

УДК 519.85

Н.И. Гиль, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова, И.А. Суббота

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

## ЗАДАЧА УПАКОВКИ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ЭЛЛИПСОВ

В статье рассматривается задача упаковки произвольных неориентированных эллипсов в прямоугольную область (контейнер) минимальных размеров. Предлагается математическая модель задачи упаковки в виде задачи нелинейного программирования. Для описания в аналитическом виде отношений непересечения эллипсов и включения эллипсов в область размещения строятся  $\rho$ -функции и квази- $\rho$ -функции. Предлагается эффективный алгоритм решения задачи упаковки с применением оригинального алгоритма построения стартовых точек, метода мультистарта и IPOPT для поиска локальных экстремумов. Приводятся результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, упаковка, эллипсы, непрерывные вращения,  $\rho$ -функция, квази- $\rho$ -функция, оптимизация.

### Введение

Задачи упаковки эллипсов возникают во многих областях науки и техники: в частности материаловедении, порошковой металлургии, молекулярной динамике, минеральной промышленности и многих других [4].

Данному классу задач посвящено много публикаций [например, 4, 5]. Однако для решения задач упаковки неориентированных эллипсов (допускающие непрерывные вращения), как правило, применяются трудоемкие эвристические алгоритмы. Многие подходы основываются на аппроксимации эллипсов многоугольниками. В работе [1] рассматривается задача упаковки неориентированных эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей, с применением базовых  $\rho$ -функций, приведенных в статье [3].

В данной работе рассматривается математическое моделирование отношения неориентированных эллипсов с применением квази- $\rho$ -функций [6].

**Постановка задачи.** Имеется множество  $N$  произвольных эллипсов  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , заданных большой и малой полуосями  $a_i$  и  $b_i$ . Полагаем, что начало собственной системы координат эллипса  $E_i$  находится в центре его симметрии.

Положение эллипса  $E_i$  в арифметическом евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^2$  определяется вектором трансляции  $(x_i, y_i)$  и углом поворота  $\theta_i$ , т.е.  $v_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ . Эллипс, транслированный на вектор  $v_i$  и повернутый на угол  $\theta_i$ , обозначается  $E_i(v_i)$ .

В качестве контейнера рассматриваем прямоугольную область

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -A \leq x \leq A, -B \leq y \leq B\}.$$

Функцией цели  $F$  выбирается полупериметр  $F = A + B$  или площадь  $F = A \cdot B$  прямоугольника  $R$ .

**Задача.** Разместить набор эллипсов  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  в контейнер  $R$  так, чтобы функция цели  $F$  достигала своего экстремального значения.

Рассматриваются следующие отношения между эллипсами  $E_1(v_1)$  и  $E_2(v_2)$ :

- пересечение:  $\text{int } E_1(v_1) \cap \text{int } E_2(v_2) \neq \emptyset$ , (1)

- касание:  $\text{int } E_1(v_1) \cap \text{int } E_2(v_2) = \emptyset$  и

$$\text{fr } E_1(v_1) \cap \text{fr } E_2(v_2) \neq \emptyset, \quad (2)$$

- непересечение:  $E_1(v_1) \cap E_2(v_2) = \emptyset$ , (3)

- включение:  $E_1(v_1) \subset E_2(v_2) \Leftrightarrow$

$$\text{int } E_1(v_1) \cap \text{int } E_2^*(v_2) = \emptyset; \quad R^* = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int } R, \quad (4)$$

где  $\text{int}(\bullet)$  – внутренность;  $\text{fr}(\bullet)$  – граница множества  $(\bullet)$ .

Как известно [2, 3], в классе задач упаковки, раскрой и покрытия конструктивным средством математического моделирования отношений геометрических объектов является метод  $\rho$ -функций Стояна.

$\rho$ -функция  $\Phi^{E_1 E_2}$  для  $E_1(v_1)$  и  $E_2(v_2)$  непрерывна и удовлетворяет следующим свойствам:  $\Phi^{E_1 E_2} > 0$ , если выполняется условие (3),  $\Phi^{E_1 E_2} = 0$ , если выполняется условие (2),  $\Phi^{E_1 E_2} < 0$  в случае (1). Отношение включения (4) описывается  $\Phi^{E_1 E_2^*} \geq 0$ .

