

УДК 624.016.042

Применение видоизмененного решения Файлона в пространственных расчетах коробчатых балок

Кириленко В.Ф., к.т.н.

Национальная академия природоохранного и курортного строительства,
Украина

Анотація. Шляхом розчленування балок на окремі прямокутні пластини і прикладення зусиль взаємодії одержана система рівнянь для визначення напружень у місцях контакту поясів та стінок. Виконаний приклад розрахунку сталеві балки і визначені коефіцієнти приведеної ширини плоских та гофрованих поясів для використання в практичних розрахунках.

Аннотация. Путем расчленения балок на отдельные прямоугольные пластины и приложения усилий взаимодействия получена система уравнений для определения напряжений в местах контакта поясов и стенок. Выполнен пример расчета стальной балки и определены коэффициенты приведенной ширины плоских и гофрированных поясов для использования в практических расчетах.

Abstract. By dismembering of beams into separate rectangular plates and applying interaction forces the system of equations for determination of stresses in the places of waists joining have been received. The example of steel beam calculation has been carried out. Coefficient of the given flat – walled and corrugated plates width for usage in practical calculations has been determined.

Ключевые слова: коробчатые балки, изгиб, плоская задача.

Состояние вопроса и постановка задачи. Двухстенчатые и многостенчатые коробчатые (трубчатые) балки, состоящие из тонких прямоугольных полос, успешно применяются в различных строительных конструкциях, включая пролетные строения мостов, конструкции воздухопроводов и др. Составной частью таких конструкций могут быть и тонкие пластины, усиленные часто поставленными ребрами или выполненные гофрированными и рассматриваемые как конструктивно ортотропные.

При определении напряженно-деформированного состояния трубчатых балок элементарная теория изгиба предполагает равномерное распределение напряжений по ширине полок и дает заниженные значения нормальных напряжений. Это объясняется тем, что части полок, удаленные от стенок в силу явления сдвиговой задержки не вносят полного вклада в момент сопротивления сечения. В практических расчетах действительную ширину полок заменяют некоторой приведенной (эффективной) шириной таким образом, чтобы элементарная теория изгиба, примененная к приведенному сечению, давала те же значения максимальных напряжений [1].

Теоретическую основу определения этой эффективной ширины составляют методы теории упругости, основанные на расчленении трубчатой системы на отдельные пластины с приложением неизвестных усилий взаимодействия по линиям их контакта и нахождения последних из условий совместности деформаций. Применяя известные решения Рибьера и Файлона в тригонометрических рядах, Папкович П.Ф. составил целый ряд готовых решений для основных случаев загрузки прямоугольных полос, ввел понятие редуцированного коэффициента, показал на примере решение задачи изгиба многостенчатой системы судового набора [2]. В дальнейшем классические решения в тригонометрических рядах эффективно применялись в пространственных расчетах пролетных строений балочных мостов, определении напряжений в трехслойных ребристых панелях, в широкополочных балках и т.д.

Несколько иная форма решения плоской задачи теории упругости для прямоугольных изотропных полос в тригонометрических рядах предложена Е.Н. Никольским применительно к расчету элементов кузовов пассажирских вагонов [3]. Такое решение затем разработано для прямоугольных ортотропных пластин при различной степени ортотропии материала [4] и получило дальнейшее развитие [5]. В этих решениях функция напряжений выбрана таким образом, что постоянными интегрирования являются коэффициенты разложений в ряды Фурье контурных нагрузок. Такая форма эффективна при решении как контактных задач, так и различных задач определения напряженного состояния пространственных систем открытого и закрытого профиля, включающих в себя изотропные и ортотропные прямоугольные пластины [6], однако в этой работе не ставилась задача определения приведенной ширины полок.

В настоящей работе с помощью видоизмененного решения типа Файлона ставится задача определения напряженного состояния трубчатой балки, состоящей из прямоугольных полос, и на этой основе вычисления коэффициентов приведенной ширины полок, которые затем могут быть использованы в практических расчетах.

Определение напряжений в трубчатой балке. Рассмотрим напряженное состояние двухстенчатой трубчатой балки, находящейся под действием распределенной нагрузки интенсивностью на единицу площади кромок стенок p (рис. 1). Высота балки по сравнению с толщиной поясов, как и ширина поясов по сравнению с толщиной стенок предполагается большой, вследствие чего искривление стенок в вертикальной плоскости и искривление поясов в горизонтальной плоскости весьма мало, что дает возможность не учитывать при этом изменение нагрузки на кромках и рассматривать все элементы в условиях плоского напряженного состояния. Предполагается, что концы балок находятся в условