерево, концевым вершинам которого соответствуют системы, в общем случае, нелинейных неравенств $f_k(u) \ge 0$. Обозначим phi-деревья для $\Phi^{AB} \ge 0$ и $\Phi^{\Omega^*} = \min\{\Phi^{\Omega^* A}, \Phi^{\Omega^* B}\} \ge 0$ через $\Im'$ и $\Im''$ соответственно. Верхняя оценка числа концевых вершин дерева решений $\Im$ задачи (1) – (2) равно $\eta = \eta' \cdot (\eta'')^2$, где η' – верхняя оценка числа концевых вершин $\Im'$ для пары объектов A и B, а η'' – верхняя оценка числа концевых вершин $\Im''$ для объектов A и Ω^* (B и Ω^*). Обозначим концевые вершины дерева $\Im$ через υ_k, $k = 1, 2, \ldots, \eta$. Каждой вершине υ_k соответствует система неравенств $f_k(u) \ge 0$. Таким образом, $W = \bigcup_{k=1}^{\eta} W_k$, где W_k описывается системой $f_k(u) \ge 0$.

Задача (1) – (2) сводится к следующей оптимизационной задаче:

$$u^* = \min\{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_{\eta}^*\}, \tag{3}$$

где $$u_k^* = \arg \min_{u \in W_k \subset R^{\sigma}} F(u), \ k = 1, 2, \ldots, \eta. \tag{4}$$

В общем случае число локальных экстремумов в (4) значительно меньше, чем η. Это обусловлено следующими особенностями задачи (3) – (4): а) значительная часть концевых вершин из множества $\{\upsilon_k, k = 1, 2, \ldots, \eta\}$ соответствует несовместным системам $f_k(u) \ge 0$ и, как следствие, $W_k = \varnothing$; б) во многих случаях, $u_{k_1}^*$ и $u_{k_2}^*$, $k_1 \ne k_2$, из (4) могут совпадать; в) не все точки локальных экстремумов $u_k^*, k = 1, 2, \ldots, \eta$ задачи (4), являются локальными экстремумами задачи (1) – (2), в частности возможны случаи, когда $W_{k_2} \subset W_{k_1}$, $k_1 \ne k_2$.

Информационная система 3D-*Clustering* содержит в себе следующие логические модули:

– модуль ввода данных с возможностью выбора функции цели;

– модуль анализа исходных данных;

– модуль формирования составных 3D-объектов на основании исходных данных о базовых 3D-объектах;

– модуль, содержащий библиотеку базовых phi-функций;

– модуль генерации пространства решений (phi-неравенств);

– модуль локальной оптимизации

– модуль глобальной оптимизации

– модуль рендеринга полученных результатов.

На рис. 3 представлена UML диаграмма взаимодействия пользователя с системой.

Для решения задач нелинейной оптимизации (4) используется *third-party-component* Microsoft Solver Foundation [http://msdn.microsoft.com/en-us/devlabs/hh145003.aspx]. Solver Foundation предназначен для решения задач оптимизации на базе технологии .NET, имеет мощную систему отчётности и анализа, встроенный декларативный язык OML.

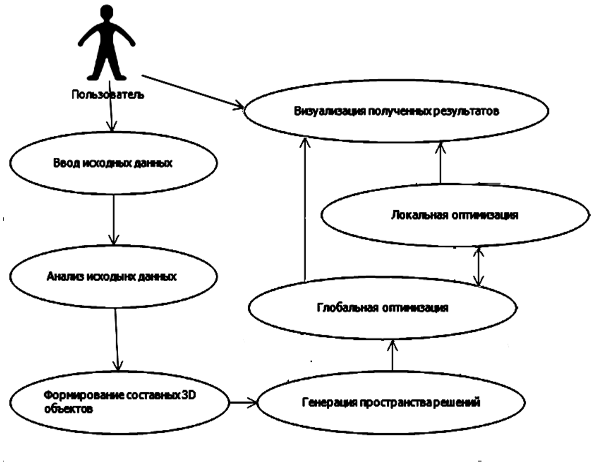


Рис. 3. UML диаграмма взаимодействия пользователя с системой 3D-Clustering

Поскольку число η локальных экстремумов достаточно велико, в системе *3D-Clustering* предусмотрена возможность параллельного программирования (поиска локальных экстремумов на кластере). Для этого используется паттерн Map-reduce [http://code.google.com/edu/parallel/mapreduce-tutorial.html#MapReduce] и технология Windows Communication Foundation [http://msdn.microsoft.com/en-us/library/dd456779. aspx]. В качестве кластера могут быть использованы любые вычислительные мощности с установленной библиотекой Solver Foundation и сетевым доступом.

