

# Механіка, машинознавство та електропостачання

УДК 621 (045)

О.А. Вишнеvский, А.С. Давыдов

Национальный авиационный университет, Киев

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИЗНАШИВАНИЯ МЕТАЛЛОВ НЕЗАКРЕПЛЁННЫМ АБРАЗИВОМ

*Экспериментально реализован метод испытаний на износ цилиндрических образцов, выполняющих вращательные движения вокруг оси в абразивной смеси. Разработана методика определения основных величин, участвующих в процессе абразивного изнашивания.*

**Ключевые слова:** абразивное изнашивание, схема испытаний, модель изнашивания, параметры модели.

### Введение

Сложность трибологических процессов приводит к необозримо большому количеству методов исследований и испытаний, что делает результаты несопоставимыми. Создание единой теоретической основы экспериментальной трибологии затрудняется также наличием большого числа факторов, влияющих на износ. Интенсивность износа разных пар трения может различаться в  $10^9$  раз. Также может различаться износ одной и той же пары трения в зависимости от условий нагружения, температуры, скорости, приобретённого состояния поверхности трения. Испытания на изнашивание могут выполняться с разными целями: качественное сравнение материалов по изнашиванию; изучение механизма и вида изнашивания; определение параметров моделей, описывающих количественные закономерности процесса. Необходимо разработать методы лабораторных испытаний с определением таких параметров моделей изнашивания, с помощью которых можно оценить износ реальных узлов трения машин [1].

**Анализ последних достижений.** Решению проблемы определения и прогнозирования величины износа при движении деталей землеройной, буровой и других видов машин уделялось много внимания в научных работах видных учёных.

Использование метода по схеме – образец, который движется в абразивной смеси (ОДАС), находим в работе А.П. Малышева [2]. Веллингера и Уэтца опубликовали результаты испытаний по схеме ОДАС, где образцы делали только вращательные движения в абразивной смеси [3]. Показателем изнашивания считалось отношение объёмных износов образца к эталону, который испытывался вместе с первым.

К недостаткам можно отнести вращение жидкости, которая присутствует в смеси и неравномерное распределение абразивных частиц. Не была построена модель изнашивания с параллельным определением её параметров и, как следствие, было

невозможно переносить результаты на другие силовые, кинематические и геометрические условия проведения испытаний. Определение величины износа путём взвешивания образцов превращало эти показатели в чисто качественные.

На основе теории подобия и размерности [4] была установлена зависимость между безразмерными комплексами, играющими роль критериев подобия [5].

В качестве основной формы зависимости между безразмерными критериями выбрана функция вида:

$$\frac{dU_w}{ds} = K_w \left( \frac{\sigma}{HB} \right)^m \left( \frac{9\delta}{v_0} \right)^n \left( \frac{V_A + V_B}{V_A} \right)^k \left( \frac{T_c}{T_{пл}} \right)^\alpha. \quad (1)$$

Таким образом, возникла задача определения основных параметров и величин, задействованных в модели (1).

**Постановка задач.** Испытания материалов на абразивную износостойкость является неотъемлемой составляющей прогнозирования сроков работы соответствующих узлов трения, поэтому, в данной работе разрабатывается методика определения основных величин, задействованных в процессе абразивного изнашивания.

Поэтому были поставлены следующие задачи:

- дополнить многофакторную критериальную модель абразивного изнашивания по схеме MWU безразмерным комплексом, связанным с давлением атмосферы и песка на образец;
- определить силы, действующие на цилиндрический образец;
- определить давление абразива на образец;
- определить путь и скорость трения абразива по образцу;
- определить влияние зернистости абразива на процесс изнашивания.

### Результаты исследований

В зависимости (1) необходимо добавить ещё один безразмерный комплекс, составленный из опре-

деляющих величин атмосферного давления  $P_{AT}$  и давления  $P_A$ , возникающего под действием слоя абразива:

$$P_p = \frac{P_{AT} + P_A}{P_{AT}} = \left[ \frac{H}{M^2} / \frac{H}{M^2} \right]. \quad (2)$$

$$\frac{dU_w}{ds} = k_w \left( \frac{\sigma}{HB} \right)^m \left( \frac{9\delta}{v_0} \right)^n \left( \frac{V_A + V_B}{V_A} \right)^k \left( \frac{T_c}{T_{пл}} \right)^\alpha \left( \frac{P_{AT} + P_A}{P_{AT}} \right)^\beta. \quad (3)$$

Для разработки методики определения основных величин в процессе абразивного изнашивания по схеме ОДАС в первую очередь была найдена сила, действующая на образец.

