УДК 531/534:001.8

О.О. Юрченко

Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків

ДИНАМІКА ВЕРТИКАЛЬНИХ РУХІВ ЛІТАКА ПРИ ПОСАДЦІ

Вивчаються вертикальні рухи літака, розрахункова схема якого уявляється у вигляді механічної системи з двома ступенями вільності. Розглядається порядок та методика складання системи диференціальних рівнянь, які описують динаміку рухів в умовах лінійних гармонічних коливань.

Ключові слова: *механічна система, узагальнені координати, лінійні коливання, математична модель.*

Вступ

Основу розрахункового дослідження руху будь-якої механічної системи в явному чи неявному видах становлять диференціальні рівняння в узагальнених координатах, які єдиним чином визначають положення системи у просторі в деякий момент часу [1]. Але у деяких випадках вибір узагальнених координат не є однозначним, а залежить, в першу чергу, від характеру руху мас системи і поставленої мети дослідження. Сукупність, яка складається з системи диференціальних рівнянь руху відносно узагальнених координат, а також з параметрів пружних з'єднань та зовнішніх сил разом із початковими умовами, становить основу математичної моделі розглянутої системи.

Як показує інженерна практика існує багато причин виникнення лінійних явищ в механічних системах, які обумовлені як діючими силами, так і характером руху та параметрами самої системи. До диференціальних рівнянь, які описують коливальні рухи системи, перш за все, входять її інерційні характеристики у вигляді мас або моментів інерції при обертальному русі. Крім того, треба враховувати жорсткості пружин, валів, балок та будь-яких інших пружних елементів, а також вплив сил опору та вимушених сил. Чисельні значення параметрів механічної системи можна визначити з достатньою точністю за допомогою аналітичних методів. Такий шлях є одним з можливих, якщо система ще не утворена, тобто знаходиться у стані проектування. Але такий шлях стає недоцільним при наявності деталей або конструктивних елементів складної геометричної форми. Тоді їх інерційні та жорсткостні характеристики точніше визначаються експериментально.

Основна частина

Положення у просторі голономної системи із стаціонарними в'язами з S ступенями вільності в будь-який момент часу визначається q_s узагальненими координатами.

Розглянемо вектор фазових координат $\overline{X}$, складові якого містять узагальнені координати q_s та узагальнені швидкості $\dot{q}_s$. Систему диференціальних рівнянь такої системи можна записати у векторному вигляді

$$\dot{\overline{X}} = A(\overline{x}, t). \tag{1}$$

Вектор-стовпець $A(\overline{x}, t)$ зручно представити таким чином

$$A(\overline{x}, t) = A_0\overline{x} + F(\overline{x}, t), \tag{2}$$

де A_0 – квадратична матриця з постійними елементами розмірністю $2S \times 2S$;

S – число ступенів вільності механічної системи;

$F(\overline{x}, t)$ – вектор-стовпець, який можна записати у вигляді додатку

$$F(\overline{x}, t) = f_1(t) + f_2(t). \tag{3}$$

У випадках, коли рухи усіх елементів системи описуються диференціальними рівняннями другого порядку, систему рівнянь відносно вектора узагальнених координат можна уявити в стандартній формі

$$J\ddot{\overline{q}} + B\dot{\overline{q}} + Cq + f(q, \dot{q}, t) = Q(t), \tag{4}$$

де J – матриця інерції;

B – матриця лінійних сил опору;

C – матриця жорсткості;

$f(q, \dot{q}, t)$ – вектор сил, які залежать від узагальнених координат, узагальнених швидкостей та часу;

$Q(t)$ – вектор зовнішніх сил.

Від системи рівнянь (4) можна перейти до систем рівнянь (1), розширюючи простір фазових координат

$$\overline{x} = \{\overline{q}, \dot{\overline{q}}\}.$$

Системи диференціальних рівнянь розв'язуються при заданих початкових або граничних умовах, які для рівняння (1) записуються у вигляді:

$$\overline{x}(0) = \overline{x}_0,\ \overline{x}(0) = \overline{x}(T_0).$$

Система рівнянь (1) з урахуванням початкових або граничних умов еквівалентна наступним інтегральним рівнянням

$$\overline{X} = \int_0^t A(\overline{x}, \tau)\,d\tau + x_0, \quad \int_0^T A(\overline{x}, \tau)\,d\tau = 0.$$

Особливий клас систем, які називаються лінійними, одержується при виконанні умов $f_1(\bar{x})=0$ в рівнянні (3) або $f(q,\dot{q},t)=0$ в рівнянні (4).

Для складання диференціальних рівнянь можна використовувати теорію рівнянь Лагранжа 2-го роду, загальні рівняння динаміки або принцип Даламбера. При цьому припускається що коливання лінійні. Досить переконатися, що необхідні та достатні умови лінійності – це можливість уявити кінетичну та потенціальну енергії системи, а також дисипативну функцію у вигляді квадратичних форм відносно узагальнених координат $q_к$ та узагальнених швидкостей $\dot{q}_к$:

$$T=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\ \Pi=\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}q_iq_j,\ \Phi=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

де a_{ij} – узагальнений коефіцієнт інерції, який характеризує інерційні властивості системи;

c_{ij} – узагальнений коефіцієнт жорсткості, який характеризує жорсткість елементів системи;

b_{ij} – узагальнений коефіцієнт дисипації, який характеризує розсіювання механічної енергії системи.

