УДК 681.5.013

Ю.И. Дорофеев

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

СИНТЕЗ ОГРАНИЧЕННОГО РОБАСТНОГО ГАРАНТИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРИЗОВАННОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

В статье предложен подход к решению задачи синтеза ограниченного робастного гарантирующего управления запасами для систем с параметрической структурной неопределенностью в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и наличия несимметричных структурных ограничений на значения состояний и управлений. Подход основан на использовании метода инвариантных эллипсоидов и параметризованной функции Ляпунова, что позволяет уменьшить консерватизм полученных результатов. Использование математического аппарата линейных матричных неравенств позволяет сформулировать задачу синтеза управления в виде последовательности задач полуопределенного программирования, для решения которых используются специализированные пакеты на базе системы MATLAB. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: *управление запасами, робастное управление, гарантирующее управление, метод инвариантных эллипсоидов, параметризованная функция Ляпунова, линейное матричное неравенство, задача полуопределенного программирования.*

Введение

Задача управления запасами возникает в системах производства-хранения-распределения ресурсов, когда с целью удовлетворения потребительского спроса создаются запасы материальных ресурсов. Управление запасами заключается в определении моментов времени и размеров заказов на их восполнение.

Анализ различных подходов к управлению запасами можно найти в работе [1] и обширной библиографии к ней. Среди многообразия моделей управления запасами выделяют два основных типа: модель критических уровней и модель периодической проверки. В первом случае предполагается непрерывный контроль за состоянием запасов и размещение заказов фиксированного размера при снижении текущих запасов до некоторых критических уровней. Второй тип модели предполагает проверку уровня запасов через равные промежутки времени и размещение заказа, размер которого определяется в соответствии с выбранной стратегией. В данной работе рассматривается модель периодической проверки.

Выбор стратегии управления запасами определяется характером внешнего спроса. На практике зачастую нет оснований для того, чтобы рассматривать спрос в качестве случайных, либо гармонических, либо убывающих с течением времени внешних возмущений – какая-либо дополнительная информация, кроме той, что внешний спрос является ограниченным, отсутствует. В таком случае задача управления запасами может быть сформулирована как задача подавления влияния неслучайных ограниченных внешних возмущений, методы решения которой рассмотрены в работе [2]. Одним из подходов к данной проблематике в теории робастного управления является концепция инвариантных множеств [3]. Среди различных форм инвариантных множеств особо выделяются эллипсоиды вследствие их простой структуры и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова.

Однако синтез робастного регулятора на основе линейной квадратичной стабилизации приводит к консервативным результатам. Консерватизм проявляется в том, что с практической точки зрения получаемые границы робастности оказываются неоправданно заниженными. Причина этого кроется в минимаксной природе такого подхода.

Для преодоления указанного недостатка предлагается использовать параметризованную функцию Ляпунова (ПФЛ) (англ.: parameter dependent Lyapunov function). Среди работ, в которых ПФЛ строится для дискретных систем, следует выделить статью V.C. Oliveira с соавт. [4].

Спецификой рассматриваемой задачи является наличие запаздываний по управлению, величины которых могут варьироваться в процессе функционирования системы. Другой особенностью задач управления запасами является необходимость учета структурных ограничений на значения состояний и управлений. Одним из подходов к синтезу ограниченного стабилизирующего управления является использование техники линейных матричных неравенств (ЛМН) [5]. При этом, как правило, рассматривают ограничения, заданные в какой-либо норме. Тогда как спецификой задач управления запасами является неотрицательность значений переменных, что приводит к необходимости учета несимметричных ограничений на значения управляющих воздействий и состояний.

Целью работы является синтез робастной относительно варьируемых значений запаздываний управляемых потоков стратегии управления запасами гарантированной стоимости, которая может использоваться для определения в каждый момент времени объемов заказа ресурсов с учетом несимметричных ограничений на их значения в виде функции от уровней запаса ресурсов в узлах системы, которые позволяют удерживать состояния в ограниченном компактном множестве при любых допустимых возмущениях.

Постановка задачи. Рассмотрим динамическую сетевую модель, которая описывает широкий класс систем управления запасами (СУЗ) [6]. Узлы сети задают виды и размеры управляемых запасов, а дуги – управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки описывают процессы переработки и перераспределения ресурсов между узлами сети и процессы поставок сырья извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы, который формируется внешними потребителями.

Для математического описания СУЗ используется дискретная модель в пространстве состояний, уравнения которой описывают изменение уровня запасов каждого вида ресурсов с течением времени. В качестве переменных состояний рассматриваются наличные уровни запаса ресурсов в узлах сети. Управляющими воздействиями являются размеры заказов на поставку ресурсов, формируемые узлами сети в текущем периоде. Размеры спроса на ресурсы, поступающие из внешней среды, целесообразно рассматривать в качестве внешних возмущений.

Для описания запаздываний используется модель дискретной задержки, поскольку предполагается, что номинальные значения длительности транспортировки и переработки ресурсов известны и кратны некоторому периоду дискретизации. Также предполагается, что структура сети известна, а состояния доступны непосредственному измерению. Тогда математическая модель СУЗ задается разностным уравнением с запаздыванием:

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda} B_t u(k-t) + Ed(k), \qquad (1)$$

где $k = 0,1,...$ – номер дискретного интервала; $x(k) \in R^n$ – вектор состояний; $u(k) \in R^m$ – вектор управляющих воздействий; $d(k) \in R^q$ – вектор внешних возмущений; Λ – максимальное значение запаздывания управляемых потоков в сети;

$B_t \in R^{n\times m}, t = \overline{0,\Lambda}$, $E \in R^{n\times q}$ – матрицы влияния управлений и возмущений, соответственно, методика построения которых изложена в работе [7].

