УДК 519.237

В.В. Карпенко, Ямен Хазим

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

ДЕКОМПОЗИЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ АНАЛИЗА СИСТЕМ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Для решения задач исследования систем с большим числом состояний предложен декомпозиционный подход. Описан метод, позволяющий рассчитать рациональное число групп состояний. Рассмотрен частный случай анализа системы с двумерным множеством возможных состояний. Обоснована рациональная стратегия декомпозиции сложной системы, функционирование которой описывается двумерным полнодоступным марковским графом.

Ключевые слова: *система с большим числом состояний, декомпозиция, расчет рационального числа групп, вычислительная процедура, оценка эффективности процедуры декомпозиции.*

Введение

Традиционные трудности, возникающие при анализе распределённых систем, связаны с большим числом возможных их состояний. При этом даже при использовании наиболее эффективных моделей функционирования таких систем соответствующие вычислительные процедуры остаются чрезмерно трудоемкими. Естественный общий подход к решению задач высокой размерности – декомпозиция, реализуемая путем фазового укрупнения состояний [1 – 4] следующим образом. Исходная задача редуцируется к совокупности локальных задач меньшей размерности. Локальные задачи решаются независимо, а затем их результаты объединяются решением координирующей задачи. Редукция реализуется кластеризацией всего множества возможных состояний. При этом принципиальным является вопрос о том, на сколько групп (кластеров) следует разбивать исходное множество состояний.

Цель исследования – разработка метода расчета рационального числа кластеров, обеспечивающего минимизацию суммарного времени решения задачи. Сформируем соответствующую задачу.

Постановка задачи. Пусть анализируемая система может находиться в одном из N возможных состояний. Если это множество разбить на m подмножеств с равным числом состояний, то каждое из этих подмножеств будет иметь $k = N/m$ состояний. Введем функцию $\varphi(k)$, определяющую среднюю трудоемкость решения задачи анализа системы, содержащей k возможных состояний. Тогда можно рассчитать среднюю суммарную трудоемкость анализа исходной системы по формуле

$$F(N,m) = m\,\varphi\left(N/m\right) + \varphi\left(m\right). \qquad (1)$$

Первое слагаемое критерия (1) определяет трудоемкость решения m локальных задач, а второе – трудоемкость координирующей задачи.

Задача состоит в отыскании параметра m, минимизирующего критерий (1).

Основной результат

Определение стратегии кластеризации. Для аналитического описания функции $\varphi(k)$? используем соотношение

$$\varphi(k) = a\,k^p, \quad p > 1,$$

описывающее вычислительную сложность решения системы линейных алгебраических уравнений с k неизвестными [5, 6]. Тогда формула (1) примет вид

$$F(N,m) = a\,m\left(N/m\right)^p + a\,m^p = aN^p\big/m^{p-1} + am^p. \quad (2)$$

Получим искомое значение m. Имеем

$$\frac{dF(N,m)}{dm} = (1-p)a\,N^p m^{-p} + pam^{p-1} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{p-1}{p}N^p = m^{2p-1}, \quad m = E\left[\left(N^p\cdot(p-1)\big/p\right)^{1/(2p-1)}\right].$$

В полученном выражении $E[\bullet]$ – выделение целой части. Если, в частности. $p = 3$, то

$$m = E\left[\left(2/3\right)^{1/5} N^{3/5}\right]. \qquad (3)$$

Используя (3), легко подсчитать выигрыш, получаемый при использовании декомпозиции. Так как

$$F(N,m) = a\cdot\left(2/3\right)^{1/5} N^{3/5}\left[N\Big/\left(\left(2/3\right)^{1/5}N^{3/5}\right)\right]^3 + $$
$$+\,a\cdot\left[\left(2/3\right)^{1/5}N^{3/5}\right]^3 = a\cdot\left[\left(2/3\right)^{-2/5}N^{9/5} + \right. \qquad (4)$$
$$\left. +\left(2/3\right)^{3/5}N^{9/5}\right] \cong 2a\cdot N^{9/5} \approx 2a\cdot N^2,$$

то $\eta = F(N,1)/F(N,m) = a\cdot N^3\big/2aN^{9/5} \approx 0,5\cdot N.$

Кроме того, заметим, что для практических целей и удобства решения задачи с использованием кластеризации из (3) можно получить приближенное значение m, равное $N^{1/2}$. При этом все множество состояний разбивается на приблизительно $\sqrt{N}$ кластеров, в каждом из которых содержится приблизительно $\sqrt{N}$ состояний.

