УДК 624.014

Просторова стійкість сталевих колон зі змінною висотою перерізу

Білик С.І., к.т.н.

Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна

Анотація. Розроблена методика перевірки стійкості пружної двотаврової колони змінного перерізу із площини дії моменту.

Аннотация. Разработана методика проверки устойчивости упругой двутавровой колоны переменного сечения из плоскости действия момента.

Abstract. The method is elaborated for stability testing of elastic double-T variable cross-section column out of moment action plane.

Ключові слова: стійкість, колона, профілі, сталь, рівняння.

Актуальність роботи. Використання в конструкціях у несучих каркасах будівель зварних двотаврів змінного перерізу дає можливість проектувати конструкції з раціональними витратами сталі. Тому розробка надійної методики розрахунку на стійкість елементів рам змінного перерізу є важливою задачею.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Відомі основні дослідження стійкості колон зі змінним перерізом у площині найбільшої жорсткості [2, 6, 9, 11, 12, 14]. В основу методологічного підходу розрахунку просторової стійкості сталевих колон постійного перерізу покладено теорію тонкостінних стержнів В.З. Власова. [4, 5, 7, 8, 9, 14]. Але просторова стійкість колон суцільного перерізу зі змінною висотою стінки потребує додаткових досліджень.

Постановка задачі. Розробити методику перевірки просторової стійкості колон зі змінною висотою стінки.

Основна частина. У дослідженнях [13] отримано систему диференціальних рівнянь, яка описує просторову стійкість колон довжиною l при лінійній зміні висоти симетричного і несиметричного перерізів. В основу дослідів покладені головні гіпотези теорії тонкостінних профілів В.З. Власова [8].

$$\begin{cases} EI_{x0}(1-\gamma_y \frac{z}{l})^n \eta^{IV} + N\eta'' = 0; \\ EI_{y0}\xi^{IV} + N\xi'' + M_{xz}\theta'' - 2N\theta'(y_z') = 0; \\ EI_{\omega z}(1-\gamma_\omega \frac{z}{l})^r \theta^{IV} - GI_{tz}(1-\gamma_t \frac{z}{l})^p \theta'' + \xi'' M_{xz} + \theta'' N r_z^2 - 2\theta'(y_z)' M_{xz}. \end{cases} \quad (1)$$

Прийнята декартова система координат, початок якої розташований у центрі ваги нижнього кінцевого перерізу стрижня, *x*, *y*, *z* – координати будь-якої точки перерізу. Система (1) отримана за умови взаємозв'язку між переміщеннями точки перерізу ξ_s і η_s і переміщеннями центра ваги (η, ξ) та координатами точки перерізу (x; y_z): $\eta_s = \eta$; $\xi_s = \xi - \theta y_z$, θ – кут повороту перерізу при втраті стійкості, $y_z = y_0(1-\gamma_h t_z)$ – координата точки перерізу по осі ОУ.

У подальшому прийнято параболічну залежність апроксимації залежності зміни секторіального моменту інерції ($I_{\omega z}$) перерізу балки по довжині і моменту інерції (I_{xz}) перерізу відносно осі *OX.* Зміна крутильного моменту інерції перерізу прийнята за лінійним законом (I_{tz}).

$$EI_{xz} = EI_{x0}(1-\gamma_y \frac{z}{l})^2;$$

$$EI_{\omega z} = EI_{\omega 0}(1-\gamma_\omega \frac{z}{l})^2;$$

$$t_z = \frac{z}{l};$$

$$\gamma_y = 1-\sqrt{\frac{I_{xn}}{I_{x0}}};$$

$$\gamma_\omega = 1-\sqrt{\frac{I_{\omega n}}{I_{\omega 0}}};$$

$$I_{tz} = I_{t0}(1-\gamma_t t_z);$$

$$\gamma_t = 1-\sqrt[p]{\frac{I_{tn}}{I_{t0}}}.$$

Для двотаврових колон симетричного перерізу зі змінною висотою система диференціальних рівнянь (1) розпадається на диференціальне рівняння, яке описує стійкість в площині та з площини дії згинального моменту, тому друге і третє диференціальне рівняння системи (1) за прийнятими умовами можливо розглядати і вирішувати окремо від першого рівняння. Рішення першого рівняння приведено в [13] і базується на дослідженнях [14, 15]. При переході до безрозмірної координати розташування перерізу $t_z = z/l$ система диференціальних рівнянь, яка описує стійкість колони зі змінною висотою стінки з площини дії згинального моменту, приймає вид