С целью описания в аналитическом виде отношения (1) – (4) используется понятие квази- $\rho$ -функции [6].

Квази- $\rho$ -функцией  $\Phi'^{E_1 E_2}$  для  $E_1(v_1)$  и  $E_2(v_2)$  называется функция, которая удовлетворяет условиям:  $\max_{v \in U} \Phi'(v_1, v_2, v) > 0$ , если выполняется условие (3),  $\max_{v \in U} \Phi'(v_1, v_2, v) = 0$ , если выполняется условие (2),  $\max_{v \in U} \Phi'(v_1, v_2, v) < 0$  в случае (1).

**Основной раздел**

**Phi-функция для  $R^*(0)$  и эллипса  $E(v)$**

Пусть  $R^*(0)$  характеризуется размерами  $2A$  и  $2B$ , эллипс  $E(v)$  задан большой и малой полуосями  $a$  и  $b$ , причем  $a \leq A, b \leq B$ .

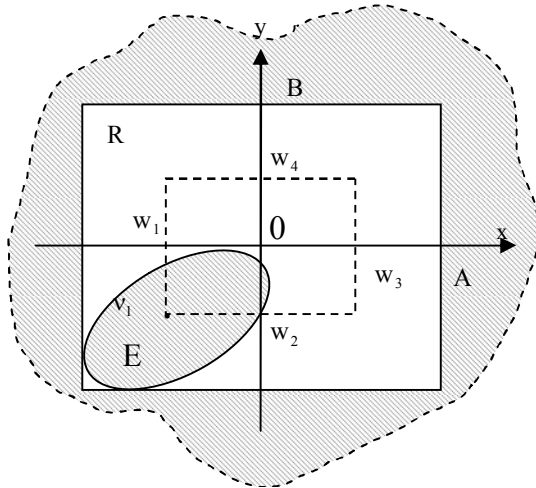


Рис. 1.  $\gamma_{12}$  для  $R^*(0)$  и  $E(v)$

В этом случае  $\gamma_{12} = \text{fr}T_{12} = \text{fr}\{R^*(0) + E(0)\}$ ,  
 $T_{12} = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -A' \leq x \leq A', -B' \leq y \leq B'\}$   
 $A' = A - \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$ ,  
 $B' = B - \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$ .

Пусть  $\chi_1(v) = -x + A'$ ,  $\chi_2(v) = -y + B'$ ,  
 $\chi_3(v) = x + A'$ ,  $\chi_4(v) = y + B'$ .

Тогда phi-функция объектов  $R^*(0)$  и  $E(v)$  задается в виде:

$$\Phi(v) = \min_{i=1, \dots, 4} \chi_i(v). \tag{5}$$

**Квази-phi-функция для эллипсов**

Имеются эллипсы  $E_1(v_1)$  и  $E_2(v_2)$ . Полагаем, что  $v_1, v_2$  – фиксированные параметры эллипса,  $v_1^0 = (x_1^0, y_1^0, \theta_1^0)$ ,  $v_2^0 = (x_2^0, y_2^0, \theta_2^0)$ .

Определим прямую  $L = \{(x, y) | f(x, y) = 0\}$ , где  $f(x, y) = cx + dy + r$ , при этом полагаем  $c^2 + d^2 = 1$ .

Обозначим: через  $p_1(x_{p_1}, y_{p_1}) \in E_1$  и

$p_2(x_{p_2}, y_{p_2}) \in E_1$  соответственно максимально и минимально удаленные точки от прямой  $L$ , а через  $q_1(x_{q_1}, y_{q_1}) \in E_2$  и  $q_2(x_{q_2}, y_{q_2}) \in E_2$  соответственно минимально и максимально удаленные точки от прямой  $L$ . (рис. 2)