Реализуемая с использованием (3) стратегия кластеризации может уточняться в некоторых конкретных частных случаях, когда этого требует структура множества состояний. Пусть, например, анализируется система "торговый зал магазина склад магазина", в которой расходуемый ресурс торгового зала восстанавливается за счет склада, а ресурс склада пополняется оптовой базой. Функционирование подобных систем при использовании марковских моделей описывается двумерным графом [7, 8], общая структура которого имеет вид, приведенный на рис. 1

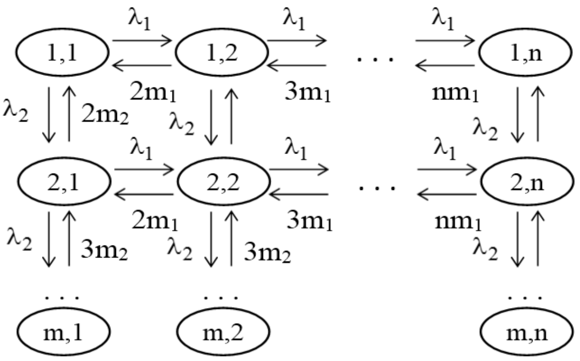

Рис. 1. Граф переходов системы обслуживания

В этой задаче естественное группирование может быть реализовано двумя способами. Первый вариант: объединяются в группы состояния в строках. При этом появляются m групп по n состояний в каждой. Второй вариант: объединяются в группы состояния в столбцах. При этом появляется n групп с m состояниями в каждой. Сравним трудоемкость решения задачи для этих двух вариантов.

Введем следующие обозначения: e_{ij} – j-ое состояние в i-й строке исходного графа переходов, $\hat{E}_i = \{e_{i1},...,e_{in}\}$ – множество состояний в i-й группе, при объединении по строкам, $i = 1, 2,..., m$, $\tilde{E}_j = \{e_{1j},...,e_{mj}\}$ – множество состояний в j-й группе при объединении по столбцам, $j = 1, 2,..., n$. Схематически отобразим эти варианты на рис. 2 и 3.

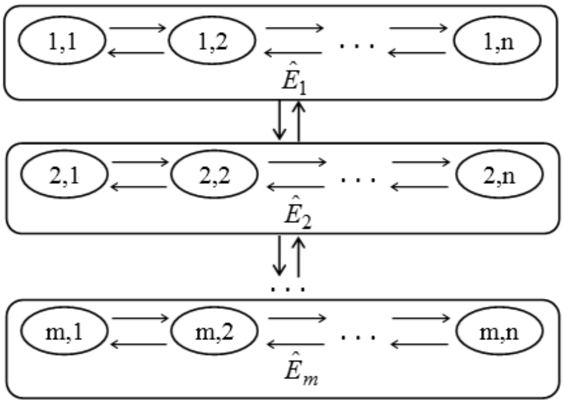

Рис. 2. Граф состояний
при объединении по строкам

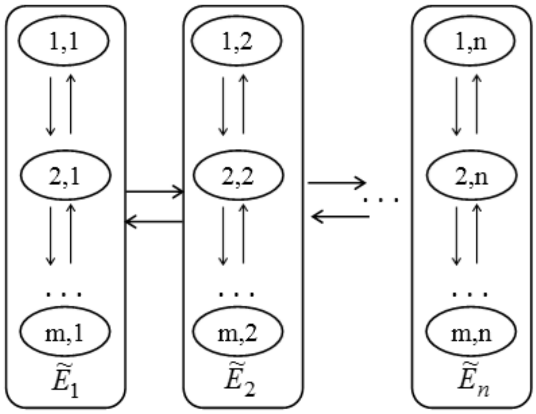

Рис. 3. Граф состояний
при объединении по столбцам

В соответствии с этими схемами в первом варианте решается m локальных задач размерности n и координирующая задача размерности m. Во втором варианте решается n локальных задач размерности m и локальная задача размерности m.

