УДК 519.7

В.А. Лещинский, И.А. Лещинская

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

О ФОРМУЛЬНОЙ ЗАПИСИ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В работе рассматривается логический подход к формульному описанию произвольных сложных высказываний, выражающему его функцию истинности. Показано, что содержание сложного высказывания зависит только от содержания простых высказываний, входящих в его состав, а также от вида его функции истинности. Показано, каким образом можно описывать сложные высказывания, переходя от текстовой интерпретации высказываний к формулам. На примере задачи Кейслера рассматривается, как, оперируя формулами высказываний, можно формальными методами решать некоторые логические задачи.

Ключевые слова: *логическая формализация, сложные высказывания, операции с высказываниями, функция истинности, истинностная переменная.*

Введение

Настоящая статья является продолжением работы, в которой рассматривался логический подход к формализации сложных высказываний, т.е. высказываний, в которых можно выделить входящие в их состав другие высказывания. Были проанализированы способы построения сложных высказываний; рассмотрены способы образования сложных высказываний из простых; проанализировано соотношение естественного и логического языков, при этом изучалась только логическая часть естественного языка. Здесь мы продолжим рассмотрение сложных высказываний [2, 3].

1. Формула высказывания

Сформулируем общее правило перехода от произвольного сложного высказывания к формуле, выражающей его функцию истинности. Для перехода от произвольного сложного высказывания к формуле, выражающей его функцию истинности, нужно заменить в нем простые высказывания их истинностными переменными, а логические связки "но", "и", "или", "или – или", "если – то", "если и только если – то" заменить знаками отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, сложения по модулю два, импликации и эквивалентности.

Пример 1. Запишем функцию истинности для приведенного в [1] высказывания из рассказа А.П. Чехова «Человек в футляре». Заменим простые высказывания, входящие в состав данного сложного, их истиностными переменными:

1) «Кто из товарищей опаздывает на молебен» - x;

2) «Доходили слухи о какой-нибудь проказе гимназистов» - y;

3) «Видели классную даму поздно вечером с офицером» - z;

4) «Он очень волновался» - t;

5) «Все говорил, как бы чего не вышло» - v.

Функция истинности данного сложного высказывания запишется в виде: $f = (x \vee y \vee z) \supset tv$. Сформулируем также правило перехода от формулы к высказыванию: нужно заменить в ней истинностные переменные соответствующими простыми высказываниями, а знаки булевых операций заменить соответствующими логическими связками. Математическим описанием структуры сложного высказывания является формула алгебры логики, построенная по сформулированному выше правилу. Эту формулу, называемую формулой высказывания, принимаем в качестве естественного определения структуры сложного высказывания. Имеет место следующее важное утверждение: высказывания, функции истинности которых совпадают, тождественны по содержанию.

Пример 2. Покажем, что следующие высказывания тождественны по содержанию:

1)« B и A », поскольку $xy = yx$;

2) высказывание «Не A влечет не B » тождественно высказыванию « B влечет A ».

Действительно, $\bar{x} \supset \bar{y} = \bar{\bar{x}} \vee \bar{y} = \bar{y} \vee x = y \supset x$. При выводе использовано тождество, истинность которого легко проверяется непосредственно по таблице значений функции импликации, записанной в форме СКНФ: $x \supset y = \bar{x} \vee y$. Проиллюстрируем тождественность двух последних высказываний.

Пусть даны два простых высказывания: «Идет дождь» - x; «Тротуары мокрые» - y. Тогда высказыванию «Если идет дождь, то тротуары мокрые» соответствует формула $x \supset y$, а высказыванию «Если тротуары сухие, то дождя нет» - формула $\bar{y} \supset \bar{x}$. Действительно, $\bar{y} \supset \bar{x} = \bar{\bar{y}} \vee \bar{x} = y \vee \bar{x} = x \supset y$. Таким образом, мы показали тождественность высказываний «Но A влечет не B » и « B влечет A ».

Содержание сложного высказывания зависит только от содержания простых высказываний, входящих в его состав, а также от вида его функции истинности. Математическим описанием содержания сложного высказывания является его функция истинности. Эту функцию принимаем в качестве естественнонаучного определения содержания сложного высказывания. Комбинируем элементарные сложные высказывания с любым содержанием. Это вытекает из полноты набора булевых функций, соответствующих элементарным сложным высказываниям. В качестве примера приведем три пары одинаковых по содержанию, но различных по форме высказываний (заметим, что это всегда можно сделать, отправляясь от каких-либо тождеств алгебры логики, вернее алгебры булевых функций, основанной на наборе, соответствующем набору всех элементарных сложных высказываний).