Для рендеринга полученных результатов применяется технология Windows Presentation Foundation [http://msdn.microsoft.com/en-us/library/ms754130. aspx] и open-source библиотека HelixToolkit [http://helixtoolkit.codeplex.com/], которая позволяет в режиме реального времени моделировать и визуализировать 3D объекты.

Ниже приведен пример решения задачи оптимальной кластеризации 3D составных объектов, реализованный системой 3D-Clustering.

Пример. Функция цели $F = F_2$. Контейнер: параллелепипед P.

Объект A: $A = \bigcup_{i=1}^{2} C_i(r_i, h_i, v_i)$;

$$r_1 = 1, h_1 = 1.5, v_1 = (0,0,0);$$

$$r_2 = 2, h_2 = 2, v_2 = (0,0,1);$$

Объект B: $B = \bigcup_{i=1}^{2} P(a_i, b_i, c_i, v_i)$

$$(a_1, b_1, c_1) = (4,1,1), v_1 = (0,0,0);$$

$$(a_2, b_2, c_2) = (3,1,1), v_1 = (0.5,0,1).$$

Число концевых вершин дерева решений: $\eta = 104976$

Оптимальное решение:

$F(u^*) = 14.5$; $u^* = (a^*, b^*, c^*, u_1^*, u_2^*) \in R^9$;

$(a^*, b^*, c^*) = (7,4,3.5)$;

$u_1^* = (0, 0, -1.5000001621168701)$;

$u_2^* = (3.000100016211687, 0, -1.02118200016021)$.

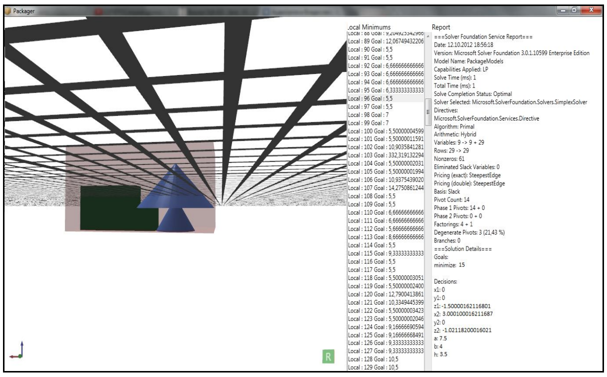


Рис. 4. Размещение объектов A и B, соответствующее точке u^*

Выводы

Информационная система 3D-Clustering может быть использована для решения оптимизационных 3D-задач упаковки, которые имеют широкий спектр применения при исследовании актуальных проблем биологии, медицины, материаловедения, в нанотехнологиях, робототехнике, в задачах распознавания образов, в химической промышленности, энергетике, машино-, судо-, авиастроении, строительстве и т.д.

Список литературы

1. *Wascher G, Hauner H and Schumann H (2007) An improved typology of cutting and packing problems. European Journal of Operational Research 183(3, 16): 1109-1130.*

2. *N. Chernov ,Y. Stoyan, T. Romanova. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem// Computational Geometry: Theory and Applications, vol. 43:5 (2010), pp. 535-553.*

3. *Scheithauer G, Stoyan Yu and Romanova T (2005) Mathematical modeling of interactions of primary geometric 3D objects. Cyber. Systems Anal 41: 332-342.*

4. *Стоян Ю.Г. Ф-функции усеченных конусов / Стоян Ю.Г., Евсеева Л.Г., Романова Т.Е. // Доклады НАН Украины. – 2005. – № 7. – С. 30-35.*

5. *G. Scheithauer, Y. Stoyan, J. Bennell, T. Romanova, A. Pankratov (2012) Containment of a pair of rotating objects within a container of minimal area or perimeter/ Preprint MATH-NM-02-2012, TU Dresden.*

Поступила в редколлегию 25.07.2012

Рецензент: д-р техн. наук, доц. В.В. Шляхов, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ІНФОРМАЦІЙНА СИСТЕМА ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЇ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ 3D ОБ'ЄКТІВ

О.В. Панкратов, Т.Є. Романова, В.О. Синявін

Розглядається інформаційна система 3D-Clustering, призначена для вирішення задач оптимальної кластеризації 3D складених phi-об'єктів. Приводиться архітектура системи, заснована на сучасних методах математичного моделювання оптимізаційних задач розміщення.

Ключові слова: *базові 3D-об'єкті, phi-функції, математична модель, оптимальна кластеризація.*

INFORMATION SYSTEM FOR SOLVING PROBLEMS OF OPTIMAL CLUSTERING OF 3D-OBJECTS

A.V. Pankratov, T.E. Romanova, V.O. Sinyavin

The paper considers information system 3D-Clustering. The system is developed for solving problems of optimal clustering of 3D composed phi-objects. Software architecture of the system is introduced The architecture is based on state-of-art methods of mathematical modeling of optimization placement problems.

Kew words: *basic 3D-objects, phi-functions, mathematical model, optimal clustering.*