$$\begin{cases} \xi^{IV} + \frac{Nl^2}{EI_{y0}}\xi'' + \frac{M_{xz}l^2}{EI_{y0}}\theta'' - 2y_z'\frac{Nl^2}{EI_{y0}}\theta' = 0; \\ (1-\gamma_\omega \frac{z}{l})^2\theta^{IV} + (\frac{Nr_z^2 l^2}{EI_{\omega 0}} - \frac{GI_{tz}l^2}{EI_{\omega 0}})\theta'' + \frac{M_{xz}l^2}{EI_{\omega 0}}\xi'' - \frac{2y_z' M_{xz}l^2}{EI_{\omega 0}}\theta' = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для спрощення записів прийняті позначення критичних сил, які описують можливість втрати стійкості стержня за різними формами,

$$I_{tm} = I_{t0}(1-\gamma_t t_m);\; r_m^2 = r_0^2(1-\gamma_r t_m)^2;\; k_{t\omega m}^2 = \frac{GI_{t0}l^2}{EI_{\omega 0}}(1-\gamma_t t_m);\; k_y^2 = \frac{Nl^2}{EI_{y0}};$$

$$N_{\omega m} = \frac{\pi^2 EI_{\omega 0}(1-\gamma_\omega t_m)^2}{l^2 r_0^2(1-\gamma_r t_m)^2}[1 + \frac{GI_{t0}l^2(1-\gamma_t t_m)}{\pi^2 EI_{\omega 0}}];$$

$$\frac{N_y}{N_{\omega m}} = \frac{4r_m^2}{h_0^2(1+\frac{GI_{tm}l^2 A}{E\pi^2 AI_y h_0^2})};\; N_y = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2};$$

$$\frac{N_y}{N_{\omega m}} = \frac{4r_m^2}{h_0^2(1+0{,}156\frac{I_{tm}\lambda_y^2}{Ah_0^2})};\; I_{\omega 0} = I_y h_0^2/4;$$

$$k_y^2 = \frac{Nl^2}{EI_{y0}};\; k_{tm}^2 = \frac{GI_{tm}l^2}{EI_{\omega 0}};$$

$$r_m^2 = \frac{I_{ym}+I_{xm}}{A_m} = i_{ym}^2 + i_{xm}^2 = i_{ym}^2(1+\frac{i_{xm}^2}{i_{ym}^2});\; \frac{I_{\omega 0}}{I_{y0}r_m^2} = \frac{h_0^2}{4r_m^2};\; r_m = i_{ym}\sqrt{(1+\frac{i_{xm}^2}{i_{ym}^2})}. \quad (3)$$

Приблизне рішення системи диференціальних рівнянь (4) для граничних умов шарнірного опору стержня із площини дії згинального моменту також може бути побудоване через експотенціальні функції та через через параметр критичного навантаження – k_ϕ.

$$\xi = Ae^{k_\phi t_z}; \xi'' = Ak_y^2 e^{k_\phi t_z}; \xi^{IV} = Ak_y^4 e^{k_\phi t_z}; \quad (4)$$

$$\theta = Be^{k_\phi t_z}; \theta' = k_\phi Be^{k_\phi t_z}; \theta'' = Bk_\phi^2 e^{k_\phi t_z}; \theta^{IV} = Bk_\phi^4 e^{k_\phi t_z}.$$

Підстановка в систему диференціальних рівнянь (4) запропонованого рішення дає систему алгебраїчних рівнянь. Після відповідних перетворень система алгебраїчних рівнянь має вид

$$\begin{cases} A(k_\phi^4 + k_y^2 k_\phi^2) + (\dfrac{e_{ym}}{f_0} k_y^2 k_\phi^2 + 2\gamma_h \dfrac{y_0}{f_0} k_y^2 k_\phi) B = 0; \\ A(\dfrac{e_{ym} I_{y0}}{I_{\omega 0}} k_y^2 k_\phi^2) + B[(1-\gamma_\omega t_m)^2 k_\phi^4 + \\ +(k_y^2 \dfrac{r_m^2 I_{y0}}{I_{\omega 0}} - k_{t\omega}^2) k_\phi^2 + 2\gamma_h \dfrac{y_0 e_{ym} I_{y0}}{I_{\omega 0}} k_y^2 k_\phi] = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Нетривіальне рішення системи (5) отримаємо при виконанні умови (6).