Пример 3. Докажем тождественность следующих высказываний:

1) «мы нагреваем стержень» - A; «Длина стержня увеличивается» - B. Покажем, что тождественными являются следующие сложные высказывания, составленные из данных простых высказываний A и B: «Когда мы нагреваем стержень, тогда и длина стержня увеличивается»; «Если мы нагреваем стержень, то длина стержня увеличивается». В общем виде данные сложные высказывания запишутся: «Когда A, тогда и B»; «Если A, то B». Нетрудно видеть, что функцией истинности обоих высказываний является импликация $\mathbf{z = x \supset y}$. Следовательно, данные сложные высказывания тождественны;

2) Даны простые высказывания: «На светофоре горит зеленый свет» - A; «Переход улицы разрешен» - B. Покажем, что следующие сложные высказывания являются тождественными: «Если и только если на светофоре горит зеленый свет, то переход улицы разрешен» и «Зеленый свет светофора равносилен разрешению перехода улицы». Запишем данные высказывания в общем виде: «Если и только если A, то B», «A равносильно B». Очевидно, что функцией истинности обоих высказываний является эквиваленция $z = x \sim y$. Следовательно, эти высказывания тождественны;

3) Даны простые высказывания: «Студент сдал сессию на «отлично»» - A; «У него хорошее настроение» - B. Тождественными будут следующие сложные высказывания: «Студент сдал сессию на «отлично». У него хорошее настроение»; «Студент сдал сессию на «отлично», а также у него хорошее настроение». Поскольку функция истинности обоих высказываний описывается конъюнкцией $z = xy$, данные высказывания тождественны.

2. Задача Кейслера

Выше мы показали, каким образом можно описывать сложные высказывания, переходя от текстовой интерпретации высказываний к формулам. Рассмотрим теперь, как, оперируя формулами высказываний, можно чисто формальными методами решать некоторые логические задачи. Рассмотрим одну из таких задач, предложенную американским логиком Кейслером.

Задача Кейслера. Браун, Джонс и Смит обвиняются в подделке сведений о доходах, подлежащих налоговому обложению. Под присягой они дают следующие показания: Браун: «Джонс виновен, а Смит невиновен»; Джонс: «Если Браун виновен, то виновен и Смит»; Смит: «Я не виновен, но хотя бы один из них двоих виновен». Рассмотрим решение данной задачи, ответив последовательно на следующие четыре вопроса:

1. Определить, совместимы ли показания всех троих обвиняемых? Для ответа на этот вопрос введем истинностные переменные для простых высказываний:

«Браун виновен» - $\mathbf{x}$, «Джонс виновен» - y,

«Смит виновен» - z.

Далее записываем формулы высказываний обвиняемых:

Браун - $y\bar{z}$; Джонс - $x \supset z$; Смит - $\bar{z}(x \vee z)$.

Высказывания совместимы, если конъюнкция их функций истинности не равна тождественно нулю. Записываем конъюнкцию высказываний обвиняемых:

$$y\bar{z}(x \supset z)\bar{z}(x \vee z) .$$

Производим упрощение полученной формулы:

$$y\bar{z}(\bar{x} \supset z)\bar{z}(x \vee y) =$$

$$= y\bar{z} \wedge (\bar{x}x \vee \bar{x}y \vee xz \vee yz) = \bar{x}y\bar{z} \vee xyz\bar{z} \vee yz\bar{z} = \bar{x}y\bar{z} .$$

Поскольку функция истинности не равна тождественно нулю, высказывания обвиняемых совместимы.

2. Предполагая, что высказывания обвиняемых верны, определить, кто виновен, а кто невиновен? Поскольку показания обвиняемых считаем правдивыми, можно записать следующие уравнения: $y\bar{z} = 1$, $x \supset z = 1$, $\bar{z}(x \vee y) = 1$. Из первого уравнения находим $y = 1$, $\bar{z} = 1$, $z = 0$. Это значит, что Джонс виновен, а Смит невиновен. Подставим найденное значение переменной z во второе уравнение: $x \supset 0 = 1$ или $x \vee 0 = 1$, т.е. $\bar{x} = 1$, $x = 1$. Таким образом, Браун невиновен.

3. Если все трое невиновны, то кто совершил лжесвидетельство? Исходя из предложения невиновности всех обвиняемых, имеем уравнения: $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = 1$, $\bar{z} = 1$, т.е. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Подставляем эти значения в высказывания обвиняемых:

Браун: $y\bar{z} = 0$. $\bar{0} = 0$, таким образом, высказывание Брауна ложно;

Джонс: $x \supset z = 0 \quad 0 = 1$, т.е. высказывание Джонса истинно;

Смит: $\bar{z}(x \vee y) = \bar{0}(0 \vee 0) = 0$, высказывание Смита ложно.

Таким образом, получается, что Браун и Смит совершили лжесвидетельство.

Полученный результат выглядит странно: невиновные солгали, а виновный говорит правду, что маловероятно.

4. Если невиновный говорит правду, а виновный лжет, то кто виновен, а кто невиновен? Будем считать, что истинность показаний каждого обвиняемого равносильна его невиновности, а ложность – виновности.

