

УДК 519.87:316.458.6

Ю.І. Рафальський, Т.В. Матвієнко, О.О. Бабич

Харківський національний університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

## ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИГНАЛІВ З НОРМОВАНИМ СПЕКТРОМ

В статті розглядається розв'язання задачі синтезу вимірювальних сигналів типу парний та непарний мультисинус, оптимальних за критерієм мінімуму коефіцієнта амплітуди обслугою виїзної метрологічної ремонтно-відновлювальної групи в зоні проведення антитерористичної операції.

**Ключові слова:** парний та непарний мультисинус, дискретний амплітудний спектр, комплексний коефіцієнт Фур'є.

### Вступ

**Постановка задачі.** Для досягнення оптимізації вимірювальних сигналів з нормованим спектром (СНС) типу парний та непарний мультисинус, для зразків озброєння та військової техніки військових частин та підрозділів радіотехнічних військ в зоні проведення антитерористичної операції, необхідно розв'язати задачі синтезу вимірювальних сигналів типу парний та непарний мультисинус, оптимальних за критерієм мінімуму коефіцієнта амплітуди, а саме обслуга виїзної метрологічної ремонтно-відновлювальної групи повинна досягти мінімуму коефіцієнта амплітуди на класі парних та непарних вимірювальних сигналів. Цьому питанню й присвячена наступна стаття.

**Аналіз літератури.** Принципи й організаційні основи метрологічного забезпечення, а також роль й місце метрологічного забезпечення Збройних Сил України, з урахуванням досвіду проведення антитерористичної операції, викладено в статті [1] та в наказах [3–5]. Критерії синтезу та класифікація вимірювальних сигналів з нормованим спектром наведено в статті [2]. Нажаль в розглянутих статтях та нормативних документах [1–5] питання, пов'язані з розв'язанням задачі синтезу вимірювальних сигналів типу парний та непарний мультисинус, оптимальних за критерієм мінімуму коефіцієнта амплітуди обслугою виїзної метрологічної ремонтно-відновлювальної групи в зоні проведення антитерористичної операції не розглядалися.

**Метою статті** є визначення шляхів розв'язання задачі синтезу вимірювальних сигналів типу парний та непарний мультисинус, оптимальних за критерієм мінімуму коефіцієнта амплітуди обслугою виїзної метрологічної ремонтно-відновлювальної групи в зоні проведення антитерористичної операції.

### Виклад основного матеріалу

Розв'язання поставленої задачі оптимізації необхідно здійснювати методом довільного мульти-

старту та покоординатного спуску, проводячи корекцію спектра сигналів з нормованим спектром з урахуванням особливостей побудови сучасних синтезаторів.

Представимо мультисинусоїдний сигнал  $f(\alpha)$ , що має необхідний дискретний амплітудний спектр, з періодом  $T$  рядом Фур'є на інтервалі  $[0; T]$ :

$$f(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{d}_n e^{jn\alpha} = c_0 + \sum_{n=1}^N \rho_n c_n \cos(n\alpha + \psi_n), \quad (1)$$

де  $\alpha = \omega_0 t$  – фазовий кут ( $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ );

$\omega_0 = 2\pi/T$  – основна кутова частота сигналу;

$n$  – номер гармоніки СНС;

$c_n$  і  $\psi_n$  – амплітуда й початкова фаза  $n$ -ї гармоніки відповідно;

$c_0 = d_0$  – постійна складова;

$N$  – номер верхньої частоти контролю в спектрі сигналу;

$\rho_n$  – вагові коефіцієнти, причому  $\rho_n = 1$ , якщо  $n$ -а гармоніка входить у сітку контрольних частот, і  $\rho_n = 0$ , якщо не входить.

Комплексний коефіцієнт Фур'є сигналу  $f(\alpha)$  при  $n \neq 0$  має наступний вигляд:

$$\dot{d}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) e^{-jn\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} c_n e^{j\psi_n}. \quad (2)$$

Кожна процедура вимірювання характеристик – супроводжується похибками та відбувається на фоні завад. Запорукою досягнення високої точності та достовірності результатів перевірки (калібрування) або контролю технічного стану обслугою виїзної метрологічної ремонтно-відновлювальної групи – є забезпечення високого показника відношення сигнал/шум (ВСШ).

