

УДК 624.015

## **Исследование напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости за пределом упругости**

**Шалинский В.В.**, аспирант

ОАО "УкрНИИпроектстальконструкция им. В.Н. Шимановского",  
Украина

**Анотація.** Розглянуто задачу пружнопластичного деформування ниток скінченної жорсткості. Враховані геометрична і фізична нелінійності роботи нитки. Використана пружно-пластична модель матеріалу. Запропоновано метод розрахунку, що базується на принципі можливих переміщень. Наведено приклад чисельного розв'язання задачі при різних навантаженнях. Представлені результати чисельних розрахунків.

**Аннотация.** Рассмотрена задача упругопластического деформирования нитей конечной жесткости. Учтена геометрическая и физическая нелинейности работы нити. Использована упругопластическая модель материала. Предложен метод расчета, который базируется на принципе возможных перемещений. Рассмотрен пример численного решения задачи при разных нагрузках. Представлены результаты численных расчетов.

**Abstract.** The task of elastically-plastic deformation of finite rigidity tendons is considered. Geometrical and physical nonlinear behavior of tendon is taken into account. Elastically-plastic model of material is used. The method of calculation is offered, based on possible displacements principle. The example is illustrated concerning numerical solution of task under different loads action. The results of numerical calculations are given.

**Ключевые слова:** упругость, нити, методы решения, деформирование.

Рассматривается задача о деформировании упругопластических нитей конечной жесткости и методы ее решения. Исследование работы указанных систем путем анализа дифференциальных уравнений равновесия приведено в [4]. В работах [2, 3] решение получено с помощью энергетического метода, использующего обобщенную теорему Кастильяно. Возможность применения уравнения неразрывности деформаций, связывающего длины нити до и после приложения нагрузки, для определения параметров напряженно-деформированного состояния рассмотрена в монографиях [1, 5]. Вследствие значительной геометрической и физической нелинейности задачи во всех отмеченных подходах разрешающие уравнения имеют довольно громоздкий вид, а их решение представляет собой трудоемкий процесс.

В настоящей работе предлагается метод решения указанной задачи, основанный на использовании принципа возможных перемещений [6–9]. В связи со значительной нелинейностью рассматриваемых систем

принцип Лагранжа применяется в своем строгом виде, однако решение представляется в замкнутой форме. При этом расчетные зависимости имеют компактный вид и весьма удобны для практического применения. Представлено решение задачи для конкретно взятого примера при различных загрузках. Построены графики зависимости нагрузки, распора и прогибов от параметра, характеризующего достижение материалом нити предельного состояния по ее длине.

Рассмотрим задачу деформирования нити конечной жесткости за пределом упругости с идеальным поперечным сечением. Материал нити при этом будем считать идеальным упругопластическим, так как такая аппроксимация удовлетворительно отражает работу многих реальных материалов. При работе нити конечной жесткости с поперечным сечением идеального профиля за пределом упругости по ее длине развиваются только два типа участков: упругие и пластические. Это обусловлено тем, что появление в сечениях нити идеального профиля первых пластических деформаций означает реализацию в нем предельного состояния [1]. Последнее несколько облегчает решение задачи, так как позволяет избежать рассмотрения упругопластических участков нити, не внося при этом принципиальных изменений в расчетные зависимости [8].

В основу расчета положим принцип Лагранжа, согласно которому сумма работ всех внешних и внутренних сил на бесконечно малых возможных перемещениях системы из положения равновесия равна нулю. Исходя из этого, для определения распора  $H$  можно использовать следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dF}{dH} - \frac{F}{H} - \frac{EF^2}{\Delta H^2} \left( I_1 + \frac{1}{H^2} I_2 - I_3 \right) - \frac{F^2}{H^2} \left( 1 - \frac{1}{2\Delta} \right) \left( \frac{qEI H_{np}}{HFM_{np}} - \frac{M_{np}^2}{H_{np}^2} (H - H_{np}) - 2 \frac{H}{F} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } I_1 = q \int_0^{\Delta} \frac{M_z^6 m^2}{(Hm + EIM_z^6)^2} dx; \quad I_2 = \frac{q}{2} \int_{\Delta}^{1-\Delta} (M_z^6 - M_{np}) dx; \quad I_3 = EI \int_0^{\Delta} \frac{(M_z^6)^4 m}{(Hm + EIM_z^6)^3} dx,$$

где  $m = y^6 EI$ ;  $F$  – площадь поперечного сечения нити;  $H$  – распор;  $E$  – модуль упругости;  $I$  – момент инерции поперечного сечения нити;  $\Delta$  – координата между упругим и пластическим участками нити;  $q$  – интенсивность равномерно распределенной нагрузки;  $M_z^6$  – балочный изгибающий момент;  $M_{np}$  – предельный изгибающий момент;  $H_{np}$  – предельный распор;  $y^6$  – балочный прогиб.

