УДК 621.396.96

В.В. Прокопенко

Національна Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ МАЛИХ ЗБУРЕНЬ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ТА АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК РУХУ БАЛІСТИЧНОГО ТІЛА

З використанням методу лінійних збурень запропоновано методику інтегрування системи диференціальних рівнянь руху центра інерції балістичного тіла. Сила лобового опору повітря, присутність якої в рівняннях руху перетворює їх на суттєво нелінійні, подається у вигляді квадратичного тричлена відносно безрозмірного параметра – числа Маха, з невідомими коефіцієнтами. В лінійному наближенні отримано вирази компонент вектора швидкості руху для траєкторії в атмосферних умовах (реальна траєкторія), а також вказано спосіб обчислення варіацій дальності та повного часу польоту. Розвинуто спосіб знаходження аеродинамічних коефіцієнтів з допомогою даних, отриманих шляхом вимірювання кінематичних характеристик польоту балістичного тіла, та застосування методу диференціальної корекції.

Ключові слова: *математичне моделювання, балістичне тіло, апроксимаційні методи, метод малих збурень, функція лобового опору, нормальні рівняння руху, кінематичні характеристики руху, задача Коші, число Маха, ітераційний процес, метод диференціальної корекції.*

Вступ

Постановка проблеми в загальному вигляді, її зв'язок з науково-практичними завданнями, аналіз досліджень і публікацій з даної проблематики. Проектування артилерійських систем передбачає значний обсяг попередніх балістичних розрахунків, спрямованих на визначення елементів траєкторії. Рух снаряда в атмосфері в основному визначається дією двох сил: сила тяжіння і сила опору повітря [1 – 3]. Сила опору повітря може бути виміряною для різних значень швидкостей в аеродинамічній трубі або іншим відповідним способом, основним з яких є методи теорії подібності і розмірності, яка лежить в основі фізичного моделювання [4, 6]. Опис складного процесу польоту з використанням відповідних математичних моделей передбачає нехтування низкою факторів або їх ввід в рівняння моделі деякими усередненими значеннями. Але в реальності умови виконання бойових стрільб значно відрізняються від розрахункових, тому важливим видається внесення уточнюючих поправок для адекватної оцінки кінематичних параметрів, що визначають рух снаряду в реальних умовах атмосфери.

Більшість робіт, присвячених різноманітним аспектам зовнішньої балістики [1 – 5], передбачають використання методу малих поправок (або метод лінійних збурень) для оцінки змін елементів траєкторії снарядів сталої маси. Тому для практичного використання фахівців в галузі розрахунку балістичних траєкторій велике значення набувають відповідні чисельні методи [14], а також розвинені на їх основі підходи, які передбачають побудову тих чи інших ітераційних методів [15, 16]. В більшості випадків для складання таблиць стрільби цілком достатньо застосовувати спрощений варіант розгляду процесу руху снаряда, який передбачає урахування як домінуючої, сили лобового опору повітря [8 – 11]. Відомо, що для надзвукових швидкостей коефіцієнт лобового опору не буде сталим, а є функцією швидкості руху снаряда [1 – 3], який стрімко зростає при її збільшенні. Лише завдяки потужним обчислювальним комплексам можна виконувати теоретичні розрахунки на основі відповідно адаптованих нелінійних математичних моделей надзвукового руху снаряда, з допомогою якої можна розраховувати траєкторію в реальних умовах, тобто руху в повітрі.

Метою статті є визначення коректуючих поправок до балістичних траєкторій, значень варіацій дальності та часу польоту, а також коефіцієнтів, що детермінують функцію лобового опору на основі даних про перебіг вільного польоту снаряду в атмосферних умовах та залучення методики диференціальної корекції до побудови ітераційного процесу.

Основна частина

Розглянемо систему диференціальних рівнянь руху центра інерції балістичного тіла у вигляді

$$\ddot{x} = -\rho\frac{v\dot{x}K_D}{C}; \quad \ddot{y} = -g - \rho\frac{v\dot{y}K_D}{C}, \qquad (1)$$

де C – балістичний коефіцієнт снаряда, $C = m / d^2$; m – маса снаряду; ρ – вагова густина повітря (в першому наближенні вважаємо сталою); $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ – значення швидкості в довільний момент часу; x, y – елементи траєкторії; g – прискорення сили тяжіння; K_D – коефіцієнт осьового опору (безрозмірна величина).

В системі рівнянь (1) коефіцієнт K_D є певною функцією швидкості руху снаряду [1 – 3], тобто $K_D = K_D\left(v(t)/a\right) = K_D\left(M(t)\right) = K_D(t)$, яка має назву функції опору; $M(t) = v(t)/a$ – безрозмірне число Маха; a – місцева швидкість звуку (надалі в розрахунках покладатимемо $a = 341$ м/с.

