УДК 681.3:629.122

А.М. Носовський[1], Г.Л. Баранов[2], С.М. Васько[3]

[1]*Київська державна академія водного транспорту ім. Гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного, Київ*
[2]*ДП «Центральний науково-дослідний інститут навігації і управління», Київ*
[3]*Національний транспортний університет, Київ*

ВЕРИФІКАЦІЯ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ СИМВОЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ОБ'ЄКТІВ ТРАНСПОРТУ

Розроблено тести для практичного застосування якості працездатності пропонуємих засобів символьних перетворень для аналітичного розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: *нелінійна динаміка, пакет символьної алгебри, тестування, контроль, аналітичний розв'язок.*

Вступ

Розвиток інтелектуальних інформаційних технологій забезпечив появу пакетів, що реалізують методи символьних перетворень (МСП) [1 – 6] для отримання аналітичних (не числових) розв'язків математичних задач за потреб практики. Рух будь-яких високошвидкісних транспортних засобів (ВТЗ) описується нелінійними інтегро-диференціальними рівняннями. Відомо, що універсального методу розв'язку реальних адекватних нелінійних динамічних систем не існує. Тому для практичного застосування пропонуємих пакетів, що реалізують МСП, актуально проводять їх верифікацію на достовірність, якість й ефективність символьно-аналітичних перетворень.

Постановка задачі. Аналіз сучасного стану та відомих джерел дозволяє визначити, що найбільш популярні 7 наступних пакетів МСП:

- 1GA – Gauss від Aptech Systems Inc. (www.aptech.com);
- 2MP – Maple від Waterloo Maple Software Inc. (www.maplesoft.com);
- 3MW – Mathematica від Wolfram Research Inc. (www.wolfram.com);
- 4MM – Matlab від The Mathworks Inc. (www.mathworks.com);
- 5OM – O-Matrix від Harmonic Software (www.omatrix.com);
- 6OX – OxMetrics(Ox Prof.) від Timberlake Consultants Ltd.;
- 7SC – Scilab від INRIA (www.scilab.org).

Якщо за комплексними критеріями їх ефективності обрати трійку лідерів, тоді отримуємо ідентифікатори 2MP, 3MW, 4MM. Слід звернути увагу на вимоги до якості знань, умінь, навичок, володіння кожним пакетом з боку інтелектуальних агентів, які застосовують означені інформаційні технології для моделювання динамічних нелінійних процесів, наприклад, під час руху ВТЗ. Така динаміка складна відповідно нелінійних явищ: вібрації, резонансів, турбулентності, флатера, шимі, а також стрибкоподібних катастроф у наслідок втрати стійкості та керованості.

Але саме такі задачі актуальні [1 – 6] бо вже є інструментарій пакетів МСП..

Мета роботи. Розробка апробованих засобів верифікації пропонуємих пакетів МСП (наприклад, 2MP, 3MW, 4MM) для їх достоверізації й рекомендації до практичного застосування при розв'язках систем нелінійних диференціальних рівнянь та моделювання динамічних процесів об'єктів транспорту включаючи ВТЗ.

Основний матеріал

Прості нелінійні диференціальні рівняння першого порядку у формі Рікаті (Jacopa Riccati, 1676-1754рр) мають вигляд:

$$\frac{dy}{dx}P(x)y^2+Q(x)y+R(x), \qquad (1)$$

де $P(x), Q(x), R(x)$ – відповідні аналітичні функції, які визначають однозначну та неперервну функцію $f(x,y)$ на площині.

Відомо, що для чотирьох часткових розв'язків цього рівняння y_1, y_2, y_3, y_4 подвійне відношення задовольняє умові:

$$\left(\frac{y_4-y_2}{y_4-y_1}\right)/\left(\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}\right)=\mathrm{const}=C, \qquad (2)$$

або

$$y=\frac{y_2(y_3-y_1)+Cy_1(y_2-y_3)}{(y_3-y_1)+C(y_2-y)}, \qquad (3)$$

або

$$y=y_1+(y_2-y_1)/\left[1+Ce^{\int p(x)(y_2-y_1)dx}\right]. \qquad (4)$$

Особливість рівняння (1) – не можливість (за випадком деяких окремих випадків) знайти розв'язок (довів Ліцвіль) в кінцевому вигляді через елементарні функції.

Загальне рівняння Рікаті (1) завдяки заміні змінних виду (5):

$$y = \frac{W}{p(x)} + \gamma(x), \qquad (5)$$

можливо звести до канонічної форми:

$$\frac{dW}{dx} = W^2 + R^*(x), \qquad (6)$$

де $\gamma(x)$ – функція, яку визначають за умови:

$$p' + 2p^2\gamma + pQ = 0. \qquad (7)$$

У даному випадку в рівнянні (1.6) маємо:

$$R^*(x) = p\left(p\gamma^2 + \gamma Q + R - \gamma'\right). \qquad (8)$$

У якості тестового першого прикладу нагадаємо розв'язок наступного нелінійного рівняння, як задачі Коші:

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + 1 + x\ ;\ x_0 = 0\ ;\ y(0) = +1. \qquad (9)$$

Розв'язок. Порівняння (1) та (9) дає $P = -1; Q = 0, R = (1+x)$.