Данное уравнение содержит неизвестную величину  $\Delta$  – координату границы между упругим и пластическим участками нити. Ее можно определить, прибегнув к совместному решению уравнения (1) с

нелинейным алгебраическим уравнением, характеризующим кривизну нити в упругопластической стадии деформирования при действии равномерно распределенной нагрузки.

$$\frac{6\mu EI(1\Delta - \Delta^2)^2}{\Gamma^3 H(\Gamma^3 \Delta - 2\Delta^3 + \Delta^4) + 12EI\Gamma^2(1\Delta - \Delta^2)} + \frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим упругопластическую нить конечной жесткости пролетом  $l = 150$  м с идеальным поперечным сечением площадью  $F = 1,2 \cdot 10^{-2}$  м<sup>2</sup> и материалом с модулем упругости  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа и пределом текучести  $\sigma_m = 345$  МПа. Нить шарнирно подвешена к двум, расположенным на одном уровне, опорам и нагружена начальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q_l = 0,942$  кН/м. Стрела провисания нити при начальной нагрузке составляет  $y_0 = 6$  м. Нить нагружена двумя видами дополнительных нагрузок: равномерно распределенной по всей длине (рис. 1,а) и сосредоточенной в середине пролета (рис. 1,б) с равными друг другу величинами.

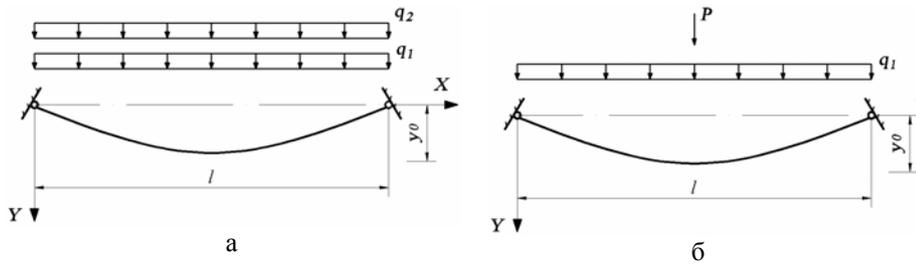


Рис. 1

Исследуем поведение нити в той фазе изгиба, когда в ней развивается область конечной протяженности, охваченная пластическими деформациями. Для определения распора  $H$  в нити конечной жесткости используем уравнения (1) и (2), для решения которых наиболее рациональным является итерационный метод, позволяющий с достаточно большой точностью определить неизвестные величины  $H$  и  $\Delta$ . При этом заметим, что в случае равномерно распределенной нагрузки достаточным является выполнение 4–7 итераций, а при сосредоточенной нагрузке – 3–5 итераций.

На рис. 2 построена зависимость между распором  $H$  и координатой границы между упругими и пластическим участками нити  $\Delta$ . При этом сплошная линия соответствует распределенной нагрузке, а пунктирная – сосредоточенной. Из приведенных кривых видно, что в случае нагружения

нити распределенной нагрузкой пластичность появляется при большей величине распора, чем при загрузке сосредоточенной нагрузкой: при  $H = 1,88$  МН для распределенной и  $H = 1,67$  МН для сосредоточенной нагрузки. Отметим также, что зависимости  $H=f(\Delta)$  близки к параболическому виду, независимо от вида действующей нагрузки. С увеличением пластического участка, а соответственно и параметра  $\Delta$ , кривые сближаются все больше, пока не пересекутся в точке с координатами  $\Delta = 75$  м и  $H = H_{пр} = 4,14$  МН. Тогда нить конечной жесткости становится полностью пластичной и начинает работать подобно гибкой нити, значение распора в которой неизменно и равно предельному. Заметим также, что при других видах загрузок кривые зависимости  $H = f(\Delta)$  будут иметь аналогичный вид и проходить между представленными на рис. 2 графиками.