Нормальні рівняння руху системи (1) є складними для інтегрування внаслідок присутності членів, залежних від сили опору повітря; ці складові рівнянь невідомі, доки не розв'язана відповідно поставлена задача Коші для системи (1) визначення кінематичних характеристик траєкторії руху – x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, тобто пряма задача зовнішньої балістики. Отже постає обернена задача визначення величини K_D; вона залежить від багатьох безрозмірних параметрів, однак, як свідчать результати багаточисельних досліджень [1 – 9], в основному цей коефіцієнт залежить від форми снаряду і введеного раніше числа Маха.

Дослідженнями, представленими в працях [7, 10, 11], встановлено, що сила лобового опору в загальному може бути поданою у такому вигляді:

$$K_D = K_D\left(M(t)\right) = a_0 + a_1 M + a_2 M^2. \tag{2}$$

В залежності (2) коефіцієнти a_0, a_1, a_2 – невідомі і мають бути визначеними тим чи іншим способом. Отже, розв'язок системи (1) є функціями часу t і коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, тобто $u = u(t, a_0, a_1, a_2)$; $w = w(t, a_0, a_1, a_2)$, тому розв'язок в лінійному наближенні можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}\xi(t,a_0,a_1,a_2) &= \xi(t,0,0,0) + \\ &+\left[\frac{\partial \xi(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_0}\right]\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} a_0 + \\ &+\left[\frac{\partial \xi(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_1}\right]\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} a_1 + \\ &+\left[\frac{\partial \xi(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_2}\right]\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} a_2 \quad (\xi = u, w).\end{aligned} \tag{3}$$

Диференціюючи кожне з рівнянь системи (1) по параметрах a_0, a_1, a_2, та беручи до уваги симетричність рівнянь без урахування в правій частині другого рівняння члена g, якому відповідає тривіальний розв'язок $w_g = -gt$ (не порушуючи при цьому загальності) отримуємо для першого рівняння відносно горизонтальної складової швидкості u:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a_0}\left[\frac{\partial u(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial t}\right] = -\rho\frac{uv}{C} - \\ &-\rho\frac{K_D(M)}{C}\left[v(t,a_0,a_1,a_2)\frac{\partial u(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_0} + \right. \\ &\left. + u(t,a_0,a_1,a_2)\frac{\partial v(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_0}\right]; \\ &\frac{\partial}{\partial a_1}\left[\frac{\partial u(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial t}\right] = -\rho\frac{uv}{C}M - \\ &-\rho\frac{K_D(M)}{C}\left[v(t,a_0,a_1,a_2)\frac{\partial u(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_1} + \right. \\ &\left. + u(t,a_0,a_1,a_2)\frac{\partial v(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_1}\right]; \\ &\frac{\partial}{\partial a_2}\left[\frac{\partial u(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial t}\right] = -\rho\frac{uv}{C}M^2 - \\ &-\rho\frac{K_D(M)}{C}\left[v(t,a_0,a_1,a_2)\frac{\partial u(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_2} + \right. \\ &\left. + u(t,a_0,a_1,a_2)\frac{\partial v(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_2}\right];\end{aligned} \tag{4}$$

пророблюючи аналогічні дії над другим рівнянням системи (1), отримуємо відповідні представлення для величин

$$\frac{\partial w(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_0}; \quad \frac{\partial w(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_1}; \quad \frac{\partial w(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_2}.$$

Змінюючи в отриманому представленні (4) порядок диференціювання, покладаючи при цьому $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ і позначаючи

$$\frac{\partial u(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_0}\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} = \delta u_{a_0};$$

$$\frac{\partial u(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_1}\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} = \delta u_{a_1};$$

$$\frac{\partial u(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_2}\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} = \delta u_{a_2}$$

перепишемо залежності (4) у вигляді

$$\delta\dot{u}_{a_0} = -\rho\frac{u(t,0,0,0)v(t,0,0,0)}{C};$$

$$\delta\dot{u}_{a_1} = -\rho\frac{u(t,0,0,0)v^2(t,0,0,0)}{Ca};$$

$$\delta\dot{u}_{a2} = -\rho\frac{u(t,0,0,0)v^3(t,0,0,0)}{Ca^2};$$

але, внаслідок того, що
$u(t,0,0,0) = u_0$, $w(t,0,0,0) = w_0$, $v(t,0,0,0) = v_0$,
матимемо

$$\delta\dot{u}_{a_0} = -\rho\frac{u_0v_0}{C}, \delta\dot{u}_{a_1} = -\rho\frac{u_0v_0^2}{Ca}, \delta\dot{u}_{a2} = -\rho\frac{u_0v_0^3}{Ca^2};$$
$$\delta\dot{w}_{a_0} = -\rho\frac{w_0v_0}{C}, \delta\dot{w}_{a_1} = -\rho\frac{u_0v_0^2}{Ca}, \delta\dot{w}_{a2} = -\rho\frac{w_0v_0^3}{Ca^2}. \quad (5)$$