$$\begin{vmatrix} k_\phi^4 + k_y^2 k_\phi^2 & e_{ym} k_y^2 k_\phi^2 + 2\gamma_h y_0 k_y^2 k_\phi \\ \dfrac{e_{ym} I_{y0}}{I_{\omega 0}} k_y^2 k_\phi^2 & \begin{array}{c} (1-\gamma_\omega t_m)^2 k_\phi^4 + (k_y^2 \dfrac{r_m^2 I_{y0}}{I_{\omega 0}} - k_{t\omega}^2) k_\phi^2 + \\ +2\gamma_h \dfrac{y_0 e_{ym} I_{y0}}{I_{\omega 0}} k_y^2 k_\phi \end{array} \end{vmatrix} = 0 \cdot \tag{6}$$

Приведення подібних членів та запис у вид ступеневого алгебраїчного рівняння відносно k_y^2 приводить до такого вигляду критерію стійкості:

$$\frac{k_\phi^4}{k_y^4} + \frac{k_\phi^2}{k_y^2}\left[\frac{k_\phi^2 I_{y0}(r_m^2 + 2\gamma_h y_0 e_{ym}/k_\phi)}{[I_{\omega 0}(1-\gamma_\omega t_m)^2 k_\phi^2 - I_{\omega 0} k_{t\omega m}^2]} + 1\right] +$$
$$+\frac{k_\phi^2 I_{y0}(r_m^2 - e_{ym}^2)}{[I_{\omega 0}(1-\gamma_\omega t_m)^2 k_\phi^2 - I_{\omega 0} k_{t\omega m}^2]} = 0.$$

Для шарнірно обпертого стержня з площини дії згинального моменту граничні умови мають вид

$$z = 0 \rightarrow \theta_0 = 0; \quad \theta_0' = 0; \quad \xi_0 = 0;$$
$$\xi_0' = 0; \quad \eta_0 = 0; \quad \eta_0' = 0;$$
$$z_n = l_0 \rightarrow \theta_n'' = 0; \quad \xi_n'' = 0; \quad \eta_n'' = 0.$$

Значення параметра для обраних граничних умов буде $k_\phi^2 = \pi^2$. Його заміна у відношенні двох параметрів $\dfrac{k_\phi^2}{k_y^2}$ слабо впливає на кінцевий результат

$$\frac{k_\phi^4}{k_y^4}+\frac{k_\phi^2}{k_y^2}\left[\frac{\pi^2 I_{y0}(1+2\gamma_h y_0 e_{ym}/(r_m^2\pi\ ))}{[I_{\omega 0}(1-\gamma_\omega t_m)^2\pi^2/r_m^2-I_{\omega 0}k_{t\omega m}^2/r_m^2]}+1\right]+ \\ +\frac{\pi^2 I_{y0}(1-e_{ym}^2/r_m^2)}{[I_{\omega 0}(1-\gamma_\omega t_m)^2\pi^2/r_m^2-I_{\omega 0}k_{t\omega m}^2/r_m^2]}=0. \qquad (7)$$

Приймемо позначення параметра просторової стійкості

$$\frac{1}{c_y^2}=\frac{k_\phi^4}{k_y^4}. \qquad (8)$$

Введення позначень критичних сил стійкості стержня N_y, $N_{\omega m}$ за (3) дозволяє перейти до спрощеної форми запису рівняння (7) при позначеннях (8)

$$\left(\frac{1}{c_y}\right)^2+\left(\frac{1}{c_y}\right)\left\{\frac{N_y}{N_{\omega m}}[1+2\gamma_h y_0 e_{ym}/(r_m^2\pi\ )]+1\right\}+ \\ +\frac{N_y}{N_{\omega m}}(1-e_{ym}^2/r_m^2)=0. \qquad (9)$$

Рішенням отриманого квадратного рівняння (9) буде:

при $\rho_{em}=\dfrac{2\gamma_h y_0 e_{ym}}{r_m^2\pi}$; $y_0=h_0/2$

$$\left(\frac{1}{c_y}\right)=\frac{\frac{N_y}{N_{\omega m}}[1+\rho_{em}]+1\pm\sqrt{\left\{\frac{N_y}{N_{\omega m}}[1+\rho_{em}]+1\right\}^2-4\frac{N_y}{N_{\omega m}}(1-\frac{e_{ym}^2}{r_m^2})}}{2}; \qquad (10)$$

Максимальне значення параметра просторової стійкості у формі запису, яка прийнята у нормах, слід визначати за формулою

$$c_{y\max}=\frac{2}{\frac{N_y}{N_{\omega m}}(1+\rho_{em})+1+\sqrt{\left\{\frac{N_y}{N_{\omega m}}(1+\rho_{em})+1\right\}^2-4\frac{N_y}{N_{\omega m}}(1-\frac{e_{ym}^2}{r_m^2})}}. \qquad (11)$$