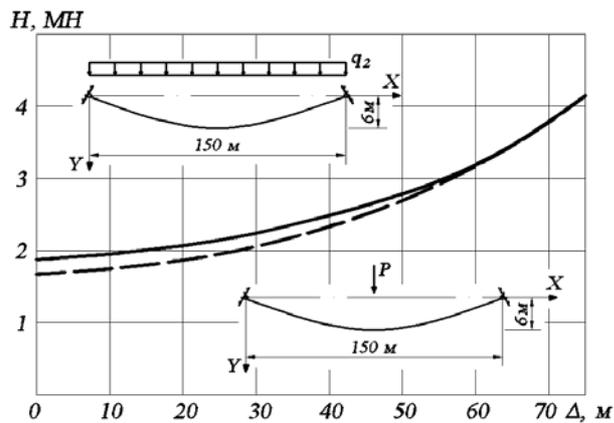


Рис. 2

На рис. 3 изображена зависимость дополнительной распределенной  $q_2$  и сосредоточенной  $P$  нагрузок от координаты границы между упругими и пластическим участками нити  $\Delta$ . Здесь также сплошная линия соответствует распределенной нагрузке, а пунктирная – сосредоточенной. В случае распределенной нагрузки пластичность возникает при  $q_2 = 3,36$  кН/м. С увеличением параметра  $\Delta$  интенсивность нагрузки  $q_2$  увеличивается по зависимости, вид которой близок к параболическому. При  $\Delta = 75$  м нагрузка достигает значения  $q_2 = 8,17$  кН/м и нить становится полностью пластичной. В случае загрузки нити сосредоточенной нагрузкой  $P$  зависимость также близка к параболической, но кривая при этом имеет более пологий вид. При этом нить работает в упругой стадии до тех пор, пока нагрузка не достигнет величины  $P = 221,8$  кН. Полностью пластичной нить становится при значении сосредоточенной нагрузки  $P = 617,0$  кН.

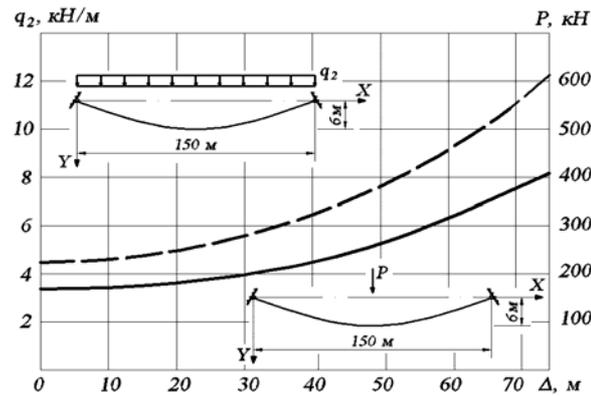


Рис. 3.

На рис. 4 показана зависимость прогибов в середине пролета нити конечной жесткости  $y$  для упругопластической стадии работы от параметра  $\Delta$  при двух вариантах загрузки дополнительной нагрузкой: распределенной по всей длине нити  $q_2$  (сплошная линия) и сосредоточенной в середине пролета  $P$  (пунктирная линия). В случае распределенной нагрузки, как видно из рис. 4, пока длина пластического участка не превысит треть длины нити, увеличение прогибов происходит довольно плавно, после чего – резко возрастает. Для сосредоточенной нагрузки характерно более равномерное увеличение прогибов с возрастанием параметра  $\Delta$ . Следует отметить, что при равных значениях  $\Delta$  величина прогибов больше в случае загрузки нити сосредоточенной нагрузкой. В частности, при  $\Delta = 75$  м максимальный прогиб нити в упругопластической стадии работы составляет 0,192 м для сосредоточенной и только 0,178 м для распределенной нагрузки.

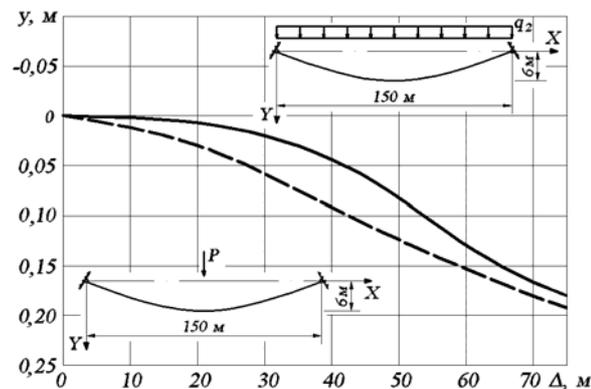


Рис. 4.

