УДК 519.86 + 338.5.018.7

Н.Ю. Карпенко, В.Б. Уфимцева

Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А.Н. Бекетова, Харьков

ЭФФЕКТИВНОСТЬ АГРЕГИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СИСТЕМОЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В статье рассмотрены модели динамических процессов с переменным характером использования ресурсов. На базе этих моделей сформулирована общая схема решения ЗРР с использованием процедуры агрегирования. Выполнена оценка эффективности предложенного подхода.

***Ключевые слова**: распределение ресурсов, модели, динамические процессы потребления ресурсов, агрегирование, дезагрегирование.*

Введение

Постановка проблемы. Ключевым вопросом стратегического управления на уровне субъектов хозяйствования является задача оптимального распределения ресурсов (ЗРР). Применительно к сфере экономики она имеет ряд особенностей, а именно.

1. Оптимальное управление ресурсами в экономических системах связано с решением ЗРР большой размерности.

2. Эти задачи характеризуются нелинейными зависимостями между интенсивностью управления и характером использования ресурсов.

3. Для экономической системы характерно наличие множественных связей между отдельными процессами, что требует их четкой синхронизации и в целом существенно усложняет решение ЗРР в общем виде.

Эти и ряд других факторов приводят к тому, что поиск оптимального решения ЗРР для субъектов экономической системы связан с огромными вычислительными затратами. Решить такую задачу без использования средств вычислительной техники и специальных математических инструментов практически невозможно. Поэтому проблема разработки математических моделей распределения ресурсов является актуальной, имеет большое значение для оптимизации процессов управления предприятиями различных форм собственности.

Анализ и состояние проблемы. Методам решения ЗРР посвящены многочисленные работы отечественных и зарубежных ученых [1 – 4]. В результате таких исследований появились достаточно эффективные алгоритмы, которые позволяют находить решения для ЗРР достаточно большой размерности. В частности, предложено семейство алгоритмов решения ЗРР, которые построены на процедуре динамического программирования [2,4], на различных вариантах схемы ветвей и границ. В последнее время получены интересные результаты использования нейросетевых технологий для оптимизационных ЗРР высокой размерности. И, что немаловажно, появились реальные оценки точности получаемых решений. Тем не менее следует учитывать тот факт, что описанные задачи относятся к разряду NP-сложных, поэтому использование прямых методов их решения в реальных условиях весьма ограничено. А, следовательно, – для решения ЗРР сложных экономических систем необходимы другие методы, построенные на процедурах поэтапного укрупнения исходной задачи (ее агрегирования) с последующей детализацией общего решения до уровня частных результатов. Чтобы реализовать такую процедуру нужно разработать семейство моделей для описания процессов потребления ресурсов, сформулировать правила агрегирования и дезагрегирования промежуточных решений, а также оценить эффективность и целесообразность использования этих методов в условиях конкретного производства.

Цель статьи: разработать модель управления ресурсами с переменной интенсивностью и асинхронной реализацией процессов, которая может быть использована для решения ЗРР большой размерности (например, – для субъектов хозяйствования с мелкосерийным или смешанным характером производства), в рамках этих моделей рассмотреть процедуры агрегирования и дезагрегирования решений, выполнить оценку их эффективности.

1. Модель динамических процессов потребления ресурсов

Модель включает три обязательных параметра: ресурсы (R), процессы (P) и время (T). Управление осуществляется во времени, на уровне процессов P при ограничениях на объемы и характер использования ресурсов R.

Определим модель процесса как функциональную связь между его состоянием x(t), интенсивностью u(t) и функцией потребления ресурса S(t). Пусть x(t) – неубывающая функция времени, x(t)=0, когда процесс не начат, x(t)=1 когда он закончен.

Обозначим $\nu(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}=\dot{x}(t)$ – скорость процесса. Тогда в общем случае модель потребления ресурсов можно представить в виде (модель 1-го рода):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (1)$$

$$\sigma(t) = W^0 u(t), \quad (2)$$

где W^0 – нормативный объем ресурса, необходимый для выполнения процесса, и при этом:

$$\int_0^T f(x(t), u(t), t)dt = 1$$

В модели первого рода в понятие интенсивности вкладывается вполне определенный физический смысл - это расход ресурсов с точностью до постоянного коэффициента.

