В.А. Лещинский

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

Формально описаны некоторые исходные понятия логики, которыми пользуется математик в своей работе. С этой целью на языке алгебры подстановочных операций дана аксиоматическая характеристика понятий равенства элементов, простейших свойств предикатов, декартова произведения множеств.

Ключевые слова: *теория интеллекта, алгебра конечных предикатов и предикатных операций, понятие.*

Введение

Одна из важных задач теории интеллекта состоит в идентификации понятий логики. Объекты идентификации будем черпать, для начала, из множества тех логических понятий, которыми пользуется в своей работе математик. Такие понятия легко обнаруживаются. Это – элемент, переменная и множество; наборы элементов и переменных; отношение и предикат; равенство элементов и их наборов; равенство и включение множеств и отношений; декартово произведение множеств и отношений; объединение, пересечение и дополнение множеств и отношений; функция и отображение; эквивалентность и разбиение; замена и перестановка переменных, подстановка; кванторы, числа и т. д. Одной из важных мер, обеспечивающих эффективность идентификации, является четкое различение логических понятий, используемых в роли средства и объекта описания.

Известный логик Клини во введении к курсу математической логики пишет [1]: «Итак, мы собираемся изучать логику, и притом с помощью математических методов. Но тут мы встречаемся с парадоксом: разве для того, чтобы изучать логику с помощью математики (да и вообще любым систематическим методом), нам не придется пользоваться самой логикой? Этот парадокс решается просто, но чтобы до конца понять, как это делается, потребуется некоторое время. Основная идея здесь состоит в том, что мы будем тщательно различать логику, которую мы изучаем, и логику, с помощью которой это делается. Но тогда нам придется различать и соответствующие языки: изучаемая нами логика формулируется на некотором языке, который мы будем называть предметным языком (или языком-объектом), поскольку этот язык – так же как и связанная с ним логика – является предметом (объектом) нашего изучения. Язык же, в рамках которого мы исследуем предметный язык (употребляя при этом те логические средства, которые могут понадобиться), мы так и назовем языком исследователя. Соответственно можно говорить о предметной (или объектной) логике и логике исследователя. Необходимо все время помнить об этом различии между изучаемой (предметной) логикой и логикой как средством такого изучения (то есть логикой исследователя). Тому, кто не готов к этому, стоит сразу же закрыть эту книгу и подыскать себе другое занятие по вкусу (скажем, составление шарад или пчеловодство)».

Основной раздел

1. Средства идентификации понятий

Кратко охарактеризуем те логические понятия, которые используются в данной статье в качестве средства идентификации рассматриваемых понятий. Более подробно они описаны в работе [2]. Вводится конечное число m предметных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и их значения, которые черпаются из заранее выбранного универсума U. Полагаем, что на декартовом квадрате универсума определен предикат равенства D. На предметном пространстве, представляющем собой декартову степень U^m универсума, определяются предикаты $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Предикаты записываются формулами алгебры предикатов с базисными элементами в виде предикатов узнавания предмета:

$$x_i^a = 1 \Leftrightarrow x_i = a,$$

($i=\overline{1,m}$, $a \in U$) и базисными операциями дизъюнкции $\vee$, конъюнкции $\wedge$ и отрицания $\neg$. Из всевозможных таких предикатов образуется множество **M**. Далее определяются предикатные операции $\mathbf{F}: \mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{M}$.

Важно ввести ряд условий, которые часто будут встречаться в дальнейшем, это сделает более компактным дальнейшее изложение, да и будут попутно введены важные понятия, которые используются в самом начале теории начальных логических понятий.