З огляду на початкові умови, тобто при $t = 0$, має місце:

$$x(0,a_0,a_1,a_2) = x_0;$$
$$\dot{x}(0,a_0,a_1,a_2) = u_0(0,a_0,a_1,a_2) = 0;$$
$$y(0,a_0,a_1,a_2) = 0;$$
$$\dot{y}(0,a_0,a_1,a_2) = w_0(0,a_0,a_1,a_2) = 0,$$

тому

$$\delta\dot{x}(0,a_0,a_1,a_2) = \delta u(0,a_0,a_1,a_2) = 0;$$
$$\delta\dot{y}(0,a_0,a_1,a_2) = \delta w(0,a_0,a_1,a_2) = 0$$

і з рівнянь (5) матимемо

$$\delta u_{a_0} = -\rho\frac{u_0v_0}{C}t, \delta u_{a_1} = -\rho\frac{u_0v_0^2}{Ca}t, \delta u_{a2} = -\rho\frac{u_0v_0^3}{Ca^2}t;$$
$$\delta w_{a_0} = -\rho\frac{w_0v_0}{C}t, \delta w_{a_1} = -\rho\frac{u_0v_0^2}{Ca}t, \delta w_{a2} = -\rho\frac{w_0v_0^3}{Ca^2}t. \quad (6)$$

Звідси на основі подання (3) з урахуванням співвідношень (6) дістаємо розв'язок системи рівнянь (1) в лінійному наближенні (для вертикальної компоненти швидкості додається також складова $w_g = -gt$:

$$u(t,a_0,a_1,a_2) = u_0 - \rho\frac{u_0v_0}{C}\left(a_0 + a_1M_0 + a_2M_0^2\right)t;$$
$$w(t,a_0,a_1,a_2) = w_0 - gt - \rho\frac{w_0v_0}{C}\left(a_0 + a_1M_0 + a_2M_0^2\right)t. \quad (7)$$

Отже, у частковому випадку лінійного наближення залежність (7) визначається лінійними членами в розкладі компонент швидкості в ряд Тейлора по часу t (відповідно для складових вектора переміщень лінійними і квадратичними членами), а при розкладі по коефіцієнтах a_0, a_1, a_2 наявні сталі і лінійні члени.

В задачах балістики, а також питання, які постають в процесі ведення стрільб, зазвичай особливого значення варіації координат x та y вздовж траєкторії не становлять, а цікавими є їх варіації в кінцевій точці траєкторії з метою, щоб зробити можливим оцінку варіації дальності D і повного часу польоту T. Для прикладу, виконаємо варіацію часу польоту для певної визначеної дальності D. Час T в цьому випадку визначається з розв'язку трансцендентного рівняння

$$x(T,a_0,a_1,a_2) = D. \quad (8)$$

Для заданого значення D час T є функцією параметрів a_0, a_1, a_2, тобто $T = T(a_0,a_1,a_2)$; зокрема, коли опір атмосфери відсутній, тобто $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, то з розв'язку рівнянь руху в безповітряному просторі [18] матимемо $T = T_0 = \dfrac{D}{v_0\cos\theta_0}$ (θ_0 – кут підвищення). Диференціюючи залежність (8) послідовно по параметрах a_0, a_1, a_2, отримуємо:

$$\frac{\partial x}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial a_0} + \frac{\partial x}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial x}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial a_1} + \frac{\partial x}{\partial a_1} = 0;$$
$$\frac{\partial x}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial a_2} + \frac{\partial x}{\partial a_2} = 0.$$

Покладаючи в отриманих залежностях коефіцієнти в поданні (2) рівними нулю і позначаючи відповідно

$$\left.\frac{\partial T(a_0,a_1,a_2)}{\partial a_i}\right|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} = \delta T_{a_i};$$

$$\left.\frac{\partial x(t,a_0,a_1,a_2)}{\partial a_i}\right|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} = \delta x_{a_i}; \quad i = 0,1,2,$$

приходимо до співвідношень

$$\delta T_{a_i} = -\frac{\delta x_{a_i}}{\dot{x}} \quad (i = 0,1,2). \quad (9)$$

Використавши перше з співвідношень (7) приходимо до залежності для горизонтальної складової траєкторії:

$$x(t,a_0,a_1,a_2) = u_0t - \rho\frac{u_0v_0}{2C}\left(a_0 + a_1M_0 + a_2M_0^2\right)t^2,$$