Рассмотрим схематический рисунок расчётной схемы установки для испытаний цилиндрического образца в гидроабразивной смеси (рис. 1).

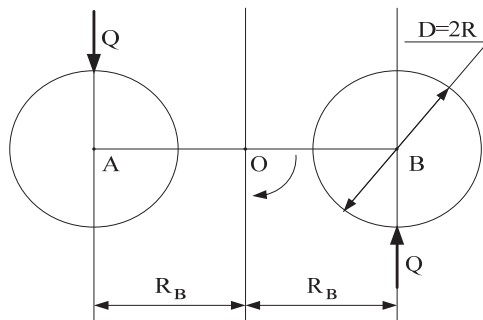


Рис. 1. Расчётная схема установки для испытаний на изнашивание латунных цилиндрических образцов радиуса  $R$ , где точки А, В соответствуют проекциям осей образцов

При вращении держателя с двумя образцами на каждый из них действует сила  $Q$ , уравновешенная моментом  $M$  по соотношению:

$$M = 2R_B Q. \quad (4)$$

Из полученной формулы (4) имеем:

$$Q = \frac{M}{2R_B}. \quad (5)$$

Момент в системе привода может быть выражен через потребляемую мощность из зависимости вида:

$$M = 72400 \frac{N}{n}, \quad (6)$$

где момент  $M$  [кг·см], потребляемая мощность  $N$  [кВт], частота вращения  $n$  [об/мин].

В результате эксперимента были получены следующие данные:  $N=0,7$ кВт;  $n=450$  об/мин.

По соотношению (3) имеем  $M=112,6$  кг·см. Расчёт силы, действующей на образец при  $R_B=3,85$ см, по формуле (5) дал следующий, уточнённый по сравнению с работой [6], результат  $Q=14,6$ кг.

Определим давление абразива на образец. Среднее давление на цилиндр при взаимодействии с абразивом через силу  $Q$  можно определить из зависимости:

В связи с добавлением безразмерного комплекса (2), модель (1) примет следующий вид:

$$\sigma_{cp} = \frac{Q}{DH}, \quad (7)$$

где  $D$  – диаметр цилиндра;  $H$  – высота цилиндра.

Расчёт среднего давления абразива на образец при диаметре цилиндра  $D=2,2$ см, высоте  $H=2$ см,  $Q=14,6$ кг по формуле (7) дал следующий результат  $\sigma_{cp}=3,3$  кг/см<sup>2</sup>.

Для определения максимального давления  $\sigma_0$  нужно принять распределение давления в виде закона косинуса, что отображено на рис. 2.

$$\sigma(\varphi) = \sigma_0 \cos \varphi_1, \quad \text{где } \varphi_1 = \varphi_0 - \varphi.$$

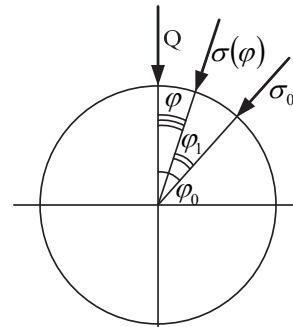


Рис. 2. Схематическое распределение давления абразива на образец в виде закона косинуса

Таким образом, получаем следующую зависимость:

$$\sigma(\varphi) = \sigma_0 \cos(\varphi_0 - \varphi). \quad (8)$$

Проектируя давления на направление силы  $Q$  и учитывая, что  $H$  – высота цилиндра, имеем

$$Q_\Delta = H\sigma(\varphi)Rd\varphi \cos \varphi.$$

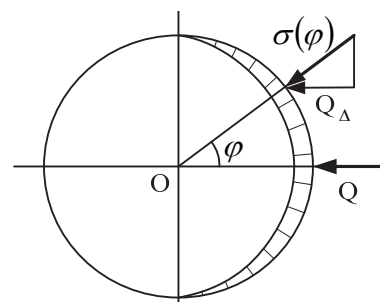


Рис. 3. Схематическое распределение давления абразива на образец по нормали ( $Q$  – равнодействующая всех горизонтальных сил, действующих на цилиндрический образец со стороны абразива)