Когда квантор берется по предметным переменным, заданным на универсуме, то универсум в ключе квантора будем опускать. Если множество (отношение) включено в универсум (в предметное пространство), то универсум (или его декартову степень) в ключе квантора опускаем.

$$\forall x \in U P(x) = \forall x P(x);$$
$$\forall A \subseteq U\ \mathbf{F}(A) = \forall A\ \mathbf{F}(A).$$

Квантор существования и единственности определяется следующим образом:

$$\exists !x P(x) = \exists x P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \supset D(x, y)).$$

Ниже формально определяются те свойства бинарных предикатов F(x, y) на A×B, которые используются в этой работе:

всюду определенность

$$\forall x \in A\ \exists y \in B\ F(x, y);$$

однозначность

$$\forall x \in A\ \forall y \in B\ \forall z \in B (F(x, y) \wedge F(x,z) \supset D(y, z));$$

сюръективность

$$\forall y \in A\ \exists x \in B\ F(x, y);$$

инъективность

$$\forall x \in A\ \forall y \in A\ \forall z \in B (F(x, z) \wedge F(y, z) \supset D(x, y)).$$

Функциональными (прямо функциональными) называются всюду определенные и однозначные предикаты, обратно функциональными – сюръективные и инъективные, взаимно однозначными – однозначные и инъективные, биективными – функциональные и инъективные.

Ниже формулируются на языке алгебры предикатных операций свойства бинарных предикатов P(x, y), заданных на A×A, которые используются в качестве инструмента в данной статье:

рефлексивность

$$\forall x \in A P(x, x);$$

симметричность

$$\forall x, y \in A\ (P(x, y) \supset P(y, x));$$

антисимметричность

$$\forall x, y \in A (P(x, y) \wedge P(y, x) \supset D(x, y));$$

транзитивность

$$\forall x, y, z \in A\ (P(x, y) \wedge P(y, x) \supset P(x, y)).$$

Рефлексивные, симметричные транзитивные предикаты называются предикатами эквивалентности, рефлексивные, антисимметричные и транзитивные – предикатами порядка.

2. Формальное определение понятия равенства

Определение равенства не зависит ни от каких вводимых нами логических понятий. Оно опирается только на логический язык, то есть только на инструментальную логику. Поэтому его можно давать первым. Точно так же можно было бы начинать с определения понятия декартова произведения, поскольку оно не опирается на понятие равенства. Предикат равенства – это всего один предикат, а не семейство предикатов, как декартово произведение. А по степени фундаментальности эти два понятия, пожалуй, равноценны, оба они играют фундаментальную роль в механизме логики. Равенство надо давать раньше принадлежности, поскольку при определении принадлежности приходится использовать предикат равенства. Желательно, чтобы в определении принадлежности фигурировало не инструментальное равенство, а предметное. Это существенно усиливает определение понятия принадлежности. Вводим предикат равенства P на U×U условием:

$$\forall\ x, y \in U(P(x, y) \sim \forall\ A \subseteq U(A(x) \sim A(y))). \qquad (1)$$

Одно это условие образует полную систему аксиом для понятия равенства. Другую систему аксиом образуют рефлексивность и подстановочность предиката равенства. Определение равенства – это на самом деле – прямое определение.

Теорема. Решение этого уравнения (единсвенное):

$$P(x, y) = \exists\ a \in U(x^a y^a). \qquad (2)$$

Доказательство. Поскольку определение – прямое, то единственность равенства обеспечена. Существование доказывается синтаксическими соображениями (выводится из свойств логического инструментария). Правая часть равенства (2) получается просто путем тождественного преобразования правой части равенства (1). После того, как установлена единственность предиката равенства, даем ему индивидуальное имя – предметный предикат D(x, y). Выведем из аксиоматики равенства законы рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановочности. Рефлексивность и симметричность предиката равенства непосредственно следуют из его определения. Транзитивность и подстановочность выводим.

$$\forall\ x \in U\ D(x, x);$$
$$\forall\ x, y \in U\ (D(x, y) \supset D(y, x));$$
$$\forall\ x, y, z \in U\ (D(x, y) \wedge D(y, z) \supset D(x, z));$$
$$\forall\ P \subseteq U\ \ \forall\ x, y \in U\ (P(x) \wedge D(x, y) \supset P(y));$$