звідки варіація координати x відносно параметрів, які визначають функцію лобового опору повітря, буде:

$$\delta x_{a_0} = -\rho\frac{u_0v_0}{2C}T_0^2; \quad \delta x_{a_1} = -\rho\frac{u_0v_0M_0}{2C}T_0^2;$$
$$\delta x_{a_1} = -\rho\frac{u_0v_0M_0^2}{2C}T_0^2; \quad \dot{x} = u_0,$$

тому для варіацій часу польоту T відносно параметрів a_0, a_1, a_2 матимемо:

$$\delta T_{a_0} = -\frac{-\rho\frac{u_0v_0}{2C}T_0^2}{u_0} = \rho\frac{v_0}{2C}T_0^2 = \frac{\rho}{2Cv_0\cos^2\theta_0}D^2;$$

$$\delta T_{a_1} = -\frac{-\rho\frac{u_0v_0M_0}{2C}T_0^2}{u_0} = \rho\frac{v_0M_0}{2C}T_0^2 = \frac{\rho M_0}{2Cv_0\cos^2\theta_0}D^2;$$

$$\delta T_{a_1} = -\frac{-\rho\frac{u_0v_0M_0^2}{2C}T_0^2}{u_0} = \rho\frac{v_0M_0^2}{2C}T_0^2 =$$

$$= \frac{\rho M_0^2}{2Cv_0 \cos^2 \theta_0} D^2 .$$

Враховуючи розклад функції $T = T(a_0, a_1, a_2)$ в околі незбуреної атмосферної області, тобто за умови $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$

$$T(a_0, a_1, a_2) = T(0,0,0) +$$

$$+\left[\frac{\partial T(a_0, a_1, a_2)}{\partial a_0}\right]\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} a_0 + \left[\frac{\partial T(a_0, a_1, a_2)}{\partial a_1}\right]\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} a_1 +$$

$$+\left[\frac{\partial T(a_0, a_1, a_2)}{\partial a_2}\right]\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} a_2 =$$

$$= T_0 + \delta T_{a_0} a_0 + \delta T_{a_1} a_1 + \delta T_{a_2} a_2 ,$$

остаточно дістанемо лінійне наближення варіації часу польоту

$$T = \frac{D}{v_0 \cos\theta_0} + \frac{\rho D^2}{2Cv_0 \cos^2 \theta_0}\left(a_0 + a_1 M_0 + a_2 M_0^2\right). \quad (10)$$

Далі розглянемо процедуру обчислення варіації дальності польоту D для певного очікуваного часу польоту T_0. З цією метою розглянемо трансцендентне рівняння виду

$$T(D, a_0, a_1, a_2) = T_0 . \quad (11)$$

Зрозуміло, що для визначеного часу T дальність є функцією параметрів a_0, a_1, a_2, тобто $D = D(a_0, a_1, a_2)$; за умови відсутності опору повітря траєкторією є крива, близька до параболи; отже, якщо використати розв'язок, який визначає рух балістичного тіла в безповітряному просторі , який згідно класичних результатів [2] має вигляд

$$x = v_0 t \cos\theta_0 ; \quad y = v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g t^2 , \quad (12)$$

то похибка буде невеликою. Тому в умовах безповітряного простору згідно залежностей (12) маємо значення для максимальної дальності $D_0 = v_0^2 \sin 2\theta_0 / g$. Послідовно диференціюючи залежність (11) по параметрах a_0, a_1, a_2, дістаємо:

$$\frac{\partial T}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_0} + \frac{\partial T}{\partial a_0} = 0 ; \quad \frac{\partial T}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_1} + \frac{\partial T}{\partial a_1} = 0 ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_2} + \frac{\partial T}{\partial a_2} = 0 .$$

Якщо в отриманих співвідношеннях покласти $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ і позначити

$$\frac{\partial D(a_0, a_1, a_2)}{\partial a_0}\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} = \delta D_{a_0} ;$$

$$\frac{\partial D(t, a_0, a_1, a_2)}{\partial a_1}\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} = \delta D_{a_1} ;$$

$$\frac{\partial D(t, a_0, a_1, a_2)}{\partial a_2}\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} = \delta D_{a_2} ;$$

$$\frac{\partial T(a_0, a_1, a_2)}{\partial D}\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} = \delta T_D ,$$

то приходимо до залежностей

$$\delta D_{a_0} = -\frac{\delta T_{a_0}}{\delta T_D} ; \ \delta D_{a_1} = -\frac{\delta T_{a_1}}{\delta T_D} ; \ \delta D_{a_2} = -\frac{\delta T_{a_2}}{\delta T_D} . \quad (13)$$

Записуючи розклад функції $D = D(a_0, a_1, a_2)$ в околі нуля

$$D(a_0, a_1, a_2) = D(0,0,0) +$$

$$+\left[\frac{\partial D(a_0, a_1, a_2)}{\partial a_0}\right]\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} a_0 +$$

$$+\left[\frac{\partial D(a_0, a_1, a_2)}{\partial a_1}\right]\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} a_1 +$$

$$+\left[\frac{\partial D(a_0, a_1, a_2)}{\partial a_2}\right]\Bigg|_{\substack{a_0=0,\\ a_1=0,\\ a_2=0}} a_2 ,$$