Тогда трудоемкость первого и второго вариантов решения задачи оценивается соотношениями

$$F_1 = man^3 + am^3, \quad F_2 = nam^3 + an^3.$$

При этом

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 &= a(mn^3 + m^3 - nm^3 - n^3) = \\ &= a[mn(n^2 - m^2) - (n^3 - m^3)] = \\ &= a(n - m)[mn(n + m) - (n^2 + mn + m^2)] = \\ &= a(n - m)[mn(n + m) - (n^2 + 2mn + m^2 - mn)] = \\ &= a(n - m)[mn(n + m) - (n + m)^2 + mn] = \\ &= a(n - m)[(n + m)(mn - (n + m))] + a(n - m)mn. \end{aligned} \qquad (5)$$

Если $m \geq 2, n \geq 2$, то $1/m + 1/n \leq 1$, отсюда $mn \geq m + n$. Пусть, например, $n > m$. Тогда, с учетом (5), получим $F_1 > F_2$.

Таким образом, в этом случае второй вариант эффективнее первого, то есть для фиксированного значения mn выгоднее решать большее число (n) задач с меньшей размерностью (m), чем меньшее число (m) задач с большей размерностью (n).

Выводы

Таким образом, предложен метод решения задач исследования систем с большим числом возможных состояний, основанный на декомпозиции. При этом решение исходной задачи сводится к последовательному независимому решению набора задач меньшей размерности с последующим объединением полученных результатов. Показано, что этот подход позволяет существенно снизить (в число раз приблизительно равное числу состояний системы) вычислительную трудоемкость исходной задачи высокой размерности.

Список литературы

1. *Королюк В.С.Фазовое укрупнение сложных систем. / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.: Наукова думка, 1976. – 293 с.*
2. *Королюк В.С. Полумарковские процессы и их приложения / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.: Наукова думка, 1979. – 293 с.*
3. *Раскин Л.Г. Анализ марковских цепей с использованием фазового укрупнения состояний / Л.Г. Раскин // Инф. технологии: Наука, техника, технология, образование, здоровье. – Х.: НТУ «ХПИ», 1997. – С. 280-284.*
4. *Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ / В.В. Иванов. – К.: Наукова думка, 1986. – 584 с.*
5. *Поспелов Д.А. Введение в теорию вычислительных систем / Д.А. Поспелов. – М.: Наука, 1972. – 300 с.*
6. *Раскин Л.Г. Математическое моделирование функционирования сложных систем / Л.Г. Раскин. – Х.: ВИРТА ПВО, 1988. – 177 с.*
7. *Серая О.В. Многомерные модели логистики в условиях неопределённости / О.В. Серая. – Х.: ФОП Стеценко, 2010. – 512 с.*
8. *Серая О.В. Оценка эффективности марковских систем, функционирующих в марковской меняющейся среде / О.В. Серая. – Минск: Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, 2010. – 1(25). – С. 75-81.*

Поступила в редколлегию 26.02.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

ДЕКОМПОЗІЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ АНАЛІЗУ СИСТЕМ З ВЕЛИКОЮ КІЛЬКІСТЮ СТАНІВ

В.В. Карпенко, Ямен Хазім

Для рішення задач дослідження систем з великою кількістю станів запропонований декомпозіційний підхід. Описано метод, що дозволяє обчислити раціональне число груп станів. Розглянуто окремий випадок аналізу системи з двомірною множиною можливих станів. Обґрунтована раціональна стратегія декомпозиції складної системи, функціонування якої описується двомірним повнодоступним марковським графом.

Ключові слова: *система з великим числом станів, декомпозиція, розрахунок оптимальної кількості груп, обчислювальна процедура, оцінка ефективності процедури декомпозиції.*

DECOMPOSITION TECHNOLOGY SYSTEMS ANALYSIS WITH THE LARGE NUMBER OF STATES

V.V. Karpenko, Yamen Hazim

In order to solve research problems of systems with a large number of states proposed decomposition approach. The method, which allows calculating the rational state groups. Consider the particular case of systems with two-dimensional analysis of the set of possible states. Substantiates the rational strategy of decomposition of a complex system, the functioning of which is described by the two-dimensional fully accessible Markov graph.

Keywords: *system with a large number of states, decomposition, rational calculation of the number of groups, the computational procedure, evaluation of the effectiveness of decomposition procedures.*