Из зависимости (8) с учетом модели (7) получим следующую промежуточную формулу:

$$Q_{\Delta} = HR\sigma_0 \cos \varphi \cos(\varphi_0 - \varphi) d\varphi.$$

Из условия равновесия силы Q и противодействующего давления имеем следующее соотношение:

$$Q = 2HR\sigma_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cos(\varphi_0 - \varphi) d\varphi.$$

Отсюда получаем следующую зависимость

$$Q = RH\sigma_0 \left( \sin \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \cos \varphi_0 \right). \quad (9)$$

Из уравнения (9) получим,

$$s(\varphi) = 2\pi\sqrt{(R_B - R \sin \varphi)^2 + R^2 \cos^2 \varphi} \text{ для } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]; \quad (10)$$

$$s(\varphi) = 2\pi\sqrt{(R_B + R \sin \varphi)^2 + R^2 \cos^2 \varphi} \text{ для } \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]. \quad (11)$$

В точке на окружности, соответствующей углу  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , путь трения за один оборот равен длине окружности описываемой этой точкой

$s\left(\varphi = -\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi(R_B - R)$ . Скорость трения v по

определению равна  $v = \frac{s}{T}$ , где T – период вращения держателя с образцами, n – частота вращения,  $T = 1/n$ ,

Используя результаты эксперимента, рассмотрим пример определения скорости трения песка по образцу. Частота вращения равна n = 450 об/мин;

период вращения  $T = \frac{60}{450} = 0,13$ [с]; путь трения за один оборот находим по формуле:

$$s = 2\pi(R_B - R) = 2\pi \cdot (38,5 - 11) = 217,34 \text{ [мм]}.$$

$$u_w(\varphi) = 2\pi k_w \sigma_0^m \cos^m(\varphi_0 - \varphi) \sqrt{(R_B \mp R \sin \varphi)^2 + R^2 \cos^2 \varphi}. \quad (14)$$

Тогда модель (14) примет вид

$$u_w(\varphi) = 2\pi n t k_w \sigma_0^m \cos^m(\varphi_0 - \varphi) \sqrt{(R_B \mp R \sin \varphi)^2 + R^2 \cos^2 \varphi}, \quad (15)$$

где t – время испытаний, а n – частота вращения держателя с образцами.

$$\sigma_0 = \frac{4}{2 \sin \varphi_0 + \pi \cos \varphi_0} \sigma_{cp}.$$

Твёрдость латуни, из которой сделан образец, равна HB = 35 кг/мм<sup>2</sup>. Дисперсность абразивной среды равна  $\delta = (0,2+0,3)/2=2,5$ мм.

Определим путь трения и скорость абразивных частиц по поверхности образца. Для этого рассмотрим схему движения частиц по поверхности трения в нормальном сечении к оси цилиндрического образца.

Путь трения за один оборот для точки на поверхности цилиндра, соответствующей углу  $\varphi$  найдём по формулам, которые уточняют аналогичные формулы работы [6]:

$$\text{Скорость трения равна } v = \frac{217,34}{0,13} = 1,67 \text{ [м/с]}.$$

Определим распределение износа по поверхности трения образца и величину параметра  $k_w$ .

Рассмотрим модель изнашивания в линейно-дифференциальной форме

$$\frac{du_w}{ds} = k_w \sigma^m. \quad (12)$$

В интегральной форме модель (12) примет следующий вид

$$u_w = k_w \sigma^m s. \quad (13)$$

Подставим в выражение (13) распределение давлений по (8) и зависимость пути трения от угла по (10) и (11) за один оборот держателя с образцами. Получим следующую модель линейного изнашивания:

Используя данные эксперимента в четырёх точках, получим следующую систему уравнений для значений  $\varphi \in [0; \pi/2]$ .