або з урахуванням введених позначень

$$D(a_0, a_1, a_2) = D_0 + \delta D_{a_0} a_0 + \delta D_{a_1} a_1 + \delta D_{a_2} a_2 ,$$

та беручи до уваги залежність (10), згідно якої $\delta T = 1/(v_0 \cos\theta_0)$, а також значення варіацій дальності по параметрах функції лобового опору δD_{a_i} $(i = 0,1,2)$, які з урахуванням співвідношень (13), є

$$\delta D_{a_0} = -\frac{\delta T_{a_0}}{\delta T_D} = -\frac{\rho \frac{v_0}{2C} T_0^2}{\frac{1}{v_0 \cos\theta_0}} = -\rho \frac{v_0^2 \cos\theta_0}{2C} T_0^2 ;$$

$$\delta D_{a_1} = -\frac{\delta T_{a_1}}{\delta T_D} = -\frac{\rho \frac{v_0 M_0}{2C} T_0^2}{\frac{1}{v_0 \cos\theta_0}} = -\rho \frac{v_0^2 M_0 \cos\theta_0}{2C} T_0^2 ;$$

$$\delta D_{a_2} = -\frac{\delta T_{a_2}}{\delta T_D} = -\frac{\rho \frac{v_0 M_0^2}{2C} T_0^2}{\frac{1}{v_0 \cos\theta_0}} = -\rho \frac{v_0^2 M_0^2 \cos\theta_0}{2C} T_0^2 ,$$

дістанемо остаточний вираз для лінійного наближення дальності польоту в умовах наявності опору повітря

$$D = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} - \rho \frac{v_0^2 \cos\theta_0}{2C} T_0^2 \left(a_0 + a_1 M_0 + a_2 M_0^2 \right). \quad (14)$$

Аналіз отриманих залежностей (10) – (14) лінійного наближення кінематичних елементів траєкторії руху балістичного тіла вказує на те, що поставлена задача переходить в площину визначення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, які детермінують функцію лобового опору повітря. Переважно залежність типу (2), але виражену в іншій формі, визначають дослідним шляхом для бойових зарядів типової форми [10]. Синтез теоретичних досліджень видатних вчених і артилеристів, а також результатів проведених балістичних стрільб дав змогу отримати залежності коефіцієнта лобового опору від числа Маха, які в значній мірі визначаються особливостями обтікання рухомого тіла набігаючим потоком повітря.

В роботі [19] запропоновано підхід до знаходження у замкнутій формі аеродинамічних коефіцієнтів з допомогою даних, отриманих шляхом моніторингу перебігу вільного польоту, шляхом побудови ітераційного процесу на основі процедури диференціальної корекції. Застосуємо апробовану в даній роботі методику на випадок руху балістичного тіла в умовах дії сили лобового опору вираженої у вигляді (2). Виконаємо наступні дії над рівняннями нормальної системи (1): додамо почленно обидві частини цих рівнянь; в результаті дістанемо:

$$\ddot{x} + \ddot{y} = -g - \rho \frac{vK_D}{C} (\dot{x} + \dot{y});$$

позначаючи при цьому $\dot{x} + \dot{y} = z$, приходимо до нелінійного рівняння вигляду

$$\dot{z} + \rho \frac{vK_D}{C} z = -g,$$

або, з урахуванням подання (2), маємо:

$$\dot{z} + \omega \left(a_0 \frac{v}{a} + a_1 \frac{v^2}{a^2} + a_2 \frac{v^3}{a^3} \right) z = -g, \quad (15)$$

де $\omega = \rho \cdot a / C$.

Рівняння (15) є нелінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку з початковою умовою

$$z(0) = u_0 + w_0. \quad (16)$$

Використовуючи методику, розвинену в праці [22], поставимо задачу визначення трьох аеродинамічних параметрів a_0, a_1, a_2, зав'язані на крайову задачу (15), (16), за критерієм мінімізації величини

$$S_z = \sum_{i=1}^{n} \left[z_{\exp}(t_i) - z_{cal}(t_i) \right]^2. \quad (17)$$

В контексті сформульованої задачі Коші (15), (16) відповідно до критерію (17), величина z є сумою компонент вектора швидкості, яка є функцією від поточного моменту часу при русі тіла вздовж траєкторії; t_i – дискретні моменти повного часу тривалості польоту, які фіксуються з певною точністю, визначеною можливістю застосовуваної апаратури, з допомогою відповідних радарних систем; індекси «exp» та «cal» відповідно означають експериментально заміряні та пораховані на основі вибраного чисельного алгоритму значення величини z у вказані моменти часу. Якщо проінтегрувати обидві частини рівняння (15) в межах від 0 до деякого значення t_i, яке вважається відомим, тобто піддається вимірюванню в процесі вільного польоту, дістанемо стартові значення величини z:

$$z(t_i) = u_0 + w_0 - gt_i - \\ -\omega \int_0^{t_i} \left(a_0 \frac{v}{a} + a_1 \frac{v^2}{a^2} + a_2 \frac{v^3}{a^3} \right) z(t)\, dt. \quad (18)$$