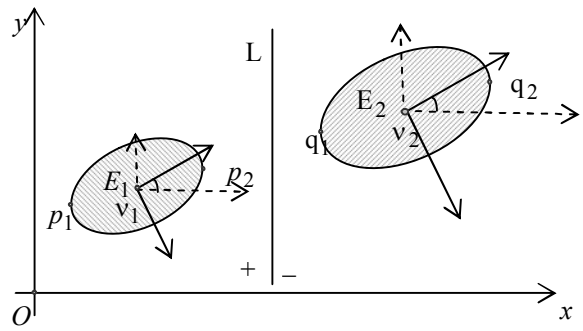


Рис. 2. Эллипсы  $E_1, E_2$ , прямая  $L$

Введем функцию вида

$$\chi(u) = \min \{f(x_{p_1}, y_{p_1}), f(x_{p_2}, y_{p_2}), -f(x_{q_1}, y_{q_1}), -f(x_{q_2}, y_{q_2})\}^*$$

где  $v = (c, d, r, x_1^0, y_1^0, \theta_1^0, x_2^0, y_2^0, \theta_2^0)$ ;

$$f(x_{p_1}, y_{p_1}) = cx_1^0 + dy_1^0 + r + \alpha_1 \cdot (d + cF_1);$$

$$f(x_{p_2}, y_{p_2}) = cx_2^0 + dy_2^0 + r - \alpha_1 \cdot (d + cF_1);$$

$$-f(x_{q_1}, y_{q_1}) = -cx_1^0 - dy_1^0 - r - \alpha_2 \cdot (d + cF_2);$$

$$-f(x_{q_2}, y_{q_2}) = -cx_2^0 - dy_2^0 - r + \alpha_2 \cdot (d + cF_2);$$

$$F_i = \frac{c(a_i^2 \cdot \cos^2 \theta_i^0 + b_i^2 \cdot \sin^2 \theta_i^0) + 0.5d\lambda_i \sin 2\theta_i^0}{d(a_i^2 \cdot \sin^2 \theta_i^0 + b_i^2 \cdot \cos^2 \theta_i^0) + 0.5c\lambda_i \sin 2\theta_i^0};$$

$$\lambda_i = (a_i^2 - b_i^2);$$

$$\alpha_i = \frac{a_i \cdot b_i}{\sqrt{a_i^2 (\cos \theta_i^0 + F_i \sin \theta_i^0)^2 + b_i^2 (\sin \theta_i^0 + F_i \cos \theta_i^0)^2}} \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, если  $\chi(u^0) \geq 0$ , в фиксированной точке  $u^0 = (c_0, d_0, r_0, x_1^0, y_1^0, \theta_1^0, x_2^0, y_2^0, \theta_2^0)$ , то

$$\text{int } E_1(x_1^0, y_1^0, \theta_1^0) \cap \text{int } E_2(x_2^0, y_2^0, \theta_2^0) = \emptyset.$$

Задача описания условия взаимного непересечения эллипсов  $E_1(x_1^0, y_1^0, \theta_1^0)$  и  $E_2(x_2^0, y_2^0, \theta_2^0)$  сводится к решению следующей задачи

$$\max \chi(v); \tag{6}$$

$$v = (c, d, r, x_1^0, y_1^0, \theta_1^0, x_2^0, y_2^0, \theta_2^0) \in \mathbb{R}^9.$$

Таким образом, если  $\max \chi(v) \geq 0$ , то

$$\text{int } E_1(x_1^0, y_1^0, \theta_1^0) \cap \text{int } E_2(x_2^0, y_2^0, \theta_2^0) = \emptyset.$$

Более того, если  $\max \chi(v) = 0$ , то  $\text{int } E_1(x_1^0, y_1^0, \theta_1^0) \cap \text{int } E_2(x_2^0, y_2^0, \theta_2^0) = \emptyset$  и

$\text{fr}E_1(x_1^0, y_1^0, \theta_1^0) \cap \text{fr}E_2(x_2^0, y_2^0, \theta_2^0) \neq \emptyset$ , т.е. эллипсы касаются, а если  $\max \chi(v) < 0$ , то

$$\text{int } E_1(x_1^0, y_1^0, \theta_1^0) \cap \text{int } E_2(x_2^0, y_2^0, \theta_2^0) \neq \emptyset.$$