$$\begin{cases} u_w(\varphi_1) = 2 \cdot \pi \cdot 4^m k_w n t \sigma_{cp}^m \left( \frac{\cos \varphi_0 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_0 \sin \varphi_1}{2 \sin \varphi_0 + \pi \cos \varphi_0} \right)^m \sqrt{R_B^2 + 2R_B R \sin \varphi_1 + R^2}; \\ u_w(\varphi_2) = 2 \cdot \pi \cdot 4^m k_w n t \sigma_{cp}^m \left( \frac{\cos \varphi_0 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_0 \sin \varphi_2}{2 \sin \varphi_0 + \pi \cos \varphi_0} \right)^m \sqrt{R_B^2 + 2R_B R \sin \varphi_2 + R^2}; \\ u_w(\varphi_3) = 2 \cdot \pi \cdot 4^m k_w n t \sigma_{cp}^m \left( \frac{\cos \varphi_0 \cos \varphi_3 + \sin \varphi_0 \sin \varphi_3}{2 \sin \varphi_0 + \pi \cos \varphi_0} \right)^m \sqrt{R_B^2 + 2R_B R \sin \varphi_3 + R^2}; \\ u_w(\varphi_4) = 2 \cdot \pi \cdot 4^m k_w n t \sigma_{cp}^m \left( \frac{\cos \varphi_0 \cos \varphi_4 + \sin \varphi_0 \sin \varphi_4}{2 \sin \varphi_0 + \pi \cos \varphi_0} \right)^m \sqrt{R_B^2 + 2R_B R \sin \varphi_4 + R^2}. \end{cases} \quad (16)$$

Как образец, покажем решение системы (16).

$$\begin{cases} \frac{u_w(\varphi_1)}{u_w(\varphi_2)} = \left( \frac{\cos \varphi_1 + x \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + x \sin \varphi_2} \right)^y \sqrt{\frac{R_B^2 + 2R_B R \sin \varphi_1 + R^2}{R_B^2 + 2R_B R \sin \varphi_2 + R^2}}; \\ \frac{u_w(\varphi_3)}{u_w(\varphi_4)} = \left( \frac{\cos \varphi_3 + x \sin \varphi_3}{\cos \varphi_4 + x \sin \varphi_4} \right)^y \sqrt{\frac{R_B^2 + 2R_B R \sin \varphi_3 + R^2}{R_B^2 + 2R_B R \sin \varphi_4 + R^2}}. \end{cases} \quad (17)$$

После преобразований (17) получим:

$$\begin{aligned} & \left( 2 \ln \frac{u_w(\varphi_1)}{u_w(\varphi_2)} - \ln \frac{R_B^2 + 2R_B R \sin \varphi_1 + R^2}{R_B^2 + 2R_B R \sin \varphi_2 + R^2} \right) \ln \frac{\cos \varphi_3 + x \sin \varphi_3}{\cos \varphi_4 + x \sin \varphi_4} - \\ & - \left( 2 \ln \frac{u_w(\varphi_3)}{u_w(\varphi_4)} - \ln \frac{R_B^2 + 2R_B R \sin \varphi_3 + R^2}{R_B^2 + 2R_B R \sin \varphi_4 + R^2} \right) \ln \frac{\cos \varphi_1 + x \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + x \sin \varphi_2} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решая уравнение (18), получим значение  $x=0,785$ , что даёт возможность определить  $\varphi_0=0,666$ .

Из первого уравнения системы (16) найдём значение  $m=3,25208$ . Коэффициент  $k_w=1,90119 \times 10^{-5}$  найден из первого уравнения системы (16).

А с помощью уравнения (8) можно найти значение  $\sigma$  для конкретного значения  $\varphi$ .

Определим влияние зернистости на абразивный износ. Цель этой части испытаний состоит в том, чтобы получить обобщенную зависимость абразивного износа по схеме MWU с учетом размера абразивного зерна  $\delta$ . В общем виде зависимость интенсивности от основных факторов, включая размер абразивных частиц, предложена:

$$\frac{du_w}{ds} = k_w \left( \frac{\sigma}{HB} \right)^m \left( \frac{v\delta}{v_0} \right) \varepsilon^k.$$

Сохраняя все факторы кроме  $\sigma$  и  $\delta$  базовыми имеем частный случай этой зависимости в форме  $\frac{du_w}{ds} = k_w \sigma^m \delta^n$ , при этом  $HB_\delta, v_\delta, v_{0\delta}, \varepsilon_\delta$ . В интегральной форме имеет вид

$$u_w = k_w \sigma^m \delta^n s. \quad (18)$$

Для определения трех параметров модели  $k_w, m, \delta$  необходимо иметь три базовых точки на пространстве экспериментальных точек

$$\{u_{w1}(\sigma_1, \delta_1, s_1); u_{w2}(\sigma_2, \delta_2, s_2); u_{w3}(\sigma_3, \delta_3, s_3)\}. \quad (19)$$

