УДК 621.3.015.38

Б.Т. Кононов, А.О. Мушаров, А.О. Нечаус

Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У ВИСОКОВОЛЬТНІЙ ТРИФАЗНІЙ ЕЛЕКТРИЧНІЙ МЕРЕЖІ

В статті обґрунтовується схема заміщення симетричної трифазної електричної мережі й диференціальні рівняння, що описують перехідні процеси, пояснюється метод перетворення матриць поперечних та повздовжніх параметрів трифазної лінії електропередачі до діагонального виду, що дозволяє розглядати процеси зміни напруг та струмів окремо для кожної з симетричних складових.

Ключові слова: *трифазна електрична мережа обладнана тросовим захистом, перехідні процеси, диференціальні рівняння, метод перетворення, власні числа та власні вектори.*

Вступ

При виконанні розрахунків перехідних процесів в високовольтних електричних мережах зазвичай використовують припущення щодо можливості представлення повітряної лінії електропередачі в вигляді відповідної схеми заміщення.

Це дає змогу, розглядаючи процеси, що відбуваються при передачі електричної енергії на значні відстані, складати відповідні диференціальні рівняння рівноваги напруг для тієї чи іншої схеми заміщення. При складанні системи диференціальних рівнянь рівноваги напруг трифазна повітряна лінія електропередачі, обладнана тросовим захистом від атмосферних перенапруг, може бути представлена власними активними та індуктивними опорами фазних провідників, взаємоіндуктивностями та ємностями між фазами й ємностями та активними провідностями між фазами та тросом.

Аналіз літератури. В відомій літературі [1] добре вивчені процеси передачі електричної енергії в однопровідній лінії, яка проходить над землею. Така лінія в [1] представляється електричним колом з розподіленими параметрами, значення яких визначається довжиною лінії та вважається, що активний опір, провідність, індуктивність та ємність рівномірно розподілені повздовж всієї довжини лінії. При визначенні просторово-часового розподілу величин струму в лінії $i(x,t)$ та напруги між проводами $u(x,t)$, де x – відстань від початку лінії до розглядаємої точки, а t – час, будемо вважати, що для трифазної лінії електропередачі можливо використовувати припущення, прийняті в [1] при складанні схем заміщення і рівнянь рівноваги напруг, але при цьому потрібно внести відповідні зміни, притаманні, власне, трифазній лінії електропередачі.

Мета статті. Обґрунтування диференціальних рівнянь трифазної електричної лінії електропередачі для аналізу перехідних процесів в високовольтній електричній мережі.

Основний матеріал

Представимо нескінчена малу ділянку довжиною Δx трифазної електричної мережі, захищеної тросом, яка знаходиться на відстані x від початку лінії, в вигляді наступної схеми заміщення (рис. 1).

Схема заміщення, яка представлена на рис. 1, побудована виходячи з припущення, що трифазна електрична мережа є симетричною, в якій R, L, M, g, C_2, C_1 є активним опором, індуктивністю, взаємоіндуктивністю фазних провідників, активною провідністю між фазним провідником та тросом, ємністю між провідниками фаз й ємністю між фазним провідником та тросом.

Нехтуючи величинами другого порядку малості, отримаємо наступні рівняння для напруги та струму в фазі А:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_A}{\partial X} &= R\, i_a + L\frac{\partial i_A}{\partial t} + M\frac{\partial i_B}{\partial t} + M\frac{\partial i_C}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i_A}{\partial X} &= g\, u_A + C_1\frac{\partial u_A}{\partial t} + C_2\frac{\partial (u_A - u_B)}{\partial t} + \\ &+ C_2\frac{\partial (u_C - u_A)}{\partial t}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Аналогічні рівняння отримуються для напруг та струмів в фазах В та С. Виходячи з того, що в трифазній електричній мережі до лінії електропередачі прикладена синосоїдальна напруга, та враховуючи лінійність рівнянь (1) й те, що в періодичному режимі в будь-якій точці лінії напруга та струм змінюються синусоїдально з частотою, що дорівнює частоті вхідної напруги, отримуємо наступні рів-

© Кононов Б.Т., Мушаров А.О., Нечаус А.О., 2016

няння в матричній формі для комплексних значень напруг $\mathrm{U} = \dot{\mathrm{U}}(\mathrm{X})$ та струмів $\dot{\mathrm{I}} = \dot{\mathrm{I}}(\mathrm{X})$.