Следовательно квази-phi-функция для пары эллипсов может быть представлена следующим образом:

$$\Phi^{E_1 E_2}(v) = \max_{c, d, r} \chi(v). \tag{7}$$

Заметим, если  $\chi(v^0) \geq 0$ , в фиксированной точке  $v^0 = (c_0, d_0, r_0, x_1^0, y_1^0, \theta_1^0, x_2^0, y_2^0, \theta_2^0)$ , то  $\text{int } E_1(x_1^0, y_1^0, \theta_1^0) \cap \text{int } E_2(x_2^0, y_2^0, \theta_2^0) = \emptyset$ . Поэтому поиск глобального максимума функции  $\chi(v)$  не является необходимым.

**Математическая модель**

Размещаемые эллипсы  $E_i, i \in I_N$ , характеризуются вектором  $v_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ , где  $(x_i, y_i)$  – вектор трансляции;  $\theta_i$  – угол поворота.

Область размещения  $R$  характеризуется вектором  $p = (A, B)$  переменных метрических характеристик, при этом полагаем  $x = 0, y = 0, \theta = 0$ .

Тогда вектор переменных поставленной задачи имеет вид  $u = (v_1, v_2, \dots, v_N, v, p) \in \mathbb{R}^\sigma$ , где  $v$  – вектор вспомогательных переменных  $v = (c_1, d_1, r_1, \dots, c_\lambda, d_\lambda, r_\lambda)$ ;  $\lambda = 0, 5 \cdot (N-1)N$ ;  $\mathbb{R}^\sigma$  – арифметическое евклидово пространство.

Используя построенные phi-функции, математическая модель поставленной задачи может быть представлена в виде

$$\min_{u \in W \subset \mathbb{R}^\sigma} F(u); \tag{8}$$

$$W = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \chi(u) \geq 0\};$$

$$\chi(u) = \min\{\Phi'_\tau(u), \Phi''_1(u), \tau = 1, \dots, \lambda, l = 1, \dots, N\}, \tag{9}$$

где  $F(u) = A + B$  или  $F(u) = A \cdot B$ ;  $\Phi'_\tau(u)$  – phi-функция вида (7) для описания условия непересечения пары phi-объектов;  $\Phi''_1(u)$  – phi-функция вида (5) для описания условия включения phi-объекта в область  $R$ ;  $\lambda = 0.5 \cdot (N-1)N$ .

Задача (8), (9) – задача нелинейного программирования.

**Метод решения**

Для решения задачи (8), (9) предлагается алгоритм, основанный на поиске стартовых точек из области допустимых решений, локальной оптимизации и методе мультистарта.

Для построения стартовых точек  $u^0 \in W$  используется алгоритм, основанный на гомотетических преобразованиях эллипсов и заключается в следующем.

1) Оцениваем стартовые размеры  $A', B'$  контейнера  $\Omega$ , т.е. формируем контейнер  $\Omega'$ .

2) Случайным образом генерируем множество точек  $(x_i, y_i) \in \Omega'$ ,  $i = 1, \dots, n$ , (каждая точка рассматривается как вырожденный эллипс, полагая, что коэффициент гомотетии для каждого эллипса  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , равен нулю, т.е.  $\alpha = 0$ ).

3) Решаем задачу оптимизации вида

$$\kappa(u^0) = \max_{u' \in W'} \kappa(u'); \quad \kappa(u') = \alpha; \tag{10}$$

$$W' = \{u' \in \mathbb{R}^{\sigma+1} : \Phi'_\tau \geq 0, \Phi''_1 \geq 0; \tau = 1, 2, \dots, \lambda, i = 1, 2, \dots, N, \lambda' \geq 0\}, \tag{11}$$

где  $u' = (u, \alpha) = (v_1, \dots, v_n, v, A, B, \alpha)$  – вектор переменных, включающий вектор переменных  $u$  задачи (8), (9) и переменный коэффициент гомотетии  $\alpha$ ;  $\lambda' \geq 0$  система неравенств  $1 + \varepsilon - \alpha \geq 0, \alpha \geq 0$ , где  $\varepsilon$  – малое положительное число.