Скористаємось підстановкою:

$$y = +\frac{u'}{u}. \qquad (10)$$

Тоді отримаємо наступне лінійне рівняння другого порядку:

$$u'' = (1+x)u\ ;\ \ u(0) = u'(0) = +1. \qquad (11)$$

Розв'язок даного рівняння (11) це лише мероморфна функція, яка за виключенням нескінченно віддаленої точки не має інших особливостей окрім полюсів. Тому шукаємо розв'язок у вигляді степеневих рядів:

$$\begin{gathered} u = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} u_n(x)\ ; \\ u_n(x) = C_n x^n\ ; \end{gathered} \qquad (12)$$

$$\begin{gathered} u' = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \dot{C}_{n+1} x^n = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \dot{u}_{n+1}(x)\ ; \\ \dot{u}_{n+1}(x) = \dot{C}_{n+1} x^n\ . \end{gathered} \qquad (13)$$

де коефіцієнти задовольняють рекурентному співвідношенню:

$$\ddot{C}_{n+2} = C_n + C_{n-1}. \qquad (14)$$

Звідки можливо отримати (з урахуванням $x_0 = 0, u(0) = 1$:

$$\begin{gathered} C_{n+2} = \frac{C_{n-1} + C_n}{(n+1)(n+2)}; \\ C_0 = C_1 = +1\ ; \\ C_2 = +\frac{1}{2} = \frac{u''(0)}{2!} = 0{,}5. \end{gathered} \qquad (15)$$

Чисельні розрахунки з вісьмома достовірними знаками за отриманими рекурентними дають відому таблицю, яка співпадає з розв'язком С.А. Чаплигіна $y(+1) = 1{,}2707$ для наближеної оцінки значення у точці.

Для цього прикладу:

$$u(+1) = \sum C_n = 3{,}02060024\ ;$$

$$u'(+1) = \sum \dot{C}_{n+1} = 3{,}83903703\ ;$$

$$y(+1) = \frac{u'(+1)}{u(+1)} = 1{,}270951706605175\ ;$$

та отриманий ряд точного розв'язку має відповідно (10) наступний вигляд:

$$\begin{gathered} y = \frac{1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{11}{120}x^5 + \ldots}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + \ldots} = \\ = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{7}{60}x^5 + \ldots\ , \end{gathered} \qquad (16)$$

з радіусом збіжності ряду $R = 1{,}40831599$. При перевищенні значення R можлива нестійкість у наслідок швидкого зростання вікових членів ряду.

Розрахунок необхідних коефіцієнтів ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}$ використаний послідовно та аналітично згідно формул:

$$\begin{gathered} C_0 = \frac{a_0}{b_0};\ C_1 = \frac{a_1 b_0 - b_1 a_0}{b_0^2}; \\ C_n = \frac{1}{b_0}\left[a_n - \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} b_k C_{n-k}\right], \forall n = \overline{2, N}. \end{gathered} \qquad (17)$$

Другий приклад (тест 2) рівняння Рікаті у конкретному вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + \frac{2}{x^2}, \qquad (18)$$

де $P(x) = -1; Q(x) = 0; R(x) = 2/x^2$ – аналітичні функції, які конкретизують у порівняння з (1) дану задачу Коші.

Застосуємо підстановку $\overline{x} = ax$ та $\overline{y} = by$, яка відповідає змінам розтягування по відповідним осям. Тоді (18) прийме вигляд:

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} + \overline{y}^2 - \frac{2}{x^2} = \frac{b}{a}\frac{dy}{dx} + b^2 y^2 - \frac{2}{a^2 x^2}. \qquad (19)$$

Умови інваріантності виконуються, якщо $b/a = b^2 = 1/a^2$ або $b = 1/a$. Тоді можливо описати підстановку $\overline{x} = xe^a$ та $\overline{y} = ye^a$, яка характеризує інфінітезимальний оператор:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}. \qquad (20)$$

Поняття інфінітезимального оператора пов'язане з дотичним векторним полем, яке утворюється першим членом тейлоровського розкладу одно параметричної групи по параметру. Наприклад, в площині векторне поле $F(x,y) = C$ характеризує звичайне диференціальне рівняння першого порядку відносно $y = y(x)$, або у вигляді:

$$P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0\,. \qquad (21)$$

Це еквівалентно рівнянню у приватних похідних першого порядку:

$$P\frac{\partial F}{\partial x} - Q\frac{\partial F}{\partial y} = 0\,. \qquad (22)$$