Отримане рівняння (18) еквівалентне рівностям (15), (16), тобто вихідній крайовій задачі Коші, і є інтегральним рівнянням, оскільки невідома функція $z(t)$ перебуває в ньому під знаком інтеграла.

Особливість отриманого представлення (18) є наявність під знаком інтеграла функції швидкості v в довільний момент часу t, яку треба виразити через значення шуканої функції z. Використаємо алгоритм, заснований на побудові рекурентної монотонної послідовності [21]; згідно даного алгоритму добування кореня квадратного з додатного числа $u^2 + w^2$, як початкове наближення для значення v візьмемо

$$v \cong \left(z_0 + \left(u^2 + w^2 \right) / z_0 \right) / 2 =$$

$$= \left(z_0 + \left(u^2 + w^2 + 2uw - 2uw \right) / z_0 \right) / 2 =$$

$$= \left(z_0 + \left((u+w)^2 - 2uw \right) / z_0 \right) / 2 \cong$$

$$\cong \left(z_0 + \left((u+w)^2 - 2u_0 w_0 \right) / z_0 \right) / 2,$$

звідки для швидкості v матимемо подання

$$v \cong (Z_0 + z)/2, \quad (19)$$

де $Z_0 = z_0 - \dfrac{2 \cdot u_0 / w_0}{1 + u_0 / w_0} = z_0 - \dfrac{2\mathrm{ctg}\theta_0}{1 + \mathrm{ctg}\theta_0}$.

Тому, з урахуванням залежності (19), диференціальне рівняння (15), перепишемо у вигляді

$$\dot{z} + \omega \left(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 \right) z = -g, \quad (20)$$

де коефіцієнти $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, які водночас виражені через аеродинамічні параметри a_0, a_1, a_2, подано як:

$$\alpha_0(a_0, a_1, a_2) = \frac{Z_0}{2} \left(a_0 + \frac{a_1}{2a} Z_0 + \frac{a_2}{4a^2} Z_0^2 \right);$$

$$\alpha_1(a_0, a_1, a_2) = \frac{1}{2} \left(a_0 + \frac{a_1}{2a} Z_0 + \frac{3a_2}{4a^2} Z_0^2 \right);$$

$$\alpha_2(a_0,a_1,a_2) = \frac{1}{4a^2}\left(a_1 + \frac{3a_2}{2a}Z_0\right);$$

$$\alpha_3(a_0,a_1,a_2) = \frac{a_2}{8a^3}.$$

Беручи до уваги вигляд рівняння (20), стартове значення функції z, поданої залежністю (18), перепишемо у вигляді

$$z(t_i) = u_0 + w_0 - gt_i - \omega\alpha_0(a_0,a_1,a_2)\int_0^{t_i} z(t)dt -$$
$$-\omega\alpha_1(a_0,a_1,a_2)\int_0^{t_i} z^2(t)dt - \omega\alpha_2(a_0,a_1,a_2)\int_0^{t_i} z^3(t)dt -$$
$$-\omega\alpha_3(a_0,a_1,a_2)\int_0^{t_i} z^4(t)dt. \qquad (21)$$

Розклад в ряд Тейлора розв'язку крайової задачі Коші (15), (16), використовуючи при цьому як початкове наближення залежність (21), має вигляд

$$z_{cal}(t_i) = z_{cal}(t_i)_0 + \sum_{j=0}^{2}\left(\frac{\partial z}{\partial a_j}\right)_i \Delta a_j, \; i = \overline{1,n}, \qquad (22)$$

де $z_{cal}(t_i)_0$ – значення величини z, яка дається виразом (22), як функції в дискретні моменти часу t_i в припущенні нульових наближень трьох шуканих сталих a_0, a_1, a_2; Δa_j – корекція ідентифікованих значень коефіцієнтів до вже наявних в даний момент часу. Беручи за початкове наближення коефіцієнтів $a_j(j = 0,1,2)$ нульові значення (тобто опір повітря відсутній матимемо: $z_{cal}(t_i)_0 = u_0 + w_0 - gt_i$. Тоді залежність (17), яка визначає суму квадратів відхилень в дискретні моменти часу, перепишеться так:

$$S_z = \sum_{i=1}^{n}\left[z_{exp}(t_i) - z_{cal}(t_i)\right]^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[z_{exp}(t_i) + gt_i - u_0 - w_0 - \sum_{j=0}^{2}\left(\frac{\partial z}{\partial a_j}\right)_i \Delta a_j\right]^2. \qquad (23)$$