Представимо математичний вираз ВСШ, що є справедливим для будь-якого сигналу [2]:

$$\text{ВСШ} = 6b + 10,8 - 20 \log K_n, \quad (3)$$

де  $b$  – кількість бітів у представленні чисел;

$K_a$  – коефіцієнт амплітуди СНС, що визначається співвідношенням [2]:

$$K_a = \frac{\max_{\{\alpha\}} |f(\alpha)|}{f_{\text{СКЗ}}}. \quad (4)$$

В останньому виразі чисельник являє собою найбільшим за модулем миттєвим значенням СНС  $f(\alpha)$  на інтервалі одного періоду, а знаменник – середньоквадратичне значення (СКЗ)  $f_{\text{СКЗ}}$  сигналу.

Синтез різноманітних СНС з однаковими наборами амплітуд  $c_n$ , але різними початковими фазами  $\psi_n$  буде приводити до різних значень коефіцієнт амплітуди (КА) (відповідно, ВСШ буде також різним), проте їх СКЗ буде однаковим.

Виходячи з цього, з урахуванням формул (3) та (4), сформулюємо критерій оптимальності мульти-синуса:

$$\min_{\{\psi_n\}_{\text{опт}}} \max_{\{\alpha\}\{\psi_n\}_i} |f(\alpha)|. \quad (5)$$

Умова (5) означає, що оптимізацію СНС за змінними  $\psi_n$  необхідно проводити за два етапи.

На першому етапі на множині  $\{\alpha\}$ , де  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ , при певному наборі початкових фаз  $\{\psi_n\}_i$  знаходять максимальне за модулем значення сигналу (ММЗС)  $|f(\alpha)|_{\text{max}}$ .

На другому етапі визначають такий вектор  $\{\psi_n\}_{\text{опт}}$  (оптимальний), для якого величина  $|f(\alpha)|_{\text{max}}$  буде мінімальною.

Складність цільової функції (5) не дозволяє застосувати прості оптимізаційні алгоритми для розв'язання даної задачі, оскільки фази гармонік мають безліч значень і повний перебір усіх варіантів початкових фаз виконати практично неможливо. Виходом із цього стану може бути спрощення задачі, зокрема, обмеження класу функцій, що розглядаються. З цією метою визначимо початкове наближення до оптимуму шляхом переходу до парних функцій.

Виходячи з рівності  $f(\alpha) = f(-\alpha)$ , що притаманна парним СНС, та на підставі формули (2) визначимо  $n$ -й коефіцієнт Фур'є парного сигналу (1):

$$\dot{d}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha. \quad (6)$$

Початкова фаза  $n$ -ї гармоніки для парного СНС приймає значення або 0, або  $\pi$ , а її амплітуда обчислюється за формулою

$$c_n = \pm 2\dot{d}_n = 2\dot{d}_n W_n, \quad (7)$$

де  $W_n$  – фазові коефіцієнти:

$$W_n = \text{sign}(\dot{d}_n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \psi_n = 0; \\ -1, & \text{якщо } \psi_n = \pi. \end{cases} \quad (8)$$

Підстановкою останнього виразу у формулу (1) отримаємо нове аналітичне співвідношення для СНС, що синтезується:

$$f(\alpha) = \sum_{n=1}^N \rho_n W_n c_n \cos n\alpha. \quad (9)$$

Критерій оптимальності (5) стосовно до сигналу (9) запишемо в наступному вигляді:

$$\min_{\{W_n\}_{\text{опт}}} \max_{\{\alpha\}\{W_n\}_i} |f(\alpha)|, \quad (10)$$

де запис  $\{W_n\}_i$  означає, що процедура знаходження максимуму величини  $|f(\alpha)|$  проводиться для кожного  $i$ -го набору фазових коефіцієнтів, а оптимальним є такий набір  $\{W_n\}_{\text{опт}}$ , який забезпечує мінімум КА серед усіх можливих комбінацій складових у векторі  $\{W_n\}$ .

Оптимізація парного СНС типу мульти-синус за критерієм (5), у порівнянні до мульти-синуса з довільними фазами, має декілька суттєвих переваг: по-перше, визначення величини  $|f(\alpha)|_{\text{max}}$  проводиться на інтервалі  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , і, по-друге, замість усього діапазону значень початкових фаз  $\{\psi_n\}$  аналізується максимум  $2^{S-1}$  комбінацій величин  $\{W_n\}$ , де  $S$  дорівнює кількості корисних гармонічних складових на інтервалі аналізу та обчислюється за формулою:

$$S = \sum_{n=1}^N \rho_n. \quad (11)$$

Оскільки постановка задачі синтезу вимірювального сигналу типу парний та непарний мульти-синус за критерієм мінімуму КА ще не дає оптимального набору фазових коефіцієнтів  $\{W_n\}$ , подальші дослідження зосередимо на розв'язанні співвідношення (5).