Процессы, описываемые в виде (1), достаточно сложны. В настоящее время хорошо изучены частные случаи процессов вида [1 – 3],

$$\dot{x}(t) = f(u(t)), \quad (3)$$

$$\dot{x}(t) = f_1(u(t))f_1(x(t)), \quad (4)$$

Модель типа (3) при вогнутых функциях f(u) учитывает эффект экстенсивного роста, а при выпуклых - эффект лавинообразного увеличения скорости процесса. Реальную физическую интерпретацию имеют и скорости процессов, зависящие от их состояния (4).

Модели первого рода всегда можно поставить в соответствие эквивалентную ей модель второго рода, когда скорость процесса равна его интенсивности.

$$\dot{x}(t) = \hat{u}(t) \quad (5)$$

но расход ресурса определяется более сложным образом.

Эквивалентность моделей здесь понимается в том смысле, что для любого управления u(t) и соответствующих x(t) и б(t) найдется управление u'(t) которому соответствуют те же x(t) и б(t).

Модели второго рода в ряде случаев оказываются более удобными для изучения. Вместе с тем их класс шире, чем класс моделей первого рода. Это хорошо видно из рассмотрения процессов, потребляющих несколько типов ресурсов. Пусть такой процесс описывается моделью вида (5) и

$$\sigma_i(t) = W_i^0 g_i(x(t))\hat{u}(t), i = 1,2,\ldots,m \quad (6)$$

Тогда эквивалентной модели первого рода со скалярным управлением не существует. В дальнейшем мы ограничимся моделями вида (5) и (6).

2. Характер управления в динамической модели распределения ресурсов

В зависимости от типа функций интенсивности, используемых для управления процессом, различают три класса задач: с фиксированной, постоянной и переменной интенсивностью. Обозначим y, z – моменты начала и окончания процесса соответственно, $\gamma = z - y$ – его длительность. Переменные y, z могут быть определены формально с помощью u(t):

$$y = \sup(t | x(t) = 0), z = \inf(t | x(t) = 1).$$

Задача с фиксированной интенсивностью получается, когда $\gamma = \gamma_0 = const$. Тогда управление процессом - это единственная независимая переменная y (или z): $u(t) = 1 / \gamma_0$ при $y <= t <= y + \gamma_0$ и 0 – в остальных случаях. Задача с постоянной интенсивностью получается при рассмотрении пары независимых переменных y, z, тогда $u(t) = (z - y) - 1$ при $y <= t <= z$ и 0 – в остальных случаях.

Переменная интенсивность характеризуется ограничениями вида:

$$\int_0^T u(t)dt = 1 \quad (7)$$

либо при фиксированных y и z

$$u(t) = \begin{cases} \geq 0 & \text{при} \quad y \leq t \leq z \\ = 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}, \quad \int_y^z u(t)dt = 1.$$

Важное значение для свойств задачи имеют ограничения, накладываемые на область изменения u(t). Мы рассмотрим ограничения вида:

$$u^{min} \leq u(t) \leq u^{max} \quad (8)$$

$$u^{min}(x(t)) \leq u(t) \leq u^{max}(x(t)) \quad (9)$$

Заметим, что (8) для случая постоянной интенсивности преобразуется к виду:

$$y^{min} = \frac{1}{u^{max}} \leq z - y \leq \frac{1}{u^{min}} - y^{max}. \quad (10)$$

3. Система независимых процессов и объемно-динамические задачи

Совокупность из n процессов рассмотренных типов образует динамическую систему потребления ресурсов. Даже если процессы могут выполняться независимо друг от друга, они образуют единую систему, т.к. определены на одном множестве ограниченных ресурсов. Системы независимых процессов разбиваются на две группы: с ограничениями на сроки выполнения процессов вида:

$$y_j^{min} \leq y_j \leq u_j^{max}, \quad (11)$$

$$z_j^{min} \leq z_j \leq z_j^{max}, \quad (12)$$

и без ограничений.