В процессе функционирования СУЗ должны выполняться структурные ограничения:

$$\begin{aligned} x(k) &\in X = \left\{ x \in R^n : 0 \le x \le x^{max} \right\}; \\ u(k) &\in U = \left\{ u \in R^m : 0 \le u \le u^{max} \right\}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где векторы x^{max} и u^{max}, определяющие максимальные вместимости хранилищ и размеры заказов, считаются заданными.

Будем предполагать, что внешние возмущения удовлетворяют ограничениям:

$$d(k) \in D = \left\{ d \in R^q : 0 \le d^{min} \le d \le d^{max} \right\},$$

где векторы d^{min} и d^{max} определяют граничные значения спроса и предполагаются известными.

Выполним преобразование модели (1) к стандартному виду без запаздывания на основе расширения вектора состояний [8] путем включения в него векторов, определяющих размеры ранее заказанных ресурсов, находящихся в процессе транспортировки и переработки. Вектор состояний расширенной модели сети будет равен

$$\xi(k) = \left[x^T(k), u^T(k-1), u^T(k-2), ..., u^T(k-\Lambda) \right]^T,$$

а уравнения расширенной модели примут вид:

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A\xi(k) + Bu(k) + Gd(k); \\ x(k) &= C\xi(k), \end{aligned} \qquad (3)$$

где матрицы $A \in R^{N\times N}$, $B \in R^{N\times m}$, $G \in R^{N\times q}$, $C \in R^{n\times N}$, $N = n + m\Lambda$ имеют соответствующую блочную структуру [7].

Рассмотрим построение матрицы динамики A расширенной модели в том случае, когда величины запаздывания управляемых потоков $\Lambda_i, i = \overline{1,n}$ отличаются от своих номинальных значений. В этом случае матрица становится нестационарной и в каждый момент времени $k \ge 0$ может принимать какое-либо значение из множества

$$A = \left\{ A(\theta) : A = A_0 + \sum_{i=1}^{L} \theta_i(k) A^{(i)},\ \theta \in \Theta \right\}, \qquad (4)$$

где $L = 2^r$, r – количество узлов сети, интервалы запаздывания которых могут варьироваться в процессе работы; $\theta_i(k)$, $i = \overline{1,L}$ – набор параметров, которые описывают структурную неопределенность модели и удовлетворяют следующим требованиям:

$$\Theta = \left\{ \theta \in R^L : \theta_i(k) \ge 0,\ \sum_{i=1}^{L} \theta_i(k) = 1 \right\}. \qquad (5)$$

Таким образом, модель сети в условиях неопределенности значений запаздывания управляемых потоков может рассматриваться как выпуклый многогранник, который задается списком вершин:

$$\left\{ \left(A^{(1)}, B, G, C\right), \left(A^{(2)}, B, G, C\right), ..., \left(A^{(L)}, B, G, C\right) \right\}.$$

В результате расширенная модель сети может быть представлена в виде модели с параметрической структурной неопределенностью следующего вида

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A(\theta)\xi(k) + Bu(k) + Gd(k); \\ x(k) &= C\xi(k), \quad A(\theta) \in \Omega = Co\left\{ A^{(1)}, ..., A^{(L)} \right\}, \end{aligned} \qquad (6)$$

где $Co\{\cdot\}$ – выпуклая оболочка; $A^{(i)}, i = \overline{1,L}$ – i-я вершина выпуклого множества Ω.

Для системы (6) с параметрической неопределенностью (5) рассматривается задача синтеза стратегии управления запасами, которая для любого допустимого спроса $d(k) \in D \ \ \forall k \geq 0$ обеспечивает:

1) полное и своевременное удовлетворение спроса;

2) робастную устойчивость замкнутой системы при ограничениях (2);

3) гарантированную стоимость управления, которая означает, что значение критерия качества не превысит некоторого граничного значения.

Изложение основного материала

Выполним аппроксимацию множества D значений внешнего спроса эллипсоидом наименьшего объема, который задается уравнением

$$E(d^*, Q_d) = \left\{ d \in R^q : \left(d(k) - d^*\right)^T Q_d^{-1} \left(d(k) - d^*\right) \leq 1 \right\}. \quad (7)$$

Матрица $Q_d \in R^{q \times q}$ и вектор координат центра $d^* \in R^q$ определяются в результате решения задачи полуопределенного программирования аналогично тому, как это сделано в работе [9].

Если изменяющийся с течением времени вектор параметров $\theta(k)$ может быть измерен или оценен в реальном времени, то возможно строить закон управления в виде линейной динамической обратной связи по сигналу невязки между наличным и страховым уровнями запаса ресурсов

$$u(k) = K(k,\theta)\left(\xi(k) - \xi^*\right), \ K(k,\theta) = \sum\nolimits_{i=1}^{L} \theta_i(k) K_i(k), \quad (8)$$

где $K_i(k) \in R^{m \times N}$ – нестационарная матрица коэффициентов обратной связи, которая соответствует варианту реализации матрицы динамики $A^{(i)}$; $\xi^* = [\underbrace{x^{*T}, ..., x^{*T}}_{\Lambda+1}]^T$ – составной вектор, у которого компоненты вектора x^* определяют размеры страховых запасов ресурсов в узлах сети и вычисляются на основании верхних граничных значений внешнего спроса с учетом запаздываний и продуктивной модели Леонтьева:

$$x^* = \left(I_n - \Pi\right)^{-1} \hat{d}, \quad \hat{d}_i = \begin{cases} \Lambda_i d_i^{max}, & i = \overline{1,q}, \\ 0, & i = \overline{q+1,n}, \end{cases} \quad (9)$$

где $\Pi \in R^{n \times n}$ – продуктивная матрица, значение элемента Π_{ij} которой равно количеству единиц ресурса i, необходимому для производства единицы ресурса j.