Відповідно до методики диференціальної корекції [16], введемо в розгляд величини:

$$P_j = \frac{\partial z}{\partial a_j}; \quad \dot{P}_j = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial a_j}; \quad j = 0,1,2. \qquad (24)$$

Диференціюючи диференціальне рівняння (20) за змінними параметрами a_0, a_1, a_2, з урахуванням співвідношень (24), приходимо до таких трьох диференціальних рівнянь відносно функцій P_j:

$$\dot{P}_j + \beta P_j = -f_j(z), \; j = 0,1,2. \qquad (25)$$

У співвідношеннях (25) позначено:

$$\beta = \alpha_1\omega z + 2\alpha_2\omega z^2 + 3\alpha_3\omega z^3 +$$
$$+\omega\left(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3\right);$$

$$f_0(z) = \frac{z\omega}{2a}(z_0 + z); \; f_0(z) = \frac{z\omega}{4a^2}\left(z_0^2 + z_0 z + z^2\right);$$

$$f_0(z) = \frac{z\omega}{8a^3}\left(z_0^3 + 3z_0^2 z + 3z^3\right).$$

З огляду на подання (24), а також вираз (21), для введених функцій P_j мають місце нульові початкові умови, тобто

$$P_j = 0 \text{ при } t = 0, \; j = 0,1,2.$$

Отримані диференціальні рівняння виду (25) є лінійними диференціальними рівняннями, але зі змінними коефіцієнтами. Корекція Δa трьох аеродинамічних коефіцієнтів, які підлягають визначенню, отримуються з розв'язування матричного рівняння вигляду

$$(P)(\Delta A) = (B), \qquad (26)$$

де елементи матриць (P), (ΔA), (B) даються як

$$(P) = \{P_{jk}\}, \; P_{jk} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial z}{\partial a_j}\right)_i\left(\frac{\partial z}{\partial a_k}\right)_i;$$

$$(\Delta A) = \left(\Delta a_0^{(1)}, \Delta a_0^{(2)}, \Delta a_0^{(3)}\right)^T;$$

$$(B) = \{B_j\} B_j = \sum_{i=1}^{n}\left(z_{exp}(t_i) + gt_i - u_0 - w_0\right)\left(\frac{\partial z}{\partial a_j}\right)_i.$$

Процедура розв'язування матричного рівняння виду (26) є ітераційною і продовжується доти, поки не досягнуто обумовленої практичними міркуваннями точності.

Висновки

Звичайно, в задачі визначення траєкторії снаряду важливо враховувати його аеродинамічні характеристики, опір повітря як функції швидкості, швидкість вітру, кривизну Землі, зміну характеристик артилерійського ствола залежно від числа попередніх пострілів, метеорологічні та багато інших факторів [18]. Однак варто починати з розгляду параболічної траєкторії матеріальної точки в пустоті, де діє лише сила тяжіння, оскільки вивчення простої моделі, що володіє певними, але спорідненими властивостями оригінала, тобто реальної траєкторії, дає змогу відштовхнутись від висхідної точки для подальшого формулювання більш складніших моделей.

Комплекс проблем, які постають перед дослідниками процесів руху балістичних тіл в атмосфері, передбачає оперування з неточно виміряними величинами, або вимірюваннями, виконаними в умовах змінних і недостатньо детермінованих фізичних умовах; тому для перевірки надійності і отримання максимуму інформації з деякого фіксованого ряду даних, необхідно застосовувати відповідні методи чисельного аналізу [15, 16].

Список літератури

1. Коновалов А.А. Внешняя баллистика / А.А. Коновалов, Ю.В. Николаев. – М.: ЦНИИ инф., 1979. – 228 с.

2. Лысенко В.М. Баллистика ствольных систем. Справочная библиотека разработчика-исследователя / Л.Н. Лысенко, В.В. Грабин. – М.: Машиностроение, 2006. – 461 с.

3. Равдин И.Ф. Внешняя баллистика неуправляемых реактивных снарядов / И.Ф. Равдин. – М.: ВАА, 1972. – 184 с.

4. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лысенко. – М.: Машиностроение, 2005. – 607 с.

5. Лебедев А.А. Баллистика ракет / А.А. Лебедев, Н.Ф. Герасюта. – М.: Машиностроение, 1970. – 244 с.

6. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов / Ю.Г. Сихарулидзе. – М.: Наука, 1982. – 352 с.

7. Макєєв В.І. Математична модель просторового руху літального апарату на твердому паливі в атмосфері / В.І. Макєєв, М.М. Ляпа, Л.Д. Назаренко // Вісник СумДУ; (Серія технічні науки). – 2008. – № 2. – С. 5-12.