Загальний для всіх гармонічних складових у спектрі СНС (1) параметр  $\alpha$  не дозволяє розглядати функцію  $f(\alpha)$  як адитивну відносно незалежних змінних  $W_n$ , тому в даному випадку застосувати метод розв'язання стандартної задачі про сепарабельне програмування неможливо [2]. Знаходження оптимального набору коефіцієнтів  $\{W_n\}_{\text{опт}}$  виконаємо за допомогою методу покоординатного спуску з використанням мултистартів.

Суть покоординатного спуску полягає в наступному. Для конкретного вектора  $\{W_n\}_i$  обчислюємо значення  $|f(\alpha)|_{\text{max}}$ . Далі, послідовно змінюючи знак у кожного коефіцієнта  $W_n$ , починаючи з першого  $W_1$ , будемо залишати знак величини  $W_n$  тим самим, якщо його зміна не зменшує величини  $|f(\alpha)|_{\text{max}}$ , і змінювати його на протилежний, якщо його зміна привела до зменшення максимального за модулем значен-

ня сигналу. Таким чином пройдемо весь набір коефіцієнтів  $\{W_n\}$ . На цьому закінчується перший цикл, після чого знову вертаємося до першого коефіцієнта  $W_1$  й виконуємо аналогічно другий, третій і наступні цикли. В загальному випадку кількість циклів може виявитися різною. Даний алгоритм закінчується на тому циклі, в ході якого жодного разу не відбувається зменшення величини  $|f(\alpha)|_{\max}$  при змінах знаків у коефіцієнтів  $\{W_n\}$ .

Проведення одного покоординатного спуску, як правило, не приводить до оптимального за коефіцієнтом амплітуди парного мультисинуса, тому вищезрозглянуту процедуру виконують декілька разів, тобто з мультистартом (рестартом).

Кожен покоординатний спуск здійснюється для нового набору фазових коефіцієнтів  $\{W_n\}_i$ , розподілених за довільним рівномірним законом. Серед усіх результатів мультистартів обирається такий набір коефіцієнтів  $\{W_n\}$ , який доставляє найменше значення величині  $|f(\alpha)|_{\max}$ .

Крім того, аналіз властивостей рядів Фур'є для різної кількості корисних гармонік та різних наборів амплітуд і фаз дозволив зробити висновок про те, що найменше значення коефіцієнта амплітуди доцільно шукати не тільки для класу парних функцій, але й для непарних, тобто коли СНС (9) так само являє собою суму синусоїд. Отже, мультистарт з покоординатним спуском проводимо як для парного, так і для непарного мультисинуса.

Знаходження раціонального принципу перебору фазових коефіцієнтів гармонік ще не вирішує повністю задачу синтезу СНС типу мультисинус. Паралельною підзадачею в такій постановці критерію оптимальності (9) є ефективний пошук ММЗС при фіксованому наборі коефіцієнтів  $\{W_n\}_i$  на інтервалі  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , який полягає в обчисленні значень функції  $f(\alpha)$  в  $m$  точках та подальшому виборі максимального за модулем значення стандартною процедурою, закладеною в сучасні пакети прикладних програм. Отже, постає задача знаходження оптимального значення величини  $m$ , оскільки обчислення  $f(\alpha)$  при строго визначених аргументах (кількість точок  $m$  незмінна) в одних випадках займає неоправдано значну кількість часу та машинних втрат, а в інших – призводить до зниження точності обчислення амплітуд сигналу, зменшення ВСШ та певним проблемам під час реалізації оптимізаційних алгоритмів. З цією метою знайдемо аналітичне співвідношення, що пов'язує достатню кількість точок  $m$  на інтервалі половини періоду, в яких потрібно визначити абсолютне значення СНС, зі спектральним складом та похибкою розрахунку екстремумів.