Тогда расширенную модель замкнутой СУЗ для управления (8) можно представить в виде:

$$\begin{gathered} \xi(k+1) = A_f(k)\left(\xi(k) - \xi^*\right) + A(\theta)\xi^* + Gd(k)^*; \\ x(k) = C\xi(k); \\ A_f(k) = A(\theta) + BK(k,\theta), \quad A(\theta) \in \Omega. \end{gathered} \quad (10)$$

Запишем квадратичный критерий качества в случае бесконечного временного горизонта:

$$J(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\xi(k) - \xi^*\right)^T W_\xi \left(\xi(k) - \xi^*\right) + u^T(k) W_u u(k) \right), \quad (11)$$

где $W_\xi \in R^{N \times N}$, $W_u \in R^{m \times m}$ – положительно определенные диагональные весовые матрицы. Первое слагаемое в выражении (10) определяет размеры штрафов за отклонение текущих уровней запаса ресурсов от страховых, второе – стоимость производства и транспортировки ресурсов.

Задача синтеза управления эквивалентна решению минимаксной задачи:

$$u(k) = \arg \min_{u(k) \in U} \Big(\max_{d(k) \in E(d^*, Q_d), A(\theta) \in \Omega} J(k) \Big). \quad (12)$$

Определим модифицированную параметризованную функцию Ляпунова (ПФЛ), построенную на решениях системы (10):

$$V\left(\xi(k) - \xi^*, \theta\right) = \left(\xi(k) - \xi^*\right)^T P(k,\theta) \left(\xi(k) - \xi^*\right), \quad (13)$$

где $P(k,\theta) = P^T(k,\theta) \in R^{N \times N}$, $P(k,\theta) > 0$ – аффинная функция от вектора параметров θ, которая определяется следующим образом [4]:

$$P(k,\theta) = \sum\nolimits_{i=1}^{L} \theta_i(k) P_i(k), \ \ P_i(k) > 0. \quad (14)$$

Динамическая система (10) с параметрической неопределенностью (5) является робастно устойчивой, если

$$V\left(\xi(k) - \xi^*, \theta\right) > 0$$

и

$$\Delta V\left(\xi(k) - \xi^*, \theta\right) = V\left(\xi(k+1) - \xi^*, \theta\right) - V\left(\xi(k) - \xi^*, \theta\right) < 0$$

$\forall \theta \in \Theta$ при $\left(\xi(k) - \xi^*\right) \neq 0$.

Потребуем, чтобы значение ПФЛ (13) с течением времени убывало с некоторой гарантированной скоростью, определяемой текущим значением критерия качества (11):

$$V\left(\xi(k+1) - \xi^*, \theta\right) - V\left(\xi(k) - \xi^*, \theta\right) \leq -\left(\left(\xi(k) - \xi^*\right)^T W_\xi \left(\xi(k) - \xi^*\right) + u^T(k) W_u u(k) \right). \quad (15)$$

Если неравенство (15) выполняется, то можно показать, что ПФЛ (13) $\forall k \geq 0$ определяет верхнее граничное значение критерия (11):

$$\max_{d(k) \in E(d^*, P_d), A(\theta) \in \Omega} J(k) \leq V\left(\xi(k) - \xi^*, \theta\right).$$

Тогда задача (12) эквивалентна задаче минимизации ПФЛ

$$u(k) = \arg \min_{u(k) \in U} V\left(\xi(k) - \xi^*, \theta\right)$$

для решения которой применим метод инвариантных эллипсоидов [2].

Эллипсоид, описываемый уравнением

$$E(\xi^*, Q(k,\theta)) = \\ = \left\{ \xi \in R^N : \left(\xi(k)-\xi^*\right)^T Q^{-1}(k,\theta)\left(\xi(k)-\xi^*\right) \le 1 \right\} \quad (16)$$

называется инвариантным по состоянию для системы (10), если из условия $\xi(0) \in E(\xi^*, Q(0,\theta))$ следует, что $\xi(k) \in E(\xi^*, Q(k,\theta))$ для $\forall k \ge 0$. Другими словами, любая траектория системы, начавшись в инвариантном эллипсоиде, остается в нем для любого момента времени $k \ge 0$.

Эллипсоид (16) может рассматриваться в качестве аппроксимации множества достижимости замкнутой системы (10), то есть позволяет характеризовать влияние внешних возмущений и неопределенности значений параметров на траекторию замкнутой системы.

Тогда минимизация в некотором смысле инвариантного эллипсоида (16) соответствует робастному управлению системой (10).

Сравнение выражений (13) и (16) позволяет сделать вывод, что если выполняется тождество

$$P(k,\theta) = Q^{-1}(k,\theta), \quad (17)$$

то эллипсоид (16) представляет собой множество, находящееся внутри поверхности уровня ПФЛ (13).

Тогда задача робастной стабилизации заключается в вычислении в каждый момент $k \ge 0$ матриц $K_i(k),\ i=\overline{1,L}$ таких, чтобы регулятор (8) обеспечивал минимизацию по некоторому критерию эллипсоида (16) при ограничениях (2). Выберем в качестве критерия сумму квадратов полуосей эллипсоида, то есть след матрицы $Q(k,\theta)$.

