УДК621.396.662.072.078

І.М. Срібна

Державний університет телекомунікацій, Київ

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ СИСТЕМИ З ЗАДАНОЮ СТРУКТУРОЮ ПРИ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ТА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИНАХ

У статті розглянуто задачу визначення оптимальних параметрів системи з заданою структурою для випадку, коли її параметри представляють собою детерміновані та випадкові величини

Ключові слова: *оптимізація, детермінована величина, випадкова величина.*

Вступ

При плануванні мережі дуже важливо визначити параметр, який потрібно оптимізувати. Зробити це зовсім не так просто, як здається на перший погляд. Мета дослідження має бути сформульована дуже чітко і допускати кількісну оцінку. Називатимемо характеристику мети, яка задана кількісно, параметром оптимізації. Параметр оптімізації є реакцією (відгуком) на дію факторів, які визначають поведінку вибраної системи. Реакція об'єкту багатогранна, багатоаспектна. Вибір того аспекту, який представляє найбільший інтерес якраз і задається метою дослідження. При традиційному, не математичному, підході треба прагнути врахувати різні аспекти, зважити і прийняти «узгоджене» рішення в тому, який досвід «краще».

Основна частина

Оптимізація – це процес знаходження найкращого або оптимального рішення будь-якої задачі при заданих критеріях. Характеризуючи об’єкт, складно вибрати такий один критерій, який забезпечив би всю повноту вимог. Тому в різних задачах кількість критеріїв може бути різним. Параметр оптимізації визначається як ознака за якою необхідно оптимізувати процес. Він може бути кількісним, задаватись числом. Множина значень, які може приймати параметр оптимізації, називається областю його визначення. Області визначення можуть бути неперервними і дискретними, обмеженими і необмеженими. Він може змінюватися в інтервалі від 0 до 100 %.

До теперішнього часу недостатньо проаналізовані методи оптимізації, що дозволяють покращити функціонування системи в цілому.

Розглянемо задачу визначення оптимальних параметрів системи с заданою структурою для випадку, коли її параметри представляють собою детерміновані та випадкові величини з відомими законами розподілу.

При детермінованих параметрах системи задача визначення оптимальних параметрів системи заключається в тому, щоб знайти залежність вибраного критерію оптимальності Q від параметрів системи $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$Q = Q\,(a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad (1)$$

і далі знайти екстремум функції Q по цим параметрам, прирівнюючи до нуля частинні похідні:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_\nu} = 0,\ \nu = 1, 2, \dots, m. \qquad (2)$$

В результаті рішення системи рівнянь (2) визначаються шукані оптимальні параметри системи, які забезпечують екстремум вибраного критерію оптимальності. В тих випадках, коли рівняння (2) неможливо вирішити аналітично або коли не вдається встановити аналітичну функціональну залежність (1), використовують наближені числові методи для знаходження оптимальних значень параметрів системи (наприклад, метод графічного рішення для знаходження мінімуму функції).

Отримання залежності (1) являє собою задачу статистичного аналізу систем управління. Отже, додатковим етапом рішення розглядаємої задачі оптимізації є задача пошуку екстремуму функції Q по змінним параметрам системи.

Якщо на параметри системи накладені визначенні обмеження або екстремум функції досягається на межі заданої області параметрів, то вказаний прийом знаходження оптимального значення не придатний. В цьому випадку вимагається використовувати спеціальні прийоми пошуку оптимальних параметрів в залежності від характеру обмежень.

При випадкових параметрах критерій Q являється функцією випадкових аргументів (1). Тоді для оцінки якості системи користуються усередненим значенням критерію Q по множині можливих значень випадкових параметрів системи:

$$M[Q] = \overline{Q} = \int_{-\infty}^{\infty}(n)\int_{-\infty}^{\infty} Q(a_1, a_2, \dots, a_n) f(a_1, a_2, \dots, a_n)\partial a_1 \partial a_n, \qquad (3)$$

де $f\,(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)$ – спільна щільність імовірності випадкових параметрів $A_1, A_2, \dots, A_n$ системи.

При статистично незалежних параметрах системи у формулі (3) сумісна щільність імовірності визначається добутком:

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_1(a_1) f_2(a_2) \ldots f_n(a_n),$$

де $f_\nu(a_\nu)$ – щільність імовірності випадкового параметра A_ν; $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Критерій оптимальності, який визначається формулою (3), називають усередненим або повним критерієм оптимальності. Задача визначення оптимальних параметрів системи по повному критерію оптимальності означає визначення таких значень статистичних параметрів (характеристик) законів розподілу випадкових параметрів системи, при яких цей критерій має експериментальне значення.