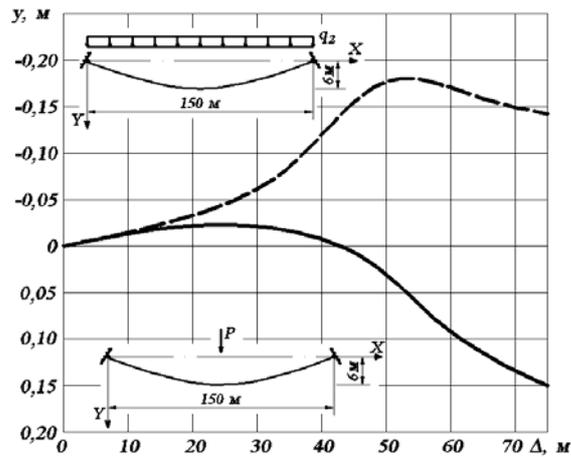


Рис. 5

На рис. 5 построена зависимость между прогибами в четверти пролета нити конечной жесткости  $y$  для упругопластической стадии работы от параметра  $\Delta$ . Здесь также сплошная линия соответствует распределенной нагрузке, а пунктирная – сосредоточенной. Из рисунка видно, что прогибы нити определяются в основном кинематическими составляющими перемещений, связанными с изменением формы кривой провисания. В частности, с увеличением длины пластического участка под действием сосредоточенной нагрузки форма нити стремится к  $V$ -образному виду, а под действием распределенной – приближается к параболическому. Это объясняет то, что при непрерывном возрастании длины пластического участка и соответственно величины нагрузки прогибы нити вначале уменьшаются и нить поднимается, а только затем начинают увеличиваться, а нить – опускаться. Постоянное же увеличение прогибов начинается только после стабилизации формы нити под нагрузкой. При действии распределенной нагрузки максимальное значение прогиба достигает  $y = 0,15$  м. В случае нагружения нити сосредоточенной нагрузкой даже при достижении нитью полной пластичности (при  $\Delta = 75$  м) прогибы остаются отрицательными, а их значение равно  $y = -0,14$  м.

### Выводы

1. Дополнительная сосредоточенная нагрузка в середине пролета вызывает появление текучести при меньших значениях распора, что обусловлено большим значением возникающего изгибающего момента, чем в случае действия распределенной нагрузки. С увеличением нагрузки и ростом пластических деформаций распор стремится к своему предельному

значению, а нить конечной жесткости становится по характеру своей работы подобна гибкой нити.

2. Изменение формы кривой провисания влияет на деформативность нитей конечной жесткости. Если при действии дополнительной равномерно распределенной нагрузки это влияние не очень заметно, то в случае загрузки дополнительной сосредоточенной нагрузкой сечения нити на всем интервале изменения нагрузки могут иметь отрицательные прогибы, а нить подниматься по сравнению со своим исходным положением.

3. Пластические деформации, вызывая перераспределение и выравнивание напряжений в нити конечной жесткости, позволяют нити воспринять значительно большую нагрузку, чем в случае ее работы только в упругой стадии. Вследствие этого предельная нагрузка, приводящая нить в полностью пластичное состояние, более чем в 2,5 раза превышает нагрузку, соответствующую моменту появления первых пластических деформаций.

### **Литература**

- [1] *Дикович И.Л.* Статика упругопластических балок судовых конструкций. – Л.: Издательство "Судостроение", 1967. – 263 с.
- [2] *Еришов Н.Ф.* Один из методов анализа упругопластического состояния пластинок // Прикл. механика. – 1965. – 1, № 8. – С. 47–56.
- [3] *Еришов Н.Ф., Свечников О.И.* Предельное состояние и надежность конструкций речных судов. – Л.: Судостроение, 1970. – 152 с.
- [4] *Лейтес С.Д.* Устойчивость сжатых стальных стержней. – М.: Гос. изд. литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 308 с.
- [5] *Шимановский В.Н., Соколов А.А.* Расчет висячих конструкций за пределом упругости. – К.: Будівельник, 1975. – 104 с.
- [6] *Шимановский А.В.* Некоторые задачи статики нитей конечной жесткости // Строит. механика и расчет сооружений. – 1981. – № 6. – С. 29 – 32.
- [7] *Шимановский А.В.* Исследование напряженно-деформированного состояния нитей конечной жесткости при активном нагружении и разгрузке // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 11. – С. 110–117.
- [8] *Шимановский А.В., Оглобля А.И.* Теория и расчет несущих элементов большепролетных пространственных конструкций. – К.: Издательство "Сталь", 2002. – 372 с.
- [9] *Шимановский А.В., Чабан Н.А.* Аналитические решения нелинейных задач статики нитей конечной жесткости при активных нагружениях // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 6. – С. 121–129.

*Надійшла до редколегії 30.06.2008 р.*