Результат решения задачи синтеза ограниченного робастного гарантирующего управления запасами на основе ПФЛ может быть представлен в виде следующей теоремы.

Теорема. Рассмотрим систему (10) с параметрической неопределенностью (5) и ограничениями (2), и пусть матрицы $\widehat{Q}_i(k), i=\overline{1,L}$, $\widehat{Y}(k)$ получены в результате решения задачи

$$\sum_{i=1}^{L} \mathrm{trace}\left(Q_i(k)\right) \to \min \quad (18)$$

при ограничениях на матричные переменные $Q_i(k) = Q_i^T(k) \in R^{N\times N}$, $i=\overline{1,L}$, $Y(k) \in R^{m\times N}$, $Z^{(iii)} \in R^{\tilde N\times \tilde N}$, $\tilde N = 4N+2q+m$; $Z^{(iij)} = Z^{(jii)T}$, $Z^{(iji)}$, $i=\overline{1,L}, j\ne i, j=\overline{1,L}$; $Z^{(ijp)} = Z^{(pji)T}$, $Z^{(ipj)} = Z^{(jpi)T}, Z^{(jip)} = Z^{(pij)T}$, $i=\overline{1,L-2}$, $j=\overline{1,L-1}$, $p=\overline{1,L}$ и скалярный параметр $\alpha(k)$

$$\begin{bmatrix} Z^{(1i1)} & Z^{(1i2)} & \cdots & Z^{(1iL)} \\ Z^{(2i1)} & Z^{(2i2)} & \cdots & Z^{(2iL)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z^{(Li1)} & Z^{(Li2)} & \cdots & Z^{(LiL)} \end{bmatrix} \ge 0,\ i=\overline{1,L}, \quad (19)$$

$$\alpha(k) > 0, \quad Q_i(k) > 0,\ i=\overline{1,L}, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & CQ_i(k) \\ Q_i(k)C^T & Q_i(k) \end{bmatrix} \ge 0,\ i=\overline{1,L}, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon e_m \left(\xi(k)-\xi^*\right)^+ Y^T(k) & Y(k) \\ Y^T(k) & Q_i(k) \end{bmatrix} \le 0,\ i=\overline{1,L}, \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} u^{max} \left(\xi(k)-\xi^*\right)^+ Y^T(k) & Y(k) \\ Y^T(k) & Q_i(k) \end{bmatrix} \ge 0,\ i=\overline{1,L}, \quad (23)$$

где $Q_x \in R^{n\times n}$ – матрица эллипсоида наименьшего объема, который аппроксимирует множество X; $0_{m\times n}$ – нулевая матрица соответствующей размерности; $\varepsilon > 0$ – малая положительная константа; $e_m = [1,1,...,1]^T \in R^{m\times 1}$ – вектор-столбец из единиц; «+» – псевдообращение Мура-Пенроуза;

$$Z^{(ijp)} = \begin{bmatrix} Q_i(k) & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & \left(A^{(i)}Q_i(k)+BY(k)\right)^T & 0_{N\times q} & Q_i(k)W_\xi & Y^T(k)W_u \\ 0_{N\times N} & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & \left(A^{(i)}-I_N\right)^T & 0_{N\times q} & 0_{N\times N} & 0_{N\times m} \\ 0_{q\times N} & 0_{q\times N} & 0_{q\times q} & G^T & 0_{q\times q} & 0_{q\times N} & 0_{q\times m} \\ A^{(p)}Q_i(k)+BY(k) & A^{(p)}-I_N & G & Q_j(k) & GQ_d^{1/2} & 0_{N\times N} & 0_{N\times m} \\ 0_{q\times N} & 0_{q\times N} & 0_{q\times q} & Q_d^{1/2}G^T & \alpha(k)I_q & 0_{q\times N} & 0_{q\times m} \\ W_\xi Q_i(k) & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & W_\xi & 0_{N\times m} \\ W_u Y(k) & 0_{m\times N} & 0_{m\times q} & 0_{m\times N} & 0_{m\times q} & 0_{m\times N} & W_u \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Если задача минимизации линейной функции (18) при ограничениях (19)-(23), которая является задачей полуопределенного программирования, имеет решение, то:

1) для любого начального состояния $x(0) \ge x^{max}$, $u(k) = 0_{m\times 1}\ \forall k \le 0$ и $\forall \theta \in \Theta$, а также внешнего возмущения $d(k) \in E(d^*, Q_d)$ система (10) является робастно устойчивой при ограничениях (2);

2) среди всех линейных управлений вида (8) регулятор с матрицей

$$K_i(k) = \widehat{Y}(k)\widehat{Q}_i^{-1}(k), \quad i=\overline{1,L} \quad (25)$$

доставляет минимум по критерию следа матрицы инвариантному эллипсоиду (16) для замкнутой системы (10) в момент времени k.