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}\dot{\mathrm{U}}}{\mathrm{dX}} &= \mathrm{Z}\cdot\dot{\mathrm{I}}; \\ -\frac{\mathrm{d}\dot{\mathrm{I}}}{\mathrm{dX}} &= \mathrm{Y}\cdot\dot{\mathrm{U}}, \end{aligned} \qquad (2)$$

де Z – матриця повздовжних параметрів лінії;

Y – матриця поперечних параметрів лінії;

$\dot{\mathrm{U}}, \dot{\mathrm{I}}$ – матриці напруг та струмів.

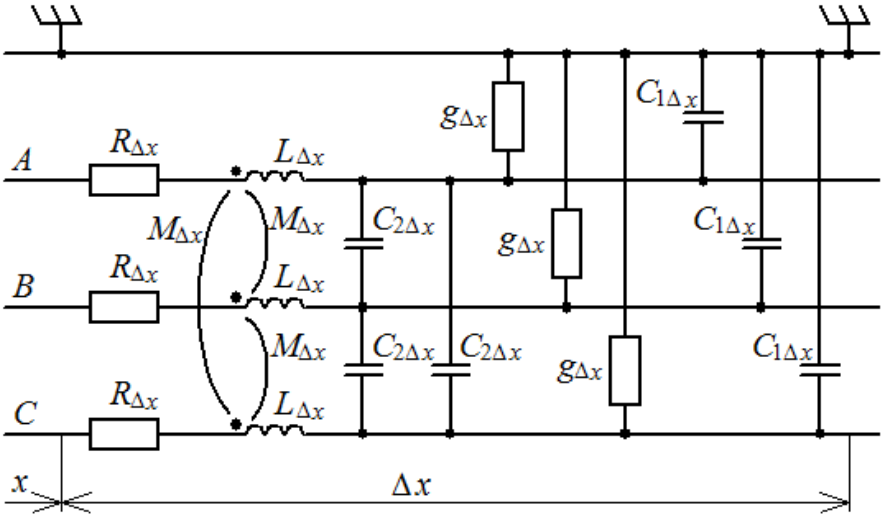

Рис. 1. Нескінченно мала ділянка трифазної електричної мережі

Відповідні матриці Z та Y мають наступний вигляд

$$\mathrm{Z} = \begin{Vmatrix} \mathrm{R}+\mathrm{j}\omega\mathrm{L} & \mathrm{j}\omega\mathrm{M} & \mathrm{j}\omega\mathrm{M} \\ \mathrm{j}\omega\mathrm{M} & \mathrm{R}+\mathrm{j}\omega\mathrm{L} & \mathrm{j}\omega\mathrm{M} \\ \mathrm{j}\omega\mathrm{M} & \mathrm{j}\omega\mathrm{M} & \mathrm{R}+\mathrm{j}\omega\mathrm{L} \end{Vmatrix};$$

$$\mathrm{Y} = \begin{Vmatrix} \mathrm{g}+\mathrm{j}\omega\mathrm{C}_1 & -\mathrm{j}\omega\mathrm{C}_2 & -\mathrm{j}\omega\mathrm{C}_2 \\ -\mathrm{j}\omega\mathrm{C}_2 & \mathrm{g}+\mathrm{j}\omega\mathrm{C}_1 & -\mathrm{j}\omega\mathrm{C}_2 \\ -\mathrm{j}\omega\mathrm{C}_2 & -\mathrm{j}\omega\mathrm{C}_2 & \mathrm{g}+\mathrm{j}\omega\mathrm{C}_1 \end{Vmatrix}. \qquad (3)$$

Вводячи поняття диференціального оператора $\mathrm{p} = \mathrm{j}\omega$, після перетворень (2) отримуємо наступні системи диференціальних рівнянь, представлених в матричній формі запису:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\dot{\mathrm{U}}}{\mathrm{dX}^2} &= \gamma(\mathrm{p})\cdot\dot{\mathrm{U}}; \\ \frac{\mathrm{d}^2\dot{\mathrm{I}}}{\mathrm{dX}^2} &= \gamma(\mathrm{p})^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\mathrm{I}}, \end{aligned} \qquad (4)$$

де $\gamma(\mathrm{p}) = \begin{Vmatrix} \mathrm{a}(\mathrm{p}) & \mathrm{в}(\mathrm{p}) & \mathrm{в}(\mathrm{p}) \\ \mathrm{в}(\mathrm{p}) & \mathrm{a}(\mathrm{p}) & \mathrm{в}(\mathrm{p}) \\ \mathrm{в}(\mathrm{p}) & \mathrm{в}(\mathrm{p}) & \mathrm{a}(\mathrm{p}) \end{Vmatrix} = \gamma^{\mathrm{T}}(\mathrm{p});$