Значення коефіцієнтів a_{ij} і c_{ij} можна визначити безпосередньо із відповідних виразів [5]. Враховуючи, що при диференціюванні по q_i і q_j в рівнянні Лагранжа порядок малості понижується на одиницю, значення кінетичної і потенціальної енергії визначаються з точністю до малих величин другого порядку малості.

Треба відмітити, що зневаження малими величинами вищих порядків малості вносить деяку погрішність в отримані результати, але вона цілком компенсується значним спрощенням вивчення коливального процесу.

Для прикладу розглянемо методику складання вертикальних коливань літака при посадці, якщо реакції переднього та заднього амортизаторів пропорційні їх переміщенням y_1 і y_2, коефіцієнт жорсткості амортизаторів переднього колеса C_1, заднього – C_2, вага літака $\bar{G}$, момент інерції відносно поперечної осі, яка проходить через центр мас J_c. Аеродинамічні сили в рахунок не приймаються, амортизаційні стояки вважаємо вертикальними.

В такий постановці в умовах посадки літака його рух у вертикальній площині визначається зміщенням стояків y_1 і y_2, тобто він має два ступені вільності. Приймемо y_1 і y_2 за узагальнені координати

$$q_1=y_1,\ \ q_2=y_2.$$

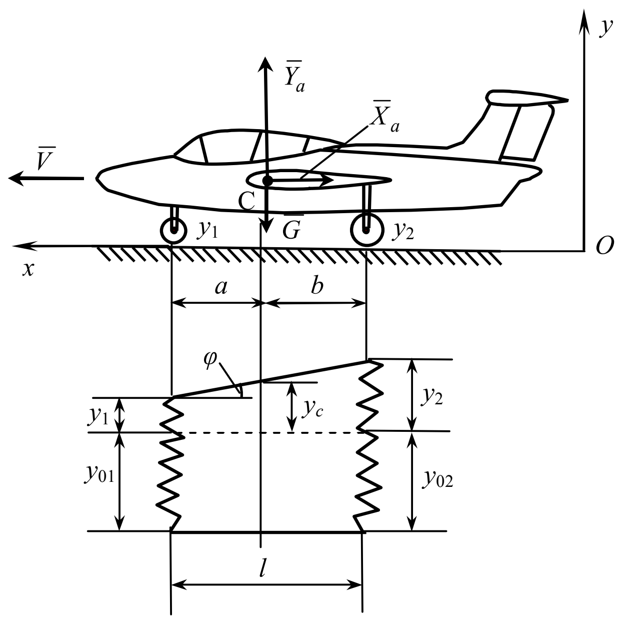

Рис. 1. Схема амортизаторів

Запишемо рівняння Лагранжа другого роду в узагальнених координатах

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial y_1}=Q_1,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial y_2}=Q_2. \quad (6)$$

Визначимо кінетичну енергію літака в плоскопаралельному русі

$$T=\frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{y}_c^{\,2}+\frac{1}{2}I_c\dot{\varphi}^2, \quad (7)$$

де y_c – координата центра мас літака; $\dot{\varphi}$ – кутова швидкість обертання навколо центра мас.

Виразимо лінійну швидкість $\dot{y}_c$ і кутову швидкість ω через узагальнені координати y_1 і y_2. На рис. 1 значення y_{01} і y_{02} відповідають положенню статичної рівноваги літака, навколо якої він здійснює вертикальні коливання. Тоді координата центра мас визначається за формулою

$$y_c=y_1+\frac{y_2-y_1a}{l}=\frac{1}{l}\left(y_1b+y_2a\right), \quad (8)$$

а кут обертання при малих коливаннях має вигляд

$$tg\varphi\approx\varphi=\frac{y_2-y_1}{l}. \quad (9)$$

Диференціюючи вирази y_c і $tg\varphi$, отримаємо лінійну вертикальну швид-кість центра мас та кутову швидкість обертання літака навколо точки С

$$\dot{y}_c=\dot{y}_1\frac{b}{l}+\dot{y}_2\frac{a}{l},\ \ \dot{\varphi}=\frac{\dot{y}_2-\dot{y}_1}{l}.$$

Після підстановки цих значень у вираз (7) кінетичну енергію можна записати таким чином

$$T=\frac{G}{2gl}\left(b\dot{y}_1^2+a\dot{y}_2^2\right)+\frac{I_c}{2l^2}\left(\dot{y}_2-\dot{y}_1\right)^2.$$

Пружні сили амортизаторів консервативні, тому для визначення узагальнених сил складемо вираз потенціальної енергії літака

$$\Pi = -\frac{G}{l}\left(y_1 b + y_2 a\right) + \frac{1}{2} C_1 y_1^2 + C_2 y_2^2.$$