Из-за громоздкости доказательства Теоремы приведем лишь его набросок. Вычислим первую по k разность ПФЛ (13) в силу системы (10):

$$\Delta V\left(\xi(k)-\xi^*,\theta\right)=$$
$$=\left(A(\theta)\xi(k)+Bu(k)+Gd(k)-\xi^*\right)^T\times$$
$$\times P(k,\theta)\left(A(\theta)\xi(k)+Bu(k)+Gd(k)-\xi^*\right)- \quad (26)$$
$$-\left(\xi(k)-\xi^*\right)^T P(k,\theta)\left(\xi(k)-\xi^*\right)\le$$
$$-\left(\left(\xi(k)-\xi^*\right)^T W_\xi\left(\xi(k)-\xi^*\right)+u^T(k)W_u u(k)\right).$$

С учетом закона управления (7), а также выражений (4), (14) получим

$$\Delta V\left(\xi(k)-\xi^*,\theta\right)=\sum_{i=1}^{L}\theta_i\sum_{j=1}^{L}\theta_j\sum_{p=1}^{L}\theta_p\left[\left(A_f^{(i)}\left(\xi(k)-\xi^*\right)+\right.\right.$$
$$+\left(A^{(i)}-I_N\right)\xi^*+G\left(d(k)-d^*\right)+Gd^*\Big)^T P_j(k)\times$$
$$\times\left(A_f^{(p)}\left(\xi(k)-\xi^*\right)+\left(A^{(p)}-I_N\right)\xi^*+G\left(d(k)-d^*\right)+\right.$$
$$\left.\left.+Gd^*\right)-\left(\xi(k)-\xi^*\right)^T P_i(k)\left(\xi(k)-\xi^*\right)\right]\le$$
$$-\left(\left(\xi(k)-\xi^*\right)^T W_\xi\left(\xi(k)-\xi^*\right)+u^T(k)W_u u(k)\right).$$

Введем следующие обозначения

$$s(k)=\left[\left(\xi(k)-\xi^*\right)^T,\xi^{*T},d^{*T},\left(d(k)-d^*\right)^T\right]^T\in R^{2(N+q)},$$
$$f_i(s)=s^T M_i s,\ i=0,1,\quad M_0^{(ijp)}=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{12}^T & M_{22}\end{bmatrix},$$
$$M_1=\text{block diag}\left(0_{N\times N},0_{N\times N},0_{q\times q},Q_d^{-1}\right),$$

где

$$M_{11}=\begin{bmatrix}A_f^{(i)T}P_j(k)A_f^{(p)}-P_i(k)+W_\xi+K_i^T(k)W_uK_i(k) & A_f^{(i)T}(k)P_j(k)\left(A^{(p)}-I_N\right) & A_f^{(i)T}(k)P_j(k)G\\ \left(A^{(i)}-I_N\right)^T P_j(k)A_f^{(p)}(k) & \left(A^{(i)}-I_N\right)^T P_j(k)\left(A^{(p)}-I_N\right) & \left(A^{(i)}-I_N\right)^T P_j(k)G\\ G^TP_j(k)A_f^{(p)}(k) & G^TP_j(k)\left(A^{(p)}-I_N\right) & G^TP_j(k)G\end{bmatrix},$$

$$M_{12}^T=$$
$$=\left[G^TP_j(k)A_f^{(p)}(k)\quad G^TP_j(k)\left(A^{(i)}-I_N\right)\quad G^TP_j(k)G\right],$$
$$M_{22}=G^TP_j(k)G\,.$$

С учетом введенных обозначений имеем

$$\Delta V\left(\xi(k)-\xi^*,\theta\right)=\sum_{i=1}^{L}\theta_i^3 s^T(k)M_0^{(iii)}s(k)+$$
$$+\sum_{i=1}^{L}\sum_{j\ne i,j=1}^{L}\theta_i^2\theta_j s^T(k)\times\left[M_0^{(jji)}+M_0^{(iij)}+M_0^{(jii)}\right]s(k)+$$
$$+\sum_{i=1}^{L-2}\sum_{j=i+1}^{L-1}\sum_{p=j+1}^{L}\theta_i\theta_j\theta_p s^T(k)\times s(k)\times$$
$$\times\left[M_0^{(ijp)}+M_0^{(ipj)}+M_0^{(jip)}+M_0^{(jpi)}+M_0^{(pij)}+M_0^{(pji)}\right].$$

Тогда неравенство (26), гарантирующее убывание с течением времени значения ПФЛ (13) и неравенство (7), описывающее эллипсоид, который аппроксимирует множество значений внешнего спроса, можно переписать в виде

$$f_0(s)\le 0\quad\forall s,\ 1\le i\le j\le p\le L:\ f_1(s)\le 1.$$

Согласно неущербности S-процедуры при одном ограничении [10] последнее выражение эквивалентно матричному неравенству $M_0^{(ijp)}\le\alpha(k)M_1$ для некоторого $\alpha(k)>0$ и $1\le i\le j\le p\le L$ или

$$M_0^{(ijp)}-\alpha(k)M_1=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{12}^T & M_{22}-\alpha(k)Q_d^{-1}\end{bmatrix}\le 0,\quad (27)$$
$$1\le i\le j\le p\le L.$$

Введем матричные переменные

$$Q_i(k)=P_i^{-1}(k),\quad Y(k)=K_i(k)Q_i(k),\quad i=\overline{1,L}\quad (28)$$

С помощью леммы Шура [10], а также тождества Шермана-Моррисона-Вудбери [11] и с учетом (24), (28) матричные неравенства (27) примут вид

$$Z^{(ijp)}\ge 0,\quad 1\le i\le j\le p\le L.$$

Тогда для системы (10) с параметрической неопределенностью (5) неравенство (26), гарантирующее убывание с течением времени значения ПФЛ (13), будет выполняться $\forall\theta\in\Theta$ и любого внешнего воздействия $d(k)\in E(d^*,Q_d)$, если выполняется неравенство

$$-\Delta V\left(\xi(k)-\xi^*,\theta\right)=-\sum_{i=1}^{L}\theta_i^3 Z^{(iii)}-$$
$$-\sum_{i=1}^{L}\sum_{j\ne i,j=1}^{L}\theta_i^2\theta_j\left[Z^{(jji)}+Z^{(iji)}+Z^{(iij)}\right]-\sum_{i=1}^{L-2}\sum_{j=i+1}^{L-1}\sum_{p=j+1}^{L}\theta_i\theta_j\theta_p\times$$
$$\times\left[Z^{(ijp)}+Z^{(ipj)}+Z^{(jip)}+Z^{(jpi)}+Z^{(pij)}+Z^{(pji)}\right]\ge 0,$$

которое эквивалентно совокупности ЛМН (19).