Запишем модель (18) для трех точек (19)

$$\begin{cases} u_{w1} = k_w \sigma_1^m \delta_1^n s_1; \\ u_{w2} = k_w \sigma_2^m \delta_2^n s_2; \\ u_{w3} = k_w \sigma_3^m \delta_3^n s_3. \end{cases} \quad (20)$$

Взяв непарные отношения уравнений системы (20), получаем:

$$\begin{cases} \frac{u_{w1}}{u_{w2}} = \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^m \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^n \frac{s_1}{s_2}; \\ \frac{u_{w2}}{u_{w3}} = \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right)^m \left( \frac{\delta_2}{\delta_3} \right)^n \frac{s_2}{s_3}. \end{cases} \quad (21)$$

Прологарифмируем оба уравнения системы (21)

$$\begin{cases} \lg \frac{u_{w1}}{u_{w2}} = m \lg \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + n \lg \frac{\delta_1}{\delta_2} + \lg \frac{s_1}{s_2}; \\ \lg \frac{u_{w2}}{u_{w3}} = m \lg \frac{\sigma_2}{\sigma_3} + n \lg \frac{\delta_2}{\delta_3} + \lg \frac{s_2}{s_3}. \end{cases} \quad (22)$$

Запишем систему (22) в следующем виде:

$$\begin{cases} m \lg \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + n \lg \frac{\delta_1}{\delta_2} = \lg \frac{u_{w1}}{u_{w2}} - \lg \frac{s_1}{s_2}; \\ m \lg \frac{\sigma_2}{\sigma_3} + n \lg \frac{\delta_2}{\delta_3} = \lg \frac{u_{w2}}{u_{w3}} - \lg \frac{s_2}{s_3}. \end{cases} \quad (23)$$

Решая систему уравнений (23) относительно параметров  $m, n$ , получим:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\lg \delta_1 \lg \frac{u_{w3}s_2}{u_{w2}s_3} + \lg \delta_2 \lg \frac{u_{w1}s_3}{u_{w3}s_1} + \lg \delta_3 \lg \frac{u_{w2}s_1}{u_{w1}s_2}}{\lg \sigma_1 \lg \frac{\delta_2}{\delta_3} + \lg \sigma_2 \lg \frac{\delta_3}{\delta_1} + \lg \sigma_3 \lg \frac{\delta_1}{\delta_2}}; \\ n &= \frac{\lg \sigma_1 \lg \frac{u_{w3}s_2}{u_{w2}s_3} + \lg \sigma_2 \lg \frac{u_{w1}s_3}{u_{w3}s_1} + \lg \sigma_3 \lg \frac{u_{w2}s_1}{u_{w1}s_2}}{\lg \delta_1 \lg \frac{\sigma_2}{\sigma_3} + \lg \delta_2 \lg \frac{\sigma_3}{\sigma_1} + \lg \delta_3 \lg \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}. \end{aligned}$$

При вычислении пути трения расчётных точек, используем зависимости (10–11).

На основании экспериментальных данных, полученных при изнашивании латунных цилиндров и вычисления пути трения каждой расчётной точки за время всего эксперимента, составим табл. 1.

## Выводы

Определены силы, действующие на цилиндрический образец. Построена зависимость давления абразива на образец в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Рассчитан путь и скорость трения абразива по образцу.

Дополнена многофакторная критериальная модель абразивного изнашивания по схеме MWU без-

размерным комплексом, связанным с давлением атмосферы и абразива на образец.

Определено влияние зернистости абразива на процесс изнашивания.

Показана методика определения основных величин влияющих на величину износа в исследуемых точках поверхности трения, а также, пути трения.