и некоторые другие, например:

$$\forall\ x, y, z \in U\ (D(x, y) \wedge D(x, z) \supset D(y, z));$$
$$\forall\ x, y \in U\ (D(x, y) \sim \exists\ z \in U(D(x, z) \wedge D(y, z)));$$
$$\forall\ x, y \in U\ (D(x, y) \sim \forall\ z \in U\ (D(x, z) \sim D(y, z)));$$
$$\forall\ x, x_1, y, y_1 \in U(D(x, y_1) \wedge D(x_1, y_1) \wedge$$
$$\wedge\ D(x_1, y) \supset D(x, y)).$$

Представляется интересным следующий вопрос: можно ли образовать для предиката равенства полную систему из аксиом, не содержащих предикатную переменную P? Если бы это удалось сделать, то появилась бы возможность существенно сократить объем экспериментов, необходимых для идентификации систем, реализующих предикат равенства. Если же будет доказано, что без предикатной переменной в аксиоматике равенства идей обойтись невозможно, то при этом мы кое-что узнаем о тех осложнениях, которые встают при идентификации предиката равенства.

Какие полные несократимые системы аксиом можно предложить еще для предиката равенства?

Можно попробовать сформулировать еще свойство равенства, основанное на том, что равенство представляет собой частный случай эквивалентности, которая порождает одноэлементное разбиение носителя эквивалентности. Тогда аксиоматика будет состоять из двух требований: P есть эквивалентность и разбиение множества U одноэлементно. Сформулируем формально последнее требование:

$$\forall\ x \in U\ \exists\ !y \in U\ D(x, y).$$

Если это верно, тогда возможна система аксиом для равенства без квантора по предикату. Она состоит из рефлексивности, симметричности, транзитивности и “одноэлементности” предиката равенства. Но надо внимательно посмотреть, так как единственность выражается через предикат равенства, из-за этого может не получиться ничего хорошего. В инструменте придется использовать предикат равенства, а это обесценивает всю систему аксиом. Видимо, принципиально невозможно определить равенство в логике первого порядка без использования инструментального предиката равенства. Это придется доказывать. Определение равенства уводит наверх логики.

3. Формальное определение понятия декартова произведения

Сформулируем определение декартова произведения. Берем предикат P на U×U. Содержательно его понимаем как декартово произведение A×B каких-нибудь подмножеств A и B множества U.

Предлагается следующее формальное (аксиоматическое, косвенное) определение декартова произведения P на U×U:

$$ДПР_{A,\,B}(P) = \forall\ x, y \in U(P(x, y) \sim$$
$$\sim (\exists\ y' \in U\ P(x, y'))) \wedge (\exists\ x' \in U\ P(x', y))). \qquad (3)$$

Аксиома единственная. Больше аксиом не надо.

Теорема (об общем виде декартова произведения). Для любого декартова произведения P на U×U найдется единственная пара предикатов A и B на U, таких что для любых x, y ∈ U

$$P(x, y) = A(x) \wedge B(y). \qquad (4)$$

Эти предикаты выражаются формулами:

$$A(x) = \exists\ y \in U\ P(x, y); \qquad (5)$$

$$B(y) = \exists\ x \in U\ P(x, y). \qquad (6)$$

Доказательство. Равенство (4) можно рассматривать как общее решение уравнения (3). В нем

А и В – произвольно выбираемые предикаты, которые определены на U. Теорема доказана.

Из теоремы следует прямое (конструктивное) определение декартова произведения:

$$(A\times B)(x, y)=A(x)\wedge B(y).$$

Задача обобщения понятия декартова произведения. Введенное определение декартова произведения явно не дотягивает в уровне своей общности. Это видно на примере свойства ассоциативности декартова произведения. Очевидно, что декартово произведение ассоциативно:

$$\begin{gathered}(A\times B\times C)(x, y, z)=\\ =A(x)\wedge B(y)\wedge C(z)=(A(x)\wedge B(y))\wedge C(z)=\\ =A(x)\wedge(B(y)\wedge C(y))=((A\times B)\times C)(x, y, z)=\\ =(A(x)\times(B\times C)(y, z))=((A\times B)(x, y)\times C(z))=\\ =(A\times(B\times C))(x, y, z).\end{gathered}$$