Рассмотрим первое из ограничений (2) на значения состояний исходной модели (1), которые совпадают с выходами расширенной модели (10). Введем в рассмотрение эллипсоид, аппроксимирующий множество выходов системы (10):

$$E(x^*,CQ(k,\theta)C^T)=$$
$$\left\{x\in R^n:\left(x(k)-x^*\right)^T\left(CQ(k,\theta)C^T\right)^{-1}\left(x(k)-x^*\right)\le 1\right\}.\quad (29)$$

Для того, чтобы выполнялось первое из неравенств (2) необходимо, чтобы объем эллипсоида

(29) не превосходил объема эллипсоида, аппроксимирующего множество X, что, с учетом выражений (14), (17), эквивалентно выполнению неравенств

$$CQ_i(k)C^T \le Q_x,\ i=\overline{1,L}. \qquad (30)$$

С использованием леммы Шура неравенства (30) могут быть представлены в виде ЛМН (21).

Рассмотрим второе из ограничений (2), которое с учетом закона управления (8) и тождеств (25) представим в виде двух неравенств

$$\begin{gathered} 0 \le Y(k)Q_i^{-1}(k)\left(\xi(k)-\xi^*\right),\ i=\overline{1,L}, \\ Y(k)Q_i^{-1}(k)\left(\xi(k)-\xi^*\right) \le u^{\max},\ i=\overline{1,L}. \end{gathered} \qquad (31)$$

Поскольку рассматривается линейное управление, первое из неравенств (31) эквивалентно

$$\varepsilon e_m \le Y(k)Q_i^{-1}(k)\left(\xi(k)-\xi^*\right),\ i=\overline{1,L}. \qquad (32)$$

Умножим справа левую и правую часть неравенства (32) и второго из неравенств (31) сначала на $\left(\xi(k)-\xi^*\right)^+$, а затем на $Y^T(k)$:

$$\begin{gathered} \varepsilon e_m\left(\xi(k)-\xi^*\right)^+ Y^T(k) \le \\ \le Y(k)Q_i^{-1}(k)Y^T(k),\ i=\overline{1,L}, \\ Y(k)Q_i^{-1}(k)Y^T(k) \le \\ \le u^{\max}\left(\xi(k)-\xi^*\right)^+ Y^T(k),\ i=\overline{1,L}. \end{gathered} \qquad (33)$$

С помощью леммы Шура неравенства (34) могут быть представлены в виде ЛМН (22), (23). В результате приходим к задаче минимизации линейной функции (18) при ограничениях (19) – (23).

В завершение доказательства отметим, что в силу $P_i(k) \succ 0,\ i=\overline{1,L}$ матрица $K_i(k)$ восстанавливается из (28) единственным образом (25).

Таким образом, совокупность ЛМН (19), (20) гарантирует стабилизацию замкнутой системы (10) при $\forall d(k) \in E(d^*, Q_d)$ и $\forall A(\theta) \in \Omega$. ЛМН (21),(22),(23) обеспечивают выполнение заданных ограничений (2). Отметим, что именно наличие ЛМН (22),(23) приводит к необходимости использования динамической обратной связи, поскольку матрицы неравенств зависят от текущего значения вектора состояний $\xi(k)$.

Численный пример

В качестве примера рассмотрим систему производства-хранения-распределения, которая изучалась в работе [8]. Модель сети описывается графом

$$G=\left(\{1,2,3\},\{(2,1),(2,3),(3,1)\}\right).$$

Заданы значения времени выполнения заказа в узлах сети: $T_1=T_2=2$, $T_3=1$; и времени транспортировки ресурсов между узлами сети:

$$T_{2,1}=T_{3,1}=T_{2,3}=1.$$

Представим управляемые потоки u_1 и u_3, описывающие сборочные процессы, в виде гипердуг, а также добавим поток u_2, который описывает поставки сырья извне (см. рис. 1). Дуги d_1 и d_2, изображенные пунктирными линиями, представляют внешний спрос. Значение времени транспортировки и количество единиц продукции Π_{ij}, которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны для каждого управляемого потока в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле каждого узла в круглых скобках указаны значения времени выполнения заказа T_i. Специфика рассматриваемой системы в том, что на узел 1 действует только внешний спрос; на узел 2 действует как внешний, так и внутренний спрос со стороны узлов 1 и 3; на узел 3 – только внутренний спрос со стороны узла 1.

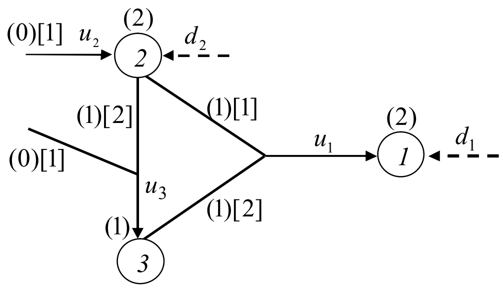


Рис. 1. Графическое представление модели сети

По формуле $\Lambda_i = \max\left\{T_{j,i}+T_i,\ i,j=\overline{1,3},\ j\ne i\right\}$ определим величины запаздывания управляемых потоков для всех узлов сети, в результате получим $\Lambda = 3$. Тогда размерность расширенной модели сети равна $N=12$.