Методика рішення задачі заключається в наступному. Приймаючи, що вхідні випадкові сигнали і випадкові параметри системи статистично незалежні, знаходять залежність вибраного первинного критерію Q від шуканих параметрів при умові, що випадкові параметри мають задані, фіксовані значення (наприклад, номінальні розрахункові значення). По формулі (3), знаючи закони розподілу випадкових параметрів системи (наприклад, розподіл випадкових відхилень від розрахункових значень), визначають залежність повного критерію оптимальності від статистичних параметрів α_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, m$ цих законів розподілу:

$$\bar{Q} = \bar{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m).$$

Далі вирішується звичайна задача на екстремум функції шляхом прирівнювання до нуля частинних похідних функцій по статистичним параметрам α_μ:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \alpha_\mu} = 0, \ \mu = 1, 2, \ldots, m. \qquad (4)$$

В результаті рішення системи рівнянь (4) визначаються шукані значення оптимальних статистичних параметрів законів розподілу випадкових параметрів системи, які забезпечують екстремуми повного критерію оптимальності.

Для знаходження оптимального значення коефіцієнта підсилення розглянемо слідкуючу систему [1], використовуючи критерій мінімуму дисперсії похибки при умові, що параметри системи задовольняють нерівностям:

$$\alpha \ll k, \ \ T\alpha \ll 1.$$

В умовах даного прикладу формула для дисперсії похибки системи приймає вигляд:

$$D_e = D_X \alpha \left(T + \frac{1}{k} \right) + k\pi s_0.$$

Тоді умову ектремуму дисперсії D_e по параметру k запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial D_e}{\partial k} = \pi s_0 - \frac{D\alpha}{k^2} = 0$$

звідки знаходимо оптимальне значення коефіцієнта підсилення:

$$k_{\text{опт}} = \sqrt{D\alpha / (\pi s_0)}.$$

Отже, вибір оптимального значення коефіцієнта підсилення при прийнятих допусках повністю визначається статистичними характеристиками вхідного сигналу.

Розглянемо наступний випадок, коли в умовах попереднього прикладу коефіцієнт підсилення k є випадковою величиною, яка описується законом рівномірної щільності:

$$f(k) = \begin{cases} 1/(2\beta) & \text{при} \quad \alpha - \beta \le k \le \alpha_1 + \beta; \\ 0 & \text{при} \quad (k > \alpha_1 + \beta) \wedge (k < \alpha_1 - \beta). \end{cases}$$

Тут α_1 – статистичний параметр (математичне очікування) закону розподілу випадкового коефіцієнта підсилення. Необхідно знайти оптимальне значення параметра α_1 по критерію мінімуму повної дисперсії похибки системи.

Запишемо повну дисперсію похибки системи:

$$\bar{Q} = D_e(\alpha_1) = \int_{\alpha_{1=\beta}}^{\alpha_{1+\beta}} [D\alpha(T + \frac{1}{k}) + k\pi s_0] \frac{1}{2\beta} dk.$$

Обчислюючи інтеграл, отримаємо залежність вибраного повного критерію оптимальності від шуканого статистичного параметра:

$$D_e(\alpha_1) = \pi s_0 \alpha_1 + D\alpha T + \frac{D\alpha}{2\beta} \ln \frac{\alpha_1 + \beta}{\alpha_1 - \beta}.$$

Диференціюючи по α_1 і прирівнюючи похідну до нуля, отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial D_e(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} = \pi s_0 - \frac{D_\alpha}{\alpha_1^2 - \beta^2} = 0.$$

Вирішуючи його, знайдемо оптимальне значення математичного очікування коефіцієнта підсилення для вибраного критерія оптимальності:

$$\alpha_{1\text{опт}} = M[K]_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{D\alpha}{\pi s_0} + \beta^2}.$$

Висновки

Із порівняння результатів даного і попереднього прикладів можна зробити висновок: оптимальне значення математичного очікування випадкового коефіцієнта підсилення даної системи при законі рівномірної щільності його розподілу завжди перевищує оптимальне значення цього коефіцієнту, коли він розглядається як невипадковий параметр системи.

Список літератури

1. Росин М.Ф. Статистическая динамика и теория эффективности систем управления / М.Ф. Росин, В.С. Булыгин. – М.: Машиностроение, 1981. – 312 с.

2. Стеклов В. К. Оптимізація та моделювання пристроїв і систем зв'язку / В.К. Стеклов, Л.Н. Беркман, Е.В. Кільчицький. – К. : Техніка, 2004. – 576 с.

3. Стеклов В.К. Проектування телекомунікаційних мереж / В.К. Стеклов, Л.Н. Беркман. – К. : Техника, 2002. – 792 с

Надійшла до редколегії 29.05.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Н. Беркман, Державний університет телекомунікацій, Київ.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ С ЗАДАННОЙ СТРУКТУРОЙ ПРИ ДЕТЕРМЕНИРОВАНЫХ И СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

И.Н. Срибная

В статье рассмотрена задача определения оптимальных параметров системы с заданной структурой для случая, когда ее параметры представляют собой детерминированные и случайные величины.

Ключевые слова: *оптимизация, детерминированная величина, случайная величина.*

RESEARCH OF OPTIMAL SYSTEM PARAMETERS WITH SPECIFIED STRUCTURE WITH DETERMINISTIC AND RANDOM VARIABLES

I.N. Sribna

The article deals with the problem of determining the optimal parameters of the system with a given structure for the case when its parameters are deterministic and random variables.

Keywords: *optimization, deterministic variable, random variable.*