Тоді рівняння (21) дозволяє однопараметричну групу перетворень $\overline{x} = f(x,y,a)$ та $\overline{y} = \varphi(x,y,a)$ з оператором:

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \beta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\,. \qquad (23)$$

Звідси можна довести, що функція $F(x,y)$ одночасно задовольняє двом умовам:

$$\left.\begin{aligned} &P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} = 0,\\ &\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \beta\frac{\partial F}{\partial y} = \emptyset(F). \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Ці два рівняння дозволяють за умови $\xi Q - \beta P \neq 0$ отримати:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{Q\Phi}{\xi Q - \beta P} \text{ та } \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-P\Phi}{\xi Q - \beta P}\,. \qquad (25)$$

Згідно теорії Лі (S. Lie) рівняння (21) дозволяє групу з оператором (23) тоді й лише тоді, коли функція вигляду:

$$\mu = (\xi Q - \beta P)^{-1}\,, \qquad (26)$$

визначається як інтегруючий множник цього (21) рівняння. Для вищеозначеної задачі (18) робимо символьне перетворення:

$$dy + \left(y^2 - 2/x^2\right)dx = 0\,. \qquad (27)$$

Використаємо функцію μ (16) для оператора (20), тоді отримуємо наступний інтегруючий множник:

$$\mu = \frac{1}{xy^2 - y - \frac{1}{2}x^2} = \left(\frac{x}{x^2y^2 - xy - 2}\right). \qquad (28)$$

Добуток рівняння (27) на даний множник (28) отримаємо вигляді:

$$\frac{xdy + \left(xy^2 - 2/x\right)dx}{x^2y^2 - xy - 2}\,. \qquad (29)$$

Виконаємо еквівалентні символьні перетворення отриманого добутку

$$\frac{xdy + ydx}{x^2y^2 - xy - 2} + \frac{dx}{x} =$$

$$\frac{d(xy)}{(xy)^2 - (xy) - 2} + d\ln x = d\left[\ln x + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{xy-2}{xy+1}\right)\right].$$

Інтегрування дозволяє отримати розв'язок рівняння Рікаті (18) у аналітичному вигляді:

$$\frac{xy-2}{xy+1} = \frac{c}{x^3} \text{ або } y = \frac{2x^3 + c}{x\left(x^3 - c\right)}\,. \qquad (30)$$

Контрольна перевірка даного розв'язку (4.30) підтверджує достовірність:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{2x^3 + c}{x\left(x^3 - c\right)}\right\} = -\left(\frac{2x^3 + c}{x\left(x^3 - c\right)}\right)^2 + \frac{2}{x^2} = -y^2 + \frac{2}{x^2}\,.$$

Практичний приклад для теста 2 (18) застосовуємо пакет Maple.

Згідно стандартного шаблону стосовно формалізованого вводу IAS власних бажань для розв'язування задачі теста 2 формула (18) робиться як набір вхідних даних. Конкретне завдання на мові пакету Maple та результати його виконання наведены на рис. 1.

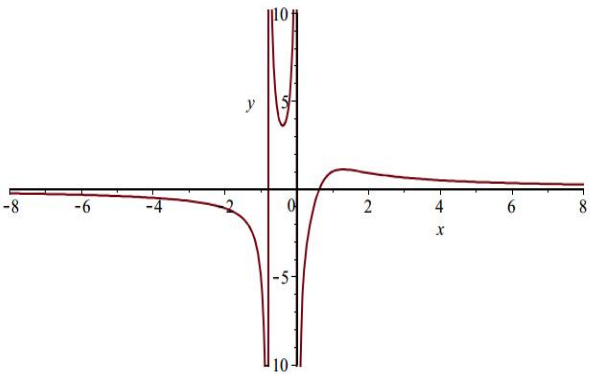
$$\mathrm{del} := \mathrm{diff}(y(x), x) = -y(x)^2 + \frac{2}{x^2};$$

$$\frac{d}{dx}y(x) = -y(x)^2 + \frac{2}{x^2};$$

dsolve(del);

$$y(x) = -\frac{2x^3 + \_Cl}{(-x^3 + \_Cl)x};$$

$$\mathrm{plot}\left(\frac{2x^3 - 0{,}5}{x^4 + 0{,}5x}, x = -8..8, y = -10..10\right).$$



$$\mathrm{plot}\left(\left\{\frac{2x^3 - 50}{x^4 + 50x}, \frac{2x^3 - 0{,}5}{x^4 + 0{,}5x}, \frac{2x^3 - 10}{x^4 + 10x}\right\}, x = -8..8, y = -10..10\right)$$