Заданы максимальные вместительности хранилищ узлов сети и объемы транспортировок $x^{\max}=\left[120, 672, 240\right]^T$, $u^{\max}=\left[25, 130, 55\right]^T$, а также граничные значения внешнего спроса $d^{\min}=\left[7, 6\right]^T$, $d^{\max}=\left[20, 18\right]^T$.

Пусть время транспортировки ресурсов между узлами 2 и 3 в процессе функционирования сети может увеличиваться на один период, т.е. $T_{2,3}\in\{1,2\}$. Тогда величина запаздывания управляемых потоков узла 3 принимает значение из множества $\Lambda_3\in\{2,3\}$. В результате получим $A(\theta)\in\Omega=\mathrm{Co}\left\{A^{(1)}, A^{(2)}\right\}$, где

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix} I_3 & B_1 & B_2^{(1)} & B_3^{(1)} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I_3 & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & I_3 & 0_{3\times3} \end{bmatrix},$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} I_3 & B_1 & B_2^{(2)} & B_3^{(2)} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I_3 & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & I_3 & 0_{3\times3} \end{bmatrix},$$

$$B_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix},\ B_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix},$$

$$B_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix},\ B_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{1}} \end{bmatrix}$$

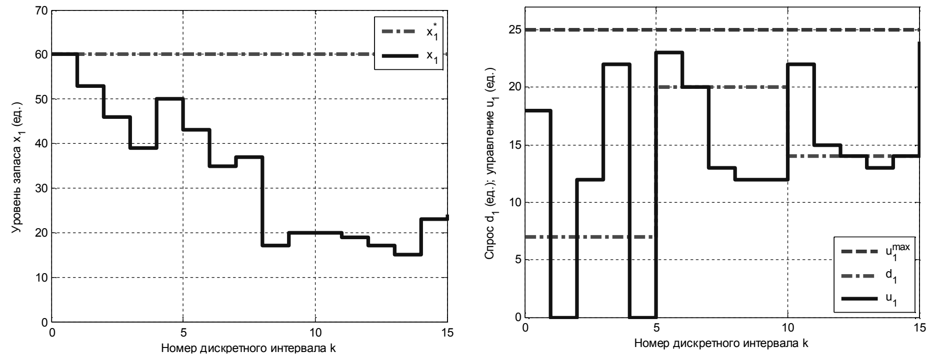
(варьируемые элементы матриц подчеркнуты).

В соответствии с (8) уровни страховых запасов равны $x^* = [60, 336, 120]^T$.

В качестве начального состояния выбраны значения страховых запасов $x(0) = x^*$, а значения диагональных весовых матриц равны

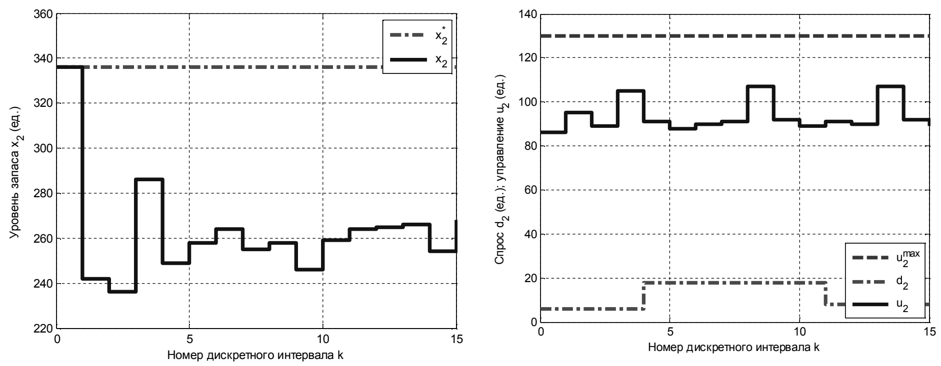
$$[W_\xi]_{ii} = 11.2,\ i = \overline{1,12}\,,\ [W_u]_{jj} = 3.2,\ j = \overline{1,3}\,.$$

Моделирование осуществлялось в течение 15 периодов. В 4, 9 и 14 периодах значение матрицы динамики выбиралось равным $A^{(2)}$, в остальных периодах – $A^{(1)}$. Результаты моделирования получены с помощью свободно распространяемого пакета CVX [12] путем численного решения последовательности задач (18) при ограничениях (19) – (23) при скачкообразно изменяющемся внешнем спросе. Результаты представлены на рис. 2 – 4, где а – значения наличного и страхового уровней запаса; б – значения внешнего спроса и объемов заказа.