T – символ транспортування матриці;

$$\mathrm{a}(\mathrm{p}) = (\mathrm{R}+\mathrm{pL})(\mathrm{g}+\mathrm{pC}_1) - 2\mathrm{p}^2\mathrm{MC}_2;$$

$$\mathrm{в}(\mathrm{p}) = -\mathrm{p}^2(\mathrm{LC}_2 + \mathrm{MC}_2 - \mathrm{MC}_1) + \mathrm{p}(-\mathrm{C}_2\mathrm{R} + \mathrm{MC}_1).$$

Незважаючи на простий вигляд системи рівнянь (4), знайти рішення цієї системи в аналітичному вигляді вдалося лише для випадку однопровідної лінії, коли $\mathrm{a}(\mathrm{p}) = (\mathrm{R}+\mathrm{pL})(\mathrm{g}+\mathrm{pC})$; $\mathrm{в}(\mathrm{p}) = 0$. Відповідно рішення, згідно з [1], має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{U}} &= \mathrm{A}_1 e^{-\sqrt{\mathrm{a}(\mathrm{p})}\mathrm{X}} + \mathrm{A}_2 e^{\sqrt{\mathrm{a}(\mathrm{p})}\mathrm{X}}; \\ \dot{\mathrm{I}} &= \frac{1}{\mathrm{Z}_{\text{хв}}}\left(\mathrm{A}_1 e^{-\sqrt{\mathrm{a}(\mathrm{p})}\mathrm{X}} + \mathrm{A}_2 e^{\sqrt{\mathrm{a}(\mathrm{p})}\mathrm{X}}\right), \end{aligned} \qquad (5)$$

де $\mathrm{A}_1 = \frac{\dot{\mathrm{U}}_1 + \mathrm{Z}_{\text{хв}}\dot{\mathrm{I}}_1}{2}$; $\mathrm{A}_2 = \frac{\dot{\mathrm{U}}_1 - \mathrm{Z}_{\text{хв}}\dot{\mathrm{I}}_1}{2}$;

$\dot{\mathrm{U}}_1, \dot{\mathrm{I}}_1$ – діючі значення напруги та струму на початку лінії;

$\mathrm{Z}_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{\mathrm{R}+\mathrm{pL}}{\mathrm{g}+\mathrm{pC}}}$ – хвильовий опір лінії.

Спробуємо отримати рішення системи рівнянь (4) для трифазної електричної мережі шляхом перетворення цієї системи до діагонального вигляду. Для здійснення цього перетворення будемо використовувати методику, засновану на визначенні власних чисел λ та власних векторів X [2]. Відповідно до цієї методики

$$\left[\gamma(p)-\lambda E\right]X=0, \qquad (6)$$

де E – одинична матриця.

Власні числа λ визначаються з наступного рівняння

$$\begin{vmatrix} a(p)-\lambda & в(p) & в(p) \\ в(p) & a(p)-\lambda & в(p) \\ в(p) & в(p) & a(p)-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (7)$$

В результаті розв'язання кубічного рівняння отримуємо, що $\lambda_1=\lambda_2=a(p)-в(p)$, $\lambda_3=a(p)-2в(p)$.

Підставляючи в (6) значення $\lambda_1=\lambda_2=a(p)-в(p)$ і виходячи з того, що власний вектор X має вигляд

$$X=\begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Vmatrix}, \qquad (8)$$

отримуємо, що

$$X_1+X_2+X_3=0. \qquad (9)$$

З рівняння (9) можливо знайти два незалежні рішення

$$\begin{bmatrix} 1; & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}; & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1; & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}; & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

що фактично відповідає методу симетричних складових.

З (10) витікає, що власний вектор $X_1=\left\|1 \quad -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right\|$ відповідає власному числу $\lambda_{1x}(p)=a(p)-в(p)$, а власний вектор $X_2=\left\|1 \quad -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right\|$ відповідає власному числу $\lambda_{2в}(p)=a(p)-в(p)$.

Власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_{3o}(p)=a(p)+2в(p)$, визначений як X_0 і дорівнює $X_0=\|1 \quad 1 \quad 1\|$.