Таблица 1

Зависимость износа от времени эксперимента, пути трения (м) и координаты точки для образцов  $\delta = 0,63 - 1$  мм

$\varphi$	$-90^0$	$-60^0$	$-30^0$	$0^0$	$30^0$	$60^0$	$90^0$
t, час	7	6	5	1	2	3	4
10	$\frac{0,0}{46653}$	$\frac{0,01}{50031}$	$\frac{0,02}{58269}$	$\frac{0,01}{67930}$	$\frac{0,03}{76374}$	$\frac{0,03}{82007}$	$\frac{0}{83975}$
20	$\frac{0,0}{93305}$	$\frac{0,03}{100062}$	$\frac{0,04}{116538}$	$\frac{0,02}{135855}$	$\frac{0,05}{152747}$	$\frac{0,05}{164014}$	$\frac{0,01}{167950}$
30	$\frac{0,01}{139958}$	$\frac{0,03}{150093}$	$\frac{0,07}{174807}$	$\frac{0,03}{203782}$	$\frac{0,10}{229121}$	$\frac{0,06}{246022}$	$\frac{0,01}{251924}$
40	$\frac{0,01}{186611}$	$\frac{0,05}{200124}$	$\frac{0,09}{233077}$	$\frac{0,05}{271709}$	$\frac{0,12}{305495}$	$\frac{0,08}{328029}$	$\frac{0,02}{335899}$
50	$\frac{0,02}{233263}$	$\frac{0,06}{250155}$	$\frac{0,11}{291346}$	$\frac{0,06}{339636}$	$\frac{0,14}{381868}$	$\frac{0,09}{410036}$	$\frac{0,02}{419874}$
60	$\frac{0,02}{279916}$	$\frac{0,07}{300186}$	$\frac{0,13}{349615}$	$\frac{0,07}{407564}$	$\frac{0,16}{458242}$	$\frac{0,10}{492043}$	$\frac{0,03}{503849}$
70	$\frac{0,02}{326569}$	$\frac{0,08}{350217}$	$\frac{0,15}{407884}$	$\frac{0,08}{475491}$	$\frac{0,19}{534616}$	$\frac{0,11}{574050}$	$\frac{0,03}{587823}$
$L_{\Sigma}$	0,02	0,08	0,15	0,08	0,19	0,11	0,03
$\sigma$ , кг/мм <sup>2</sup>				0.02793	0.03516	0.03297	0.02194
$\sigma_0$ , кг/мм <sup>2</sup>	0.03552						

### Список литературы

1. Кузьменко А.Г. Прикладная теория методов испытаний на износ / А.Г. Кузьменко. – Хмельницький: ХНУ, 2007. – 579 с.
2. Малышев А.П. Изнашивание материалов от трения / А.П. Малышев // Вестник общества сибирских инженеров. – 1917. – Т. 2, № 5-6. – С. С. 24-27.
3. Хруцов М.М. Абразивное изнашивание / М.М. Хруцов, М.А. Бабичев. – М.: Наука, 1970. – 252 с.
4. Веников В.А. Теория подобия и моделирования / В.А. Веников. – М.: Высш. шк., 1976. – 479 с.
5. Кузьменко А.Г. Теоретические основы метода испытаний на абразивный износ по схеме Малышева - Веллингера - Уэтца / А.Г. Кузьменко, О.А. Вишневецкий // Проблемы трения та зношування: наук.-техн. зб. – К.: НАУ. – 2011. – Вип. 55. – С. 79-82.

6. Кузьменко А.Г. Теоретические основы и экспериментальная реализация метода испытаний на абразивный износ с определением параметров моделей изнашивания по схеме Малышева-Веллингера-Уэтца(MVU) / А.Г. Кузьменко, О.А. Вишневецкий // Вісник ХНУ. Технічні науки. – 2011. – № 3. – С. 7-19.

Поступила в редколлегию 11.01.2017

**Рецензент:** д-р техн. наук доц. М.А. Павленко, Харьковский университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба, Харьков.

### МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗНОШУВАННЯ МЕТАЛІВ НЕЗАКРІПЛЕНИМ АБРАЗИВОМ

О.А. Вишневецкий, О.С. Давидов

Змодельований процес зношування циліндричних зразків, що виконують обертальні рухи навколо спільної осі в абразивній суміші. Розроблена методика визначення основних величин, що приймають участь в процесі абразивного зношування.

**Ключові слова:** тріття, тиск, твердість, лінійний знос, математична модель.

### MODELING OF METAL WEAR PROCESS IS NOT FIXED ABRASIVE

O. Vishnevskii, A. Davydov

Simulated wear process of cylindrical specimens, performing rotational movements around a common axis in the abrasive mixture. A method of determining basic quantities involved in the process of abrasive wear.

**Keywords:** friction, pressure, hardness, linear wear, mathematical model.