За невеликої кількості корисних гармонік у спектрі мультисинуса ( $N \leq 4$ ) знаходження ММЗС можна здійснити стандартним прийомом, що описано в [2]. Взяти частинну похідну від функції  $f(\alpha)$

по змінній  $\alpha$  і зрівнявши її нулю, одержуємо трансцендентне тригонометричне рівняння

$$\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} = -\sum_{n=1}^N n \rho_n W_n c_n \sin n\alpha = 0. \quad (12)$$

Оскільки невідоме  $n\alpha$  входить тільки в аргументи тригонометричних функцій, то дане рівняння можна привести до алгебраїчного виду. Для цього необхідно виконати попередні перетворення гармонічного полінома в степеневий тригонометричний, користуючись, наприклад, формулою Муавра для комплексних чисел [2]

$$\begin{aligned} \cos n\alpha + j \sin n\alpha &= (\cos \alpha + j \sin \alpha)^n = \\ &= \sum_{r=0}^n j^r C_n^r \cos^{n-r} \alpha \cdot \sin^r \alpha \end{aligned} \quad (13)$$

і здійснивши прирівнювання її дійсних та уявних частин для кожної гармоніки. В остаточному підсумку приводять рівність (13) до виразу, що містить лише одну тригонометричну функцію аргументу  $\alpha$ , і здійснюють заміну цієї функції новою змінною  $x$ . Після чого розв'язують отримане алгебраїчне рівняння. Переходячи від знайдених значень  $x$  назад до змінної  $\alpha$ , варто враховувати багатозначність рішення, а також, у ряді випадків, необхідно зробити перевірку, щоб виключити сторонні результати.

У тих випадках, коли кількість гармонік, що беруть участь у процесі вимірювань, велика, оптимізацію сигналу (9) за критерієм (10) доцільно провести числовими методами

## Висновки

1. В статті розв'язана задача синтезу вимірювальних сигналів типу парний та непарний мультисинус, оптимальних за критерієм визначеного мінімуму коефіцієнта амплітуди обслугою виїзної метрологічної ремонтно-відновлювальної групи в зоні проведення антитерористичної операції.

2. Визначено що найменше значення коефіцієнта амплітуди доцільно шукати не тільки для класу парних функцій, але й для непарних, тобто коли СНС (9) так само являє собою суму синусоїд. Отже, мультистарт з покоординатним спуском необхідно проводимо як для парного, так і для непарного мультисинуса.

3. Знайдено аналітичне співвідношення, що пов'язує достатню кількість точок  $m$  на інтервалі половини періоду, в яких потрібно визначити абсолютне значення СНС, зі спектральним складом та похибкою розрахунку екстремумів.

## Список літератури

1. Кононов В.Б. Метрологічне забезпечення у сфері оборони в умовах проведення антитерористичної операції / В.Б. Кононов, С.А. Копашинський, О.В. Коваль // 36. наук. пр. ХНУПС. – 2017. – № 4 (53). – С. 144-147.

2. Крихтін Ю.О. Критерії синтезу та класифікація вимірювальних сигналів з нормованим спектром / Ю.О. Крихтін // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба. – 2012. – Вип. 2 (14). – С. 146-149.

3. Наказ заступника Міністра оборони з озброєння – начальника Озброєння Збройних Сил України від 01.06.2001р. №79 «Про затвердження Керівництва з організації та порядку експлуатації вимірювальної техніки у Збройних Силах України».

4. Наказ Міністра оборони України від 15.12.2006 № 731 «Про затвердження нормативних документів з метрології та метрологічної діяльності».

5. Наказ начальника Центрального управління метрології і стандартизації «Про затвердження Керівницт-

ва з організації виробничої діяльності військових метрологічних лабораторій в Міністерстві оборони України та Збройних Силах України» від 14.05.2007 № 2.

Надійшла до редколегії 9.08.2017

**Рецензент:** д-р техн. наук проф. В.Б. Кононов, Харківський національний університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

### ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ С НОРМИРОВАННЫМ СПЕКТРОМ

Ю.И. Рафальский, Т.В. Матвиенко, О.О. Бабич

*В статье рассматривается решение задачи синтеза измерительных сигналов типа парный и непарный мульти-синус, оптимальных по критерию минимума коэффициента амплитуды расчётом выездной метрологической ремонтно-восстановительной группы в зоне проведения антитеррористической операции.*

**Ключевые слова:** парный и непарный мульти-синус, дискретный амплитудный спектр, комплексный коэффициент Фурье.

### THE OPTIMIZATION OF MEASURING SIGNALS WITH A NORMALIZED SPECTRUM

Y. Rafalskiy, T. Matvienko, O. Babych

*In article it is considered solution of the problem of synthesis measuring signals type paired and unpaired multi-sine, optimum by the criterion of the minimum of the amplitude coefficient calculating by visiting metrological repair-reduction group in the zone of the antiterroristic operation.*

**Keywords:** paired and unpaired multi-sine, discrete amplitude spectrum, complex coefficient Furje.