Наиболее известным типом связей между процессами являются сетевые связи, когда на множестве процессов установлено отношение частичного порядка P: если $(j, l) \in P$, то требуется выполнение неравенства:

$$z_j <= y_l. \quad (13)$$

Отношение P соответствует бесконтурному ориентированному графу – сети, поэтому задачу с условиями (13) обычно называют сетевой задачей распределения ресурсов. В отдельных случаях ограничения (13) ценой некоторой потери оптимальности конечного решения заменяют ограничениями типа (11), (12). Это достигается топологическим упорядочением вершин исходной сети.

Более общим принципом к учету связанности процессов является подход по системе связей и состояний.

Предметом нашего исследования является распределение так называемого нескладируемого (ненакопляемого) ресурса. Особенностью этого типа является то, что недоиспользование некоторого объема имеющегося ресурса означает безвозвратную его потерю и, следовательно, невозможность его использования в будущем. Поэтому такой ресурс иногда называют ресурсом типа «мощность». Примером могут служить трудовые ресурсы.

Антиподом является складируемый тип ресурса (накопляемый, типа «топливо»), пример – финансовые ресурсы. Поступление ресурса в систему или его наличие могут описываться функциями времени постоянными величинами $r_i(t)$ или постоянными величинами $r_i(t) = \text{const}$, $i = 1, 2,\dots, m$.

Существенно влияет на свойства задачи рассмотрение времени в виде непрерывной или дискретной величины. В последнем случае горизонт планирования [0, T] разбивается на S отрезков (квантов), как правило, одинаковой длины точками $0 = t_0 < t_1 <\ldots< t_s$, T. Тогда динамика j-го процесса вместо (5) описывается разностным уравнением:

$$x_j^k \le x_j^{k-1} + u_j^k(t^k - t^{k-1}), \quad k = 1,2,\dots,S, \quad (15)$$

расход ресурса вместо (6) – выражением

$$\sigma_{ij}^k = W_{ij}^k \int_{x_j^{k-1}}^{x_j^k} g_{ij}(x_j)dx_j, i = 1,2,\dots,m, \quad (16)$$

а условия нормализации (7) примут вид:

$$\sum_{k=1}^{S} u_j^k(t^k - t^{k-1}) = 1, j = 1,2,\dots,n \quad (17)$$

Задачи по моделям (15) и (17) принято называть «объемно-динамическими», т.к. наряду с динамикой процесса (I5) имеет место определение объемного расхода ресурсов (16) для каждого кванта $[t^k - 1, t^k]$, k = 1, 2, …, S.

Далее мы будем рассматривать именно объемно-динамические задачи.

В этой связи вместо задач с переменной интенсивностью мы будем исследовать кусочно-постоянные интенсивности вида:

$$u_j(t) = u_j^k, t^{k-1} \le t \le t^k.$$

Доказано, что в объемно-динамическом смысле эти задачи эквивалентны.

4. Оптимизация использования ресурсов в классе объемно-динамических задач

Для постановки задачи оптимизации использования ресурсов в классе объемно-динамических задач (ОДЗ) необходимо сформулировать критерий оптимальности и ограничения на допустимые решения. В общем случае ограничения в задаче распределения ресурсов образуют три группы:

а) конструктивные ограничения на допустимые управления. Например, условия нормализации (7) или (17), ограничения на сроки (11), (12), а также типа (8)-(10);

б) ограничения связности процессов, например, – сетевые типа (13);

в) ресурсные ограничения:

$$\sigma_i^k = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^k \le r_i^k, i = 1,2,\dots,m, k = 1,2,\dots,S \quad (18)$$

В смысле критерия оптимальности распределения ресурсов различают два вида задач:

а) задача оптимального быстродействия, – минимизация длительности горизонта проекта при условии завершения всех процессов и ресурсных ограничениях типа (18);

б) задача равномерного распределения ресурсов при фиксированной длительности проекта. В этом случае ресурсное ограничение теряет смысл, т.к. если оптимальное распределение не удовлетворяет условию (18), то любое другое распределение тем более ему не удовлетворяет. Критериев оптимальности равномерного распределения существует много. Наиболее распространенными из них являются: минимум суммы квадратов:

$$\min_u \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{S} \left(\sigma_i^k / r_i^k\right) \quad (19)$$

и минимаксный критерий:

$$\min_u \max_{1\le k\le S} \max_{1\le i\le m} \left(\sigma_i^k / r_i^k\right) \quad (20)$$

5. Процедура агрегирования и оценка ее эффективности при решении ОДЗ

Назовем размерностью задачи распределения ресурсов количество процессов и рассмотрим задачу размерности L, которая заключается в отыскании функций интенсивности Ul(t), $l \in \Omega = \{1,2,\dots,l\}$, минимизирующих некоторый критерий. Предположим, что каждый l -й процесс потребляет единственный тип ресурса $i(l) \in \{1,2,\dots,l\}$. Остальные характеристики задачи, которую далее будем называть детализированной, произвольны. Как правило, в реальных задачах число L велико, и решение детализированной задачи является трудоемкой процедурой. Трудоемкость алгоритма принято определять количеством вычислений, необходимых для получения результата. Для количественного измерения трудоемкости применим выражение вида: $O(\varphi(L))$, т.е. порядок функции φ, которая практически для всех нетривиальных алгоритмов является выпуклой [2].

Рассмотрим процесс решения детализированной задачи с помощью агрегирования исходной информации. Последовательность действий опишем по пунктам, причем в первых четырех – собственно процедуру агрегирования.

1. Построить некоторое разбиении множества процессов на n непересекающихся подмножеств: $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_j$. Если детализированная задача сетевая, то получить соответствующие n подсетей (агрегатов). Назовем этот этап декомпозицией сети.

2. Решить n задач распределения ресурсов отдельно для каждого подмножества процессов Ω_j размерности Lj каждая, j=1,2,…,n. Тип решаемых задач совпадает с типом детализированной задачи. Назовем этот этап построением нормативного расписания.

3. Обработать условия согласования выполнения агрегированных процессов, соответствующих выделенным подсетям. Этот этап назовем синхронизацией.

4. Определить численные значения параметров агрегированных процессов, например, γ_j^0, W_{ij} (соответственно нормативные длительности и объемы ресурсов), $g_{ij}(x_j), u_j^{min}, u_j^{max}$ и др. Это этап построения модели процесса.

5. Решить агрегированную задачу распределения ресурсов размерности n, отличающуюся в общем случае от детализированной задачи.

6. На основе решения агрегированной задачи построить распределение ресурсов для детализированной задачи. Это этап дезагрегирования.

Оценим трудоемкость описанного подхода:

$$B = \sum_{j=1}^{n} O[\varphi(L_j)] + O[\psi(n)] = O\left[\sum_{j=1}^{n} \varphi(L_j) + \psi(n)\right], \quad (21)$$

где $\psi(n)$ – выпуклая функция, которая описывает трудоемкость решения агрегированной задачи. Заметим, что если f(n) выпукла, то минимум функции $\sum_{j=1}^{n} f(x_j)$ на плоскости $\sum_{j=1}^{n} x_j = C$ достигается при $x_j=C/n$, j=1,2,…,n. Это следует из того, что описанная задачи относится к классу выпуклого программирования, т.к. сумма выпуклых функций тоже выпукла, и плоскость – это выпуклое множество. Следовательно, у данной задачи существует единственное решение. Градиент функции в точке $x_j=C/n$ является вектором с равными компонентами. Следовательно, его проекция на рассматриваемую плоскость вырождается в точку, т.е. указанная точка – стационарная.

Пусть

$$\varphi(L_j) = L_j^{\alpha}, \psi(n) = n^{\beta}, \text{где} \alpha > 1, \beta > 1.$$

Тогда минимум функции (21) достигается при

$$n = \left(\frac{\alpha - 1}{\beta} L^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \quad (22)$$

и $L_j=L/n$, j=1,2,…,n.