Тогда решение задачи сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} y\bar{z} = \bar{x}, \\ (x \supset z) = \bar{y}, \\ \bar{z}(x \vee y) = \bar{z}. \end{cases}$$

Приведем эти уравнения к каноническому виду:

$$\begin{cases} y\bar{z} \sim \bar{x} = 1, \\ (x \supset z) \sim \bar{y} = 1, \\ \bar{z}(x \vee y) \sim \bar{z} = 1. \end{cases}$$

Полученную систему уравнений запишем в виде одного канонического уравнения, решив которое, найдем, кто виновен, а кто невиновен:

$$(y\bar{z} \sim \bar{z})((x \supset z) \sim y)(\bar{z}(x \vee y) \sim \bar{z}) = 1.$$

Для упрощения решения данного уравнения избавимся от знаков $\supset$ и $\sim$, используя тождества:

$$x \supset y = \bar{x} \vee y\,,\ x \sim y = \bar{x}\,\bar{y} \vee xy\,.$$

Затем приведем левую часть формулы к СДНФ. Заметим, что для решения уравнения можно было бы просто составить таблицу значений булевой функции, стоящей в его левой части, а затем перейти от таблицы к формуле.

$$(y\bar{z} \sim \bar{x})((x \supset z) \sim \bar{y})(\bar{z}(x \vee y) \sim \bar{z}) = 1,$$

$$(\overline{y\bar{z}}\, x \vee y\,\bar{z}\,\bar{x})(\overline{\bar{x} \vee z}\, y \vee (\bar{x} \vee z)\bar{y}) \wedge$$

$$\wedge \overline{\bar{z}(x \vee y)}\, z \vee \bar{z}(x \vee y)\bar{z} = 1,$$

$$((\bar{y} \vee z)\, x \vee y\,\bar{z}\,\bar{x})(x\,\bar{z}y \vee (\bar{x} \vee z)\bar{y}) \wedge$$

$$\wedge((z \vee \bar{x}\,\bar{y})z \vee \bar{z}(x \vee y) = 1,$$

$$(x\bar{y} \vee xz \vee \bar{x}y\bar{z})(xy\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}z) \wedge$$

$$\wedge(z \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee x\bar{z} \vee y\,\bar{z}) = 1,$$

$$xy\bar{y}\,\bar{z} \vee x\bar{x}\,\bar{y} \vee x\bar{y}z \vee xyz\bar{z} \vee x\bar{x}\,\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee x\bar{x}y\bar{z} \vee$$

$$\bar{x}y\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{y}\,\bar{z}z)(z \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee x\bar{z} \vee y\bar{z}) = 1,$$

$$x\bar{y}z(z \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee x\bar{z} \vee y\bar{z}) = 1,$$

$$x\bar{y}z \vee x\bar{x}\,\bar{y}z \vee x\bar{y}z\bar{z} \vee x\bar{y}yz\bar{z} = 1,$$

$$x\bar{y}z = 1.$$

Находим корни полученного уравнения: $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

Таким образом, мы получили следующее решение: Браун и Смит виновны, а Джонс невиновен. Как видим, данный результат противоречит решению, полученному на второй вопрос задачи в предложении, что показания обвиняемых правдивы. Это значит, что виновные своими показаниями пытались отвести обвинение от себя и взвалить его на невиновного.

Выводы

В статье проанализирован логический подход к формульному описанию произвольных сложных высказываний. Предложен подход описания сложных высказываний при переходе от текстовой интерпретации высказываний к формулам. Показано, как оперируя формулами высказываний, можно формальными методами решать некоторые логические задачи.

Список литературы

1. Лещинский, В.А. О логической идентификации начальных математических понятий [Текст] / В.А. Лещинский // Системы обработки информации. – Х.: ХУПС, 2013. – Вип. 6 (113). – С. 174-177.

2. Карпенко, А.С. Современные исследования в философской логике [Текст] / А.С. Карпенко // Логические исследования. - М.: Наука, 2003. - Вып. 10. - С. 61-93.

3. Герасимов, А.С. Курс математической логики и теории вычислимости [Текст] / А.С. Герасимов. - СПб.: ЛЕМА, 2011. – 284 с.

Поступила в редколлегию 2.03.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ПРО ФОРМУЛЬНИЙ ЗАПИС СКЛАДНИХ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

В.О. Лещінський, І.О. Лещінська

У роботі розглядається логічний підхід до формульному опису довільних складних висловлювань, що виражає його функцію істинності. Показано, яким чином можна описувати складні висловлювання, переходячи від текстової інтерпретації висловлювань до формул. На прикладі задачі Кейслера розглядається, як, оперуючи формулами висловлювань, можна формальними методами вирішувати деякі логічні задачі.

Ключові слова: *логічна формалізація, складні висловлювання, операції з висловлюваннями, функція істинності, істинна змінна.*

ABOUT THE DIFFICULT EXPRESSIONS RECORD AS FORMULAS

V.A. Leschinsky, I.A. Leschinska

The logical going is in-process examined near record as formulas of arbitrary difficult expressions, expressing his function of truth. It is shown how it is possible to describe difficult expressions, going across from text interpretation of expressions to the formulas. On the example of Keysler task is examined, as, operating the formulas of expressions, it is possible formal methods to decide some logical tasks.

Keywords: *logical formalization, difficult expressions, operations with expressions, function of truth, truth variable.*