4) Получаем точку:

$$u^0 = (u^0, 1) = (v_1^0, \dots, v_n^0, v^0, A^0, B^0, 1).$$

Оптимальное решение задачи (10), (11) гарантирует выполнение условия взаимного непересечения всех пар эллипсов и условия включения эллипсов  $E_i(v_i^0)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , в контейнер  $\Omega(A^0, B^0)$ .

5) Выбираем точку  $u = u^0 \in W$  в качестве стартовой точки для последующей локальной оптимизации.

Для поиска локальных минимумов задачи (8), (9) применяется IPOPT, реализующий метод внутренней точки [7]. Результат размещения эллипсов соответствует локальному минимуму задачи (8), (9). Для поиска приближения к глобальному экстремуму применяется метод мультистарта.

**Численные эксперименты**

В качестве тестовых примеров рассматриваются следующие:

Пример 1. Исходные данные:  $N = 3$ ,  $F(u) = A + B$ ,  $A = 40, B = 40$ ,

$$u = (x_1, y_1, \theta_1, \dots, x_3, y_3, \theta_3, c_1, d_1, r_1, \dots, c_3, d_3, r_3, A, B);$$

$$a_1 = 10, b_1 = 3, c_1 = 1, d_1 = 0.001, r_1 = -1;$$

$$a_2 = 10, b_2 = 2, c_2 = 1, d_2 = 0.001, r_2 = -1;$$

$$a_3 = 4, b_3 = 2, c_3 = 1, d_3 = 0.001, r_3 = -1.$$

Точка локального минимума:

$$u^* = (0, 3.1005, -0.1429, 0, -3.9759, 0.1391, -5.9083, -0.8691, -0.0261, -0.0286, 0.9996, 0.8833, 0.261, 0.9653, 0.2207, -0.2222, 0.975, 1.7106, 9.9072, 6.3939).$$

Значение функции цели в точке  $u^*$ :  $F(u^*) = 16.3011$ .

Пример 2. Исходные данные:  $N = 4$ ,  $F = A \cdot B$ ,  $A = 40, B = 40$ ,

$$u = (x_1, y_1, \theta_1, \dots, x_4, y_4, \theta_4, c_1, d_1, r_1, \dots, c_6, d_6, r_6, A, B);$$

$$a_1 = 10, b_1 = 7, c_1 = 1, d_1 = 0.001, r_1 = -1;$$

$$a_2 = 10, b_2 = 7, c_2 = 1, d_2 = 0.001, r_2 = -1;$$

$$a_3 = 8, b_3 = 8, c_3 = 1, d_3 = 0.001, r_3 = -1;$$

$$a_4 = 10, b_4 = 7, c_4 = 1, d_4 = 0.001, r_4 = -1.$$

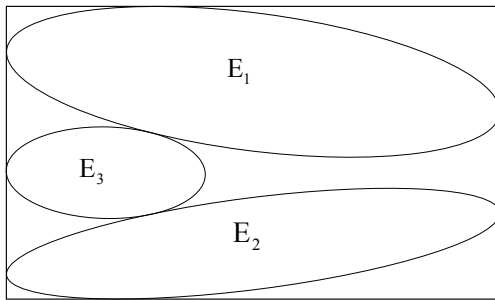


Рис. 3. Размещение эллипсов, соответствующее точке  $u^*$  для примера 1

Точка локального минимума:

$$u^* = (10.6518, -7.0368, 0.5739, 8.2039, 7.3344, 0.4675, -6.5644, -7.0388, 0.0001, -10.2192, 7.564, 0.376, 0.4182, -0.9084, -3.773, 1.0001, 0, -1.4341, 0.8845, 0.4665, 0.0246, 0.9336, -0.3583, -1.0039, 0.3144, -0.9493, 3.3825, 0.9683, -0.2502, 2.7117, 19.8695, 15.0388).$$

Значение функции цели в точке  $u^*$ :  
 $F(u^*) = 298.813$ .