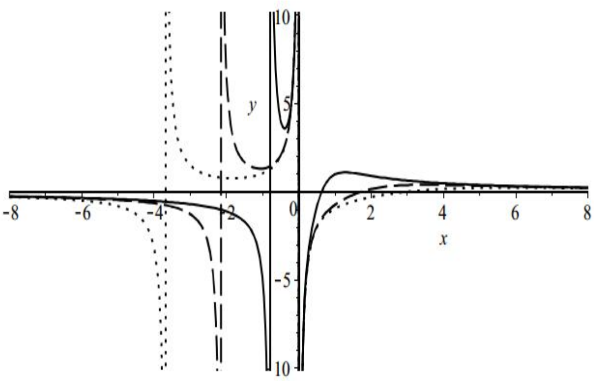


Рис. 1. Два варіанти розвязків для теста 2 (18) та результати візуалізації засобами пакету Maple

Криві на рис. 1 позначені наступним чином:

_C1 = – 0.5 – суцільна;

_C1 = – 10 – штрихова;

_C1 = – 50 – крапками.

Програмне забезпечення сприймає дане завдання та автоматично його виконує. В результаті символьних перетворень отримується аналітичний розв'язок аналогічний формулі (30) де константа C позначена символом _C1. Візуалізація конкретної аналітичної функції забезпечена командою plot().

В дужках надані конкретні параметри для відображення функції f (x,y,_C1) на площині з заданими інтервалами:

$$-8 \le x \le 8;$$

$$-10 \le y \le 10.$$

Вище доведені еталонні аналітичні тести підтверджують, що метод Г.Є. Пухова [3 – 5], забезпечує символьну ідентичність точного розв'язку нелінійних задач динаміки складних динамічних систем [1].

Кожна конкретна візуалізація відображає одночасний вплив чисельних значень наявних коефіцієнтів, які задані у постановках задач (9) та (18).

Вище наведені тести 1 та 2 дозволяють веріфікувати якість пропонуємого пакету МСП у режимах символьно-алгебраїчних перетворень з отриманням кінцевих аналітичних виразів, які можливо надавати у еквівалентних (тотожних), але різних формах явного чи неявного вигляду.

При необхідності перевірки чисельних методів інтегрування нелінійних рівнянь, наприклад у формі Коші, пакет Maple дозволяє проводити візуалізацію та порівняння у вигляді таблиць, де для кожного заданого кроку інтегрування надруковані числа з конкретною точністю представлення результатів відповідно до завдання.

Висновки

Надійність та достовірність роботи будь-якого пропонуємого нового пакету, що автоматизує великий обсяг символьних перетворень складних нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, обов'язково потребує процедур верифікації. В даній роботі розроблено два тести та проведена практична робота з контролю якості розв'язку в аналітично-алгебраїчній формі пакету Maple. Підтверджено, що диференціально-тейлоровський метод академіка Г.Є. Пухова дозволяє отримувати аналітичні точні розв'язки нелінійних задач динаміки.

Список літератури

1. Баранов Г.Л. Структурное моделирование сложных динамических систем / Г.Л. Баранов, А.В. Макаров. – К.: Наукова думка, 1986. – 272 с.

2. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ / Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. – М.: МЦНМО, 2000, – 960 с.

3. Пухов Г.Е. Преобразования Тейлора и их применение в электротехнике и электронике. / Г.Е. Пухов. – К.: Наукова думка, 1978. – 286 с.

4. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений / Г.Е. Пухов – К.: Наукова думка, 1980. – 419 с.

5. Пухов Г.Е. Фомализация перехода к чебышевскому базису в диференциально-тейлоровских преобразованиях / Г.Е. Пухов, Ю.В. Корольов // Электронное моделирование. – 1988. – 10, №3. – С. 89-91.

6. Люггер Д.Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем / пер. с англ. – М.: изд. дом «Вильямс», 2005, – 864 с.

Надійшла до редколегії 14.03.2014

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук А.В. Цулая, ДП «Центральний науково-дослідний інститут навігації і управління», Київ.

ВЕРИФИКАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ СИМВОЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ТРАНСПОРТА

А.Н. Носовский, Г.Л. Баранов, С.М. Васько

Разработаны тесты для практического применения качества работоспособности предложенных средств символьных преобразований для аналитического решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *нелинейная динамика, пакет символьной алгебры, тестирование, контроль, аналитическое решение.*

VERIFICATION OF SYMBOLIC TRANSFORMATIONS SOFTWARE FOR MODELING DYNAMIC OBJECTS OF TRANSPORT

A.M. Nosovskii, G.L. Baranov, S.M. Vasko

Tests developed for practical application of the proposed quality performance means of symbolic transformations for the analytical solutions of nonlinear differential equations.

Keywords: *nonlinear dynamics, symbolic algebra package, testing, monitoring, analytical solution.*