Таким чином, діагональна матриця Д має наступний вигляд

$$Д=\begin{Vmatrix} \lambda_1(p) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(p) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0(p) \end{Vmatrix}. \qquad (11)$$

З врахуванням (11) зазначимо, що вектор

$$\dot{U}=\left\|\dot{U}_1 \quad \dot{U}_2 \quad \dot{U}_0\right\|,$$

а вектор

$$\dot{I}=\begin{Vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{Vmatrix}.$$

Це дає змогу отримати наступні скалярні рівняння

$$\frac{d^2U_1(x,p)}{dx^2}=\left[a(p)-в(p)\right]U_1(x,p); \\ \frac{d^2U_2(x,p)}{dx^2}=\left[a(p)-в(p)\right]U_2(x,p); \qquad (12, а)$$

$$\frac{d^2U_0(x,p)}{dx^2}=\left[a(p)+2в(p)\right]U_0(x,p);$$

$$\frac{d^2I_1(x,p)}{dx^2}=\left[a(p)-в(p)\right]I_1(x,p); \\ \frac{d^2I_2(x,p)}{dx^2}=\left[a(p)-в(p)\right]I_2(x,p); \qquad (12, в)$$

$$\frac{d^2I_0(x,p)}{dx^2}=\left[a(p)+2в(p)\right]I_0(x,p).$$

Рішення диференціальних рівнянь (12) дозволить знайти складові напруг та струмів прямої U_1, I_1, зворотної U_2, I_2 та нульової U_0, I_0 послідовностей.

Зв'язок фазних струмів з симетричними складовими визначається наступним чином

$$\begin{Vmatrix} i_A \\ i_в \\ i_C \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix} i_1+\begin{Vmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix} i_2+\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} i_0. \qquad (13)$$

Використовуючи поняття оператора повороту $a=e^{j\sqrt{20}}=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$, перетворимо (13) та отримуємо

$$i_A=i_1+i_2+i_0; \\ i_в=a\,i_1+a^2\,i_2+i_0; \qquad (14) \\ i_C=a^2 i_1+a\,i_2+i_0.$$

Аналогічний зв'язок існує між фазними напругами та симетричними складовими напруги. Вико-

ристані перетворення дозволяють отримати рішення вихідної системи рівнянь через комбінацію симетричних складових в координатах прямої, зворотної та нульової послідовностей. При цьому для кожної з послідовностей можливо використовувати всі висновки щодо розповсюдження прямої та зворотної хвилі, отримані в [1] для однопровідної лінії, й знайти для кожної з складових коефіцієнти затухання та фази, довжину хвилі та фазову швидкість, й умови, при яких в електричній мережі відсутні викривлення, та умови, при використанні яких втрати в лінії мінімальні.

Висновки

1. Запропонований метод перетворення матриць поперечних та повздовжніх параметрів симетричної трифазної мережі до діагонального типу заснований на використанні власних чисел й власних векторів і дозволяє суттєво спростити розв'язання системи диференціальних рівнянь, що описують перехідні процеси в електричній мережі.

2. При розгляді процесів, що відбуваються в трифазній високовольтній електричній мережі, можливо проводити аналіз перехідних процесів, використовуючи для цього метод симетричних складових, який дозволяє розглядати ці процеси окремо для кожної складової як для однопровідної лінії.

3. Запропоновані співвідношення дозволяють визначати струми і напруги в електричних мережах в умовах дислокації військових частин в польових умовах, коли живлення здійснюється по тимчасовим схемам, що характерно для підрозділів, які перебувають в зоні проведення АТО.

Список літератури

1. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Ч. 1. Линейные электрические цепи / Г.И. Атабеков. – М.-Л.: Энергия, 1966. – 320 с.

2. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендеев. – «Тойбнер» Лейпциг, М.: Наука, 1981. – 720 с.

Надійшла до редколегії 21.09.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Більчук, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ВЫСОКОВОЛЬТНОЙ ТРЕХФАЗНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

Б.Т. Кононов, А.А. Мушаров, А.А. Нечаус

В статье обосновывается схема замещения симметричной трехфазной электрической сети и дифференциальные уравнения, описывающие переходные процессы, объясняется метод преобразования матриц поперечных и продольных параметров трехфазной линии электропередач к диагональному виду, что позволяет рассматривать процессы изменения напряжений и токов отдельно для каждой симметричной составляющей.

Ключевые слова: *трехфазная электрическая сеть, оснащенная тросовой защитой, переходные процессы, дифференциальные уравнения, метод преобразования, собственные числа и собственные векторы.*

DIFFERENTIAL EQUALIZATIONS OF TRANSITIONAL PROCESSES IN A HIGH-VOLTAGE THREE-PHASE ELECTRIC LINE

B.T. Kononov, A.O. Musharov, A.O. Nechaus

In the article the chart of substitution of symmetric three-phase electric network is grounded and differential equalizations describing transitional processes, the method of transformation of matrices of transversal and longitudinal parameters of three-phase line of electricity transmissions is explained to the diagonal kind, that allows to examine the processes of change of tensions and currents separately for every symmetric constituent.

Keywords: *three-phase electric network, equipped rope defence, transitional processes, differential equalizations, method of transformation, own numbers and own vectors.*