Чтобы доказать это, зафиксируем n. Тогда, исходя из вышесказанного минимум $\sum_{j=1}^{n} \varphi(L_j)$ достигается при $L_j=L/n$. Этот факт имеет место при любом n, в том числе и при оптимальном. Перепишем (21), опустив символ порядка:

$$B = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{L}{n}\right) + n^{\beta} = n^{1-\alpha} + n^{\beta}.$$

Дифференцируя функцию по n получим:

$$L^{\alpha}(1-\alpha)n^{-\alpha} + \beta n^{1-\beta} = 0,$$

откуда:

$$n = \exp\left(\frac{n\left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right)n^{-\alpha}}{\alpha+\beta-1}\right),$$

что подтверждает (22).

Выполним сравнительную оценку эффективности предложенной процедуры относительно прямого метода решения задачи размерности L. Предположим, что $\beta < 2\alpha$, тогда:

$$\lim_{L\to\infty} O\left\{\min_n\left[\sum_{j=1}^{n}(L/n)^{\alpha} + n^{\beta}\right]\right\} \Big/ O(L^{\alpha}) = 0. \quad (23)$$

Выберем n из условия n = L / n, т.е. $n = \sqrt{n}$. Тогда справедливо:

$$\min_n\left[\sum_{j=1}^{n}(L/n)^{\alpha} + n^{\beta}\right] \le \sum_{j=1}^{n}(\sqrt{L})^{\alpha} + (\sqrt{L})^{\beta}.$$

Переобозначим $\alpha = \sqrt{L}$. Тогда:

$$\lim_{L\to\infty}\frac{O\left[d^{\alpha+1} + d^{\beta}\right]}{O(d^{2\alpha})} = O\lim_{L\to\infty}\frac{d^{\alpha+1} + d^{\beta}}{d^{2\alpha}} = 0.$$

Это означает, что функция под знаком предела в (23) монотонно убывает с ростом L, т.е. относительная эффективность агрегирования увеличивается с ростом размерности детализированной задачи. Этот же факт наблюдается с увеличением α. Оценка трудоемкости метода агрегирования при

$L = 10000$, $\alpha = \beta = 2$ составляет 19562, а прямого решения порядка 106, т.е. первый метод эффективное прямого способа ориентировочно в 51 раз.

Кроме того, эффективность предложенной процедуры может быть существенно повышена вследствие итеративного применения процедуры агрегирования к исходной задаче.

Выводы

В статье предложена модель управления ресурсами с учетом переменной интенсивности их выполнения. На базе предложенных моделей рассмотрена общая схема решения ЗРР, построенная на использовании процедурах агрегирования и дезагрегирования. Выполнена оценка эффективности предлагаемого подхода.

Список литературы

1. *Хемди А. Таха. Введение в исследование операций (Operations Research: An Introduction) / Хемди А. Таха. – М.: Вильямс, 2007. – 912 с.*

2. *Грешилов А.А. Математические методы принятия решений / А.А. Грешилов. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 584 с.*

3. *Ritzman L.P. Foundations of operations management / L.P. Ritzman, L.J. Krajewski. - Prentice Hall, Upper-Saddle River, NJ, 2003. – 473 p.*

4. *Карманов В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М.: Физматлит, 2004. – 264 с.*

Поступила в редколлегию 21.02.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Н.И. Самойленко, Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А.Н. Бекетова, Харьков.

ЕФЕКТИВНІСТЬ АГРЕГУВАННЯ ПРИ УПРАВЛІННІ СИСТЕМОЮ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

М.Ю. Карпенко, В.Б. Уфимцева

У роботі розглянуто моделі динамічних процесів с несталим характером використання ресурсів. На базі цих моделей сформульовано загальну схему розв’язання ЗРР з використанням процедури агрегування. Зроблено оцінку ефективності запропонованого підходу.

Ключові слова: *розподіл ресурсів, моделі, динамічні процесы використання ресурсів, агрегування, дезагрегування.*

AGGREGATION EFFICIENCY IN MANAGEMENT SYSTEM DYNAMIC PROCESS

N.Y. Karpenko, V.B. Ufimtseva

The article describes a model of dynamic processes c variable intensity of resource use.On the basis of these models formulated a general scheme for solving the problem of resource allocation, which is based on the procedures of aggregation and disaggregation. The estimation of the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: *resource allocation model, the dynamic processes of resource use, aggregation, disaggregation.*