Но доказать это не удается, поскольку для него необходимо рассматривать декартовы произведения на разных областях. Приходится рассматривать декартовы произведения предикатов с разным числом существенных переменных. Так что нужно определить класс декартовых предикатов как подмножество множества всех многоместных предикатов. И раскладывать этот предикат надо в конъюнкцию предикатов разной размерности с разными наборами предметных переменных. Например, $P(x, y, z)=A(x, y)\times B(z)$. В разложении одна и та же переменная может повторяться, например: $P(x, y, z)=A(x, y)\times B(y, z)=A(x, y)\wedge B(y, z)$. Предикаты, которые можно разложить подобным способом, обладают всеми свойствами декартова произведения.

Из определения декартова произведения можно вывести все широко используемые свойства декартова произведения (например, его ассоциативность, дистрибутивности относительно операций объединения и пересечения множеств и т.д.).

Доказать, что, вообще говоря, декартово произведение $A\times B$ некоммутативно: $A\times B\neq B\times A$,
ассоциативно: $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$.
Доказать, что если A, B, C и D не пусты, то

$$A\subseteq B \text{ и } C\subseteq D\Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times D;$$
$$A=B \text{ и } C=D\Leftrightarrow A\times C=B\times D.$$

Доказать, что $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$;

$$\bigcap_{t\in T} A_t\times\bigcap_{t\in T} B_t=\bigcap_{t\in T}(A_t\times B_t).$$

Доказать, что $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$.
Доказать, что $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times D)$;

$$\begin{gathered}A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C);\\ (A\cup B)\times(C\cup D)==(A\times C)\cup(B\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times D);\\ (A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C);\\ A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C);\\ A\times B=(A\times D)\cap(C\times D), \text{ где } A\subseteq C \text{ и } B\subseteq D;\\ \bigcap_{k\in K} A_k\times\bigcap_{t\in T} B_t=\bigcap_{(k,t)\in K\times T}(A_t\times B_t).\end{gathered}$$

Пусть A. $B\neq\varnothing$ и $(A\times B)\cup(B\times A)=C\times D$. Доказать, что $A=B=C=D$.

Выводы

Формальное описание рассмотренных логических понятий было выполнено с использованием в качестве средства описания тех же самых логических понятий. В связи с этим возникает опасность совершить ошибку логического круга. Защиту от этой опасности может обеспечить проверка фактической непротиворечивости получаемых результатов идентификации. Поэтому необходим постоянный и тщательный контроль доброкачественности формируемой теории логических понятий всеми доступными исследователю средствами. Одной из важных мер, обеспечивающих эффективность идентификации, является четкое различение логических понятий, используемых в роли средства и объекта описания.

Список литературы

1. *Клини С.К. Математическая логика / С.К. Клини. – М.: изд-во Мир, 1973. – 527 с.*
2. *Баталин А.В. О системном анализе информационных процессов / А.В. Баталин, А.Д. Тевяшев, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – Вып. 3. – С. 23-31.*

Поступила в редколлегию 16.05.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ПРО ІДЕНТИФІКАЦІЮ ДЕЯКИХ ПОЧАТКОВИХ ЛОГІЧНИХ ПОНЯТЬ

В.А. Лещінський

Розглянуто застосування логічної математики для формального опису математичних понять на її мові, у тому числі і понять, що вводяться самою логічною математикою. У якості інструменту опису використовується мова алгебри скінченних предикатів і предикатних операцій. Рішення цієї задачі дозволить навчити комп'ютер оперувати поняттями, подібно до того, як це робить людина.

Ключові слова: *теорія інтелекту, алгебра скінченних предикатів і предикатних операцій.*

ABOUT IDENTIFICATION OF SOME INITIAL LOGICAL CONCEPTS

V.A. Leschynskiy

Application of logical mathematics is considered for the formal specification of mathematical concepts on it's language, including concepts that is entered by logical mathematics. The eventual predicates algebra language and predicates operations algebra are used as description instrument. The decision of this task will allow to teach a computer to operate concepts, like that, how it does man.

Keywords: *theory of intelligence, algebras of finite predicates and predicate operations.*