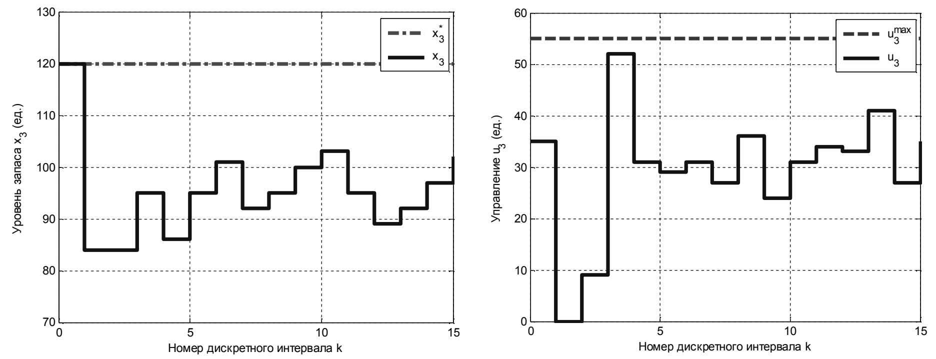
а б

Рис. 2. Графики переходных процессов для узла 1



а б

Рис. 3. Графики переходных процессов для узла 2



а б

Рис. 4. Графики переходных процессов для узла 3

Очевидно, что вначале имеет место переходный процесс, обусловленный тем, что каналы транспортировки ресурсов не были загружены. В процессе моделирования фазовая траектория замкнутой системы не выходит за пределы инвариантных эллипсоидов, размеры которых зависят от выбранных значений весовых матриц W_ξ и W_u.

Результаты моделирования показали, что полученная стратегия управления запасами обеспечивает полное и своевременное удовлетворение неизвестного, но ограниченного внешнего спроса, а также робастную устойчивость замкнутой системы при заданных ограничениях на состояния и управления.

Выводы

В статье предложен подход к решению задачи синтеза ограниченного робастного гарантирующего управления запасами для систем с параметрической структурной неопределенностью в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и наличия несимметричных ограничений на значения состояний и управлений. Подход основан на использовании метода инвариантных эллипсоидов и параметризованной функции Ляпунова, что позволяет уменьшить консерватизм полученных результатов. Использование математического аппарата ЛМН позволяет сформулировать задачу синтеза как последовательность задач полуопределенного программирования, для решения которых используются специализированные пакеты на базе системы MATLAB.

Список литературы

1. Лотоцкий В.А. Модели и методы управления запасами / В.А. Лотоцкий, А.С. Мандель. – М.: Наука, 1991. – 188 с.

2. Хлебников М.В. Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) / М.В. Хлебников, Б.Т. Поляк, В.М. Кунцевич // АиТ. – 2011. – № 11. – С. 9-59.

3. Blanchini R. Set-theoretic methods in control / R. Blanchini, S. Miani. – Boston : Birkhäuser, 2008. – 494 p.

4. Oliveira M.C. LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case / M.C. Oliveira, J.C. Geromel, L. Hsu // Linear Algebra Appl. – 1999. – No. 296. – P. 27-38.

5. Баландин Д.В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д.В. Баландин, М.М. Коган. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.

6. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами / Ю.И. Рыжиков. – СПб: Питер, 2001. – 384 с.

7. Дорофеев Ю.И. Построение математических моделей управляемых сетей поставок с учетом запаздываний потоков / Ю.И. Дорофеев, А.А. Никульченко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 1. – С. 16-27.

8. Blanchini F. Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays / F. Blanchini, R. Pesenti, F. Rinaldi, W. Ukovich // IEEE Trans. on robotics and automation. – 2000. – Vol. 16. – No. 3. – P. 313-317.

9. Дорофеев Ю.И. Синтез системы оптимального управления запасами с дискретным ПИД-регулятором с использованием ЛМН / Ю.И. Дорофеев // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2014. – Вип. 4 (41). – С. 34-41.

10. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002.

11. Голуб Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоан. – М.: Мир, 1999. – 548 с.

12. Grant M., Boyd S. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.0 beta. // Mode of access: URL: http://cvxr.com/cvx.

Поступила в редколлегию 8.09.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.М. Любчик, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

СИНТЕЗ ОБМЕЖЕНОГО РОБАСТНОГО ГАРАНТУЮЧОГО КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАРАМЕТРИЗОВАНОЇ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА

Ю.І. Дорофєєв

У статті запропонований підхід до вирішення задачі синтезу обмеженого робастного гарантуючого керування запасами для систем з параметричною структурною невизначеністю в умовах дії невідомого, але обмеженого зовнішнього попиту та наявності несиметричних обмежень на значення станів та керуючих дій. Підхід заснований на використанні методу інваріантних еліпсоїдів і параметризованої функції Ляпунова, що дозволяє зменшити консерватизм отриманих результатів. Використання математичного апарату лінійних матричних нерівностей дозволяє сформулювати задачу синтезу управління у вигляді послідовності задач напіввизначеного програмування, для вирішення яких використовуються спеціалізовані пакети на базі системи MATLAB. Розглянуто чисельний приклад.

Ключові слова: *керування запасами, робастне керування, гарантуюче керування, метод інваріантних еліпсоїдів, параметризована функція Ляпунова, лінійна матрична нерівність, задача напіввизначеного програмування.*

PARAMETER-DEPENDENT LYAPUNOV FUNCTIONS FOR CONSTRAINED ROBUST GUARANTEED INVENTORY CONTROL SYNTHESIS

Yu.I. Dorofieiev

An approach to solution of constrained robust guaranteed inventory control synthesis problem for systems with parametric structural uncertainty under "unknown but bounded" external demand and the availability of non-symmetric structural constraints on the values of states and controls is proposed. The approach is based on the Invariant Ellipsoids Method and Parameter-Dependent Lyapunov Function, use of which allows to reduce the conservatism of the results. Using the Linear Matrix Inequalities is allowed to formulate the synthesis problem as a sequence of semidefinite programming, for solution which is used specialized packages based on the MATLAB system. A numerical example is considered.

Keywords: *inventory control, robust control, guaranteed control, invariant ellipsoids method, parameter-dependent Lyapunov function, linear matrix inequality, semidefinite programming.*