Узагальнені сили в цьому випадку визначимо через потенціальну енергію системи

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_1} = \frac{G}{l} b - C_1 y_1, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_2} = \frac{G}{l} a - 2C_2 y_2.,$$

проведемо операції, які вказані в рівнянні Лагранжа

$$\frac{\partial T}{\partial y_1} = 0, \ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} = \frac{G}{gl^2} = \left(b^2 \dot{y}_1 + ab\dot{y}_2\right) + \frac{I_c}{l^2}\left(\dot{y}_1 - \dot{y}_2\right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_2} = 0, \ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} = \frac{G}{gl^2} = \left(ab\dot{y}_1 + a^2 \dot{y}_2\right) + \frac{I_c}{l^2}\left(\dot{y}_2 - \dot{y}_1\right).$$

У розгорнутому вигляді рівняння Лагранжа (6) будуть мати вигляд:

$$\left(Gb^2 - I_c g\right)\ddot{y}_1 + \left(Gab - I_c g\right)\ddot{y}_2 + C_1 g y_1 = Gblg\ ;$$

$$\left(Gab^2 - I_c g\right)\ddot{y}_1 + \left(Ga^2 - I_c g\right)\ddot{y}_2 + 2C_2 g y_2 = Galg.$$

У результаті отримані неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку відносно узагальнених координат y_1 і y_2.

Для порівняння розглянемо інший спосіб складання диференціальних рівнянь руху літака у випадку, коли за узагальнені координати вибрані вертикальні переміщення центра мас y_c та кут обертання φ навколо центра мас, який відлічується відносно горизонтальної площини. Так як рух літака в вертикальній площині визначається двома узагальненими координатами $q_1 = y_c$ і $q_2 = \varphi$, то система має дві ступені вільності.

Запишемо рівняння Лагранжа для цього випадку

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_c}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_c} = Q_1, \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_2.$$

Між функціями $y_1(t)$ і $y_2(t)$, які визначають переміщення пружних в'язей, має місце співвідношення

$$y_2(t) = y_1(t) - \frac{\dot{y}_c}{2a}.$$

Коли координата y_c відлічується від положення статичної рівноваги, потенціальною енергією постійних сил ваги літака можна знехтувати, бо вони зрівноважуються консервативними статичними силами пружності амортизаторів. Тому вирази кінетичної і потенціальної енергій можна записати таким чином

$$T = \frac{G}{2g}\dot{y}_c^2 + J_0 \frac{\dot{\varphi}^2}{2},$$

$$\Pi = \frac{1}{2} C_1 (y_c - a\varphi - y_1)^2 + \frac{1}{2} C_2 (y_c - b\varphi - y_2)^2,$$

де a, b – відповідно відстані коліс до центра мас літака.

Проведемо операції, які указані в рівнянні Лагранжа і визначимо узагальнені сили аналогічно з тим, як це було зроблено у попередньому випадку. В результаті отримаємо систему диференціальних рівнянь руху відносно узагальнених координат y_c і φ

$$\frac{G}{g}\ddot{y}_c = -C_1(y_c - a\varphi) - C_2(y_c + b\varphi) + C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

$$J_c \ddot{\varphi} = C_1 a(y_c - a\varphi) + C_2(y_c + b\varphi) + C_1 a y_1 + C_2 b y_2.$$

Висновок

Таким чином, із порівняння отриманих результатів можна зробити висновок, що вид і розв'язання диференціальних рівнянь руху, які описують лінійні механічні системи суттєво залежать від вибору узагальнених координат. Але в обох випадках в кінцевому результаті отримуємо систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку відносно вибраних незалежних параметрів, які однозначно визначають положення літака у просторі.

Список літератури

1. *Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний . – М.: Высшая школа, 1975. – 247 с.*
2. *Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Высшая школа, 1959. – 439 с.*

Надійшла до редколегії 27.12.2012

Рецензент: канд. техн. наук, доц. І.Б. Ковтонюк, Харківський університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба, Харків.

ДИНАМИКА ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ САМОЛЕТА ПРИ ПОСАДКЕ

О.А. Юрченко

Изучаются вертикальные движения самолета, расчетная схема которого представляется в виде механической системы с двумя степенями вольности. Рассматривается порядок и методика составления системы дифференциальных уравнений, которые описывают динамику движений в условиях линейных гармонических колебаний.

Ключевые слова: *механическая система, обобщены координаты, линейные колебания, математическая модель.*

DYNAMICS OF VERTICAL MOTIONS OF AIRPLANE AT LANDING

O.A. Yurchenko

Vertical motions of airplane the calculation chart of which appears as a mechanical system with two degrees of liberty are studied. An order and method of drafting of the system of differential equalizations which describe the dynamics of motions in the conditions of linear harmonic vibrations is examined.

Keywords: *mechanical system, co-ordinates, linear vibrations, mathematical model, are generalized.*