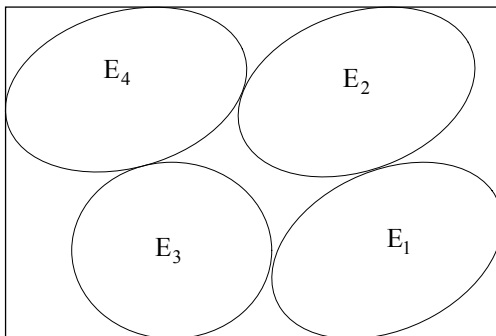


Рис. 4. Размещение эллипсов, соответствующее точке  $u^*$  для примера 2

## Выводы

Предложенные в данном исследовании средства математического моделирования, модели, методы и алгоритмы могут быть использованы для эффективного решения широкого спектра современных научных и практических задач. В дальнейшем авторы предполагают развитие данного подхода для решения задач большей размерности.

Работа поддержана совместным грантом НТЦУ и НАНУ (проект 5710).

## Список литературы

1. Панкратов А.В. Математическое моделирование отношений эллипсов в задачах оптимальной кластеризации объектов / А.В. Панкратов, Т.Е. Романова, И.А. Суббота // Искусственный интеллект. – 2012. – № 4. – С. 89-97.
2. Bennell JA, Scheithauer G, Stoyan Yu and Romanova T (2010) Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems, *J. Annals of Operations Research, Publisher Springer Netherlands* 179, 1: 343-368.
3. Chernov N, Stoyan Y, Romanova T. (2010) Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. *Computational Geometry: Theory and Applications* 43(5): – P. 535-553.
4. Birgin E.G. Packing circles within ellipses / E.G. Birgin, L.H. Bustamante, H.F. Callisaya, J.M. Martinez // *International transactions in operational research.* – 2013. – № 20 – P. 365-389.
5. Xu W.X., Chen H.S., Lv Z. (2011) An overlapping detection algorithm for random sequential packing of elliptical particles // *Physica A*. 390: – P. 245-267.
6. Панкратов А. Информационная система решения оптимизационной задачи размещения произвольных неориентированных 2D-объектов / А. Панкратов // *Система обробки інформації.* – 2013. – № 1(108). – С. 82-186.
7. Wachter, A., Biegler, L.T.: On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming.* – 2006. – 106, 1. – P. 25-57.

Поступила в редколлегию 27.11.2013

Рецензент: д-р техн. наук, доц. В.В. Шляхов, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

## ЗАДАЧА УПАКОВКИ НЕОРИЄНТОВАНИХ ЕЛІПСІВ

М.І. Гіль, О.В. Панкратов, Т.Є. Романова, І.О. Суббота

В статті розглядається задача упаковки довільних неорієнтованих еліпсів в прямокутній області (контейнер) мінімальних розмірів. Пропонується математична модель задачі упаковки у вигляді задачі нелінійного програмування. Для описання в аналітичному вигляді відносин неперетину еліпсів і включення еліпсів в область розміщення будуються  $\phi$ -функції та квазі- $\phi$ -функції. Пропонується ефективний алгоритм розв'язку задачі упаковки із застосуванням методу побудови стартових точок, мултистарту та IPOPT для локальної оптимізації. Представлені результати чисельних експериментів.

**Ключові слова:** математичне моделювання, упаковка, еліпси, неперервні обертання,  $\phi$ -функція, квазі- $\phi$ -функція, оптимізація.

## PACKING PROBLEM OF NON-ORIENTED ELLIPSES

H.I. Gil, A.V. Pankratov, T.E. Romanova, I.A. Subbota

The paper considers a problem of packing non-oriented ellipses within rectangular area (container) of minimal sizes. In order to model non-overlapping of rotating ellipses and containment of ellipses into a container  $\phi$ -functions and quasi- $\phi$ -functions are derived. Mathematical model of the packing problem is constructed in the form of nonlinear programming problem. Efficient algorithm is proposed. The algorithm employs an original approach to construct starting points, the multistart method and IPOPT to search for a local minimum. Numerical experiments are given.

**Keywords:** Mathematical modeling, packing, continuous rotation, ellipses,  $\phi$ -function, quasi- $\phi$ -function, optimization.