8. Грабчак В.І. Апроксимація функцій аеродинамічних коефіцієнтів сили опору повітря методом найменших квадратів / В.І. Грабчак // Військово-технічний збірник. – 2012. – № 2(7). – С. 20-24.

9. Грабчак В.І. Проблемні питання створення і формування стрільби артилерійських систем / В.І. Грабчак, П.І. Ванкевич, Є.Г. Іваник // Збірка доповідей (тез доповідей) науково-технічного семінару 27-28 березня 2013 р. «Перспективи розвитку ракетних військ і артилерії сухопутних військ», Львів. – 2013. – С. 120-122.

10. Розрахунок дериваційного відхилення літальних апаратів, що обертаються / [В.І. Макєєв, В.І. Грабчак, П.Є. Трофименко, Ю.І. Пушкарьов] // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2008. – Вип. 3(7). – С. 116-119.

11. Обоснование рациональной системы поправок при стрельбе активно-реактивными снарядами (минами) / В.И. Грабчак, В.И. Макеев, П.Е. Трофименко, Ю.И. Пушкарев // Артиллерийское и стрелковое вооружение. – 2009. – № 4. – С. 3-9.

12. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. / Н.Н. Бухгольц. – М.: Наука, 1972. – 282 с.

13. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1975. – 831 с.

14. Бабенко К.И. Основы численного анализа / К.И. Бабенко. – М.: Наука, 1986. – 744 с.

15. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1975. – 632 с.

16. Березин И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Наука, 1966. – 632 с.

17. .Гаврилюк І.П. Методи обчислень / І.П. Гаврилюк, В.Л. Макаров. – К.: Вища школа, 1995. – Ч. 1 – 452 с.; – Ч. 2. – 431 с.

18. Савкин Л.С. Метеорология и стрельба артиллерии / Л.С. Савкин, Б.Д. Лебедев. – М.: Воениздат, 1974. – 144 с.

19. Харитонов А. М. Техника и методы аэрофизического эксперимента. Ч.1. Аэродинамические трубы и газодинамические установки. / А. М. Харитонов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 220 с.

20. Карташев А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. – М.: Наука, 1980. – 288 с.

21. Chapman G.T. A method for extracting aerodynatic coefficients from free-flight data / G.T. Chapman, D.B. Kirk // AIAA Journal. – 19770. – V. 8, N 4. – P. 753-758.

22. Тихонов А.Н. Вводные лекции по прикладной математике / А.Н. Тихонов, Д.П. Костомаров. – М.: Наука, 1984. – 192 с.

Надійшла до редколегії 29.01.2016

Рецензент: д-р техн. наук, ст. наук. співр. А.М. Зубков, Національна Академія Сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ И АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВИЖЕНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

В.В. Прокопенко

С использованием метода линейных возмущений предложено методику интегрирования системы дифференциальных уравнений движения центра инерции баллистического тела. Сила лобового сопротивления воздуха, присутствие которой в уравнениях движения претворяет их на существенно нелинейные, представлено в виде квадратичного трехчлена относительно безразмерного параметра – числа Маха, с неизвестными коэффициентами. В линейном приближении получено выражения компонент вектора скорости движения для траектории в атмосферных условиях (реальная траектория), а также указан способ вычисления вариаций дальности и полного времени полета. Развит способ нахождения аэродинамических коэффициентов с помощью данных, полученных путем измерения кинематических характеристик полета баллистического тела.

Ключевые слова: *математическое моделирование, баллистическое тело, апроксимационные методы, метод малых возмущений, функция лобового сопротивления, нормальные уравнения движения, кинематические характеристики движения, задача Коши, число Маха, итерационный процесс, метод дифференциальной коррекции.*

THE USE OF THE SMALL EXCITEMENT METHOD TO CALCULATION OF THE KINEMATICAL AND AERODINAMICAL CHARACTERISTIC MOVEMENT OF BALLISTIC BODY

V.V. Prokopenko

With use of the method of linear stimulate the purpose integration of system differential equations moving of centre inertia of ballistic body is proposed. Force of head-resistance of air, being of which in equalizations of motion, changes them on substantially nonlinear, it is presented as quadratic trinomial in relation to a dimensionless parameter are numbers of Stroke, with unknown coefficients. In the linear approaching expressions are got component of vector of rate of movement for a trajectory in atmospheric terms (real trajectory), and also the method of calculation of variations of distance and complete block hours is indicated. The method of finding of aerodynamic coefficients is developed by information, kinematics descriptions of free flight got by measuring.

Keywords: *mathematical modelling, ballistic body, approximation methods, small excitement method, function of the frontal resistance, normal moving equations, kinematical characteristic of moving, Cauchy value problem, Mach number, iterative processes, differential correction procedure.*