При постійному перерізі колони (γ_h = 0) остання отримана формула переходить у відому формулу визначення максимального значення

$$c_{y\max} = \frac{2}{\dfrac{N_y}{N_{\omega m}} + 1 + \sqrt{\left\{\dfrac{N_y}{N_{\omega m}} + 1)\right\}^2 - 4\dfrac{N_y}{N_{\omega m}}(1 - \dfrac{e_{ym}^2}{r_m^2})}}.$$

$$c_{y\max} = \frac{2}{\dfrac{N_y}{N_{\omega m}} + 1 + \sqrt{\left\{\dfrac{N_y}{N_{\omega m}} - 1)\right\}^2 + 4\dfrac{N_y}{N_{\omega m}}\dfrac{e_{ym}^2}{r_m^2})}}. \quad (12)$$

Заміна у формулі (12) на відношення

$$\frac{N_y}{N_\omega} = \frac{4r_0^2}{h_0^2(2 + \dfrac{GI_{t0}l^2}{E\pi^2 I_{\omega 0}})}$$

приводить до відповідної формули будівельних норм СНиП II-23-81*.

За розрахункові значення ексцентриситету та геометричних характеристик перерізу рекомендується прийняті значення розрахункового перерізу при $t_m = 0{,}5l$, а значення згинального моменту при $t_m = 0{,}3333l$. $M_{xm} = M_{x0}(1 - t_z) = M_{x0}(1 - 0{,}3333) = 0{,}6667M_{x0}$, але не менше половини максимального значення моменту.

Висновки

Таким чином, розроблена методика для перевірки стійкості пружних симетричних двотаврових балок зі змінною висотою стінки з площини дії згинального моменту.

Література

[1] *Пермяков В.А.* Современное состояние проблемы оптимального проектирования стальных конструкций. // Металеві конструкції. – 1998, № 1. – С. 17–20.

[2] *Пермяков В.О., Білик С.І.* Розвиток теорії міцності і стійкості стержнів сталевих каркасів будівель універсального призначення. // Современные строительные конструкции из металла и древесины. Сборник научных трудов. Часть І. – Одесса: МОН України, Одесская ГАСА, 2005. – С. 151–160.

[3] *Енджиевский Л.В., Наделяев В.Д., Петухова И.Я.* Каркасы зданий из легких металлических конструкций и их элементы. – М.: Из-во АСВ, 1998 – 247 с.

[4] *Бейлин Е.А.* Общие уравнения деформационного расчёта и устойчивости тонкостенных стержней // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1969, № 5. – С. 35–41.

[5] *Бейлин Е.А.* Определение дополнительных резервов устойчивости и прочности в центрально- и внецентренносжатых тонкостенных стержневых элементах конструкций // Известия вузов. Строительство и архитектура, – 1995, № 12. – С. 34–40.

[6] *Белый Г.И.* Приближенное решение задач деформационного расчета стержней в упругой среде // Строительная механика сооружений., Межвузов. тематич. сб. тр. – Л.: – ЛИСИ., 1981. – С. 13–22.

[7] *Брудка Я., Гарцарек Р., Милачевски К.* Стальные складчатые конструкции в строительстве. – К.: Будівельник, 1989. – 150 с.

[8] *Власов В.З.* Тонкостенные упругие стержни. – М.: Госиздат, Физматгиз – математической литературы, 1959. – 568 с.

[9] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник, Т.3 / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 567 с.

[10] *Білик С.І.* Рамна конструкція будівлі, формоутворена навколо складного функціонального об'єму // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчій науковий збірник. Випуск 75. – К.: МОН України, КНУБА, 2005. – С. 173–178.

[11] *Билык С.И.* Расчетная длина элементов стальных рам из развитых двутавров с переменной высотой стенки // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1989.

[12] *Білик С.І.* Вплив пружної основи на стійкість сталевих колон рам із параболічним законом зміни жорсткості перерізу // Будівельні конструкції. Міжвідомчій науковий збірник. Випуск 61, том 1. – К: ДНДІ БК, 2004. – С. 244–249.

[13] *Билык С.И.* Совершенствование расчета на устойчивость и прочность двутавров с переменной высотой стенки как элементов стальных каркасов зданий универсального назначения // Современные проблемы совершенствования и развития металлических, деревянных, пластмассовых конструкций в строительстве и на транспорте. III Международная научно-техническая конференция. Сборник научных трудов, часть I – Самара: МОН Российской Ферерации, Самарский ГАСУ, 2005. – С. 262–268.

[14] Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. / Под ред. проф. Уманского А.А. Книга 2. – М.: Изд. лит. по строительству, 1973. 415 с.

[15] Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащенников, Н.Н. Шарошников. М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.

Надійшла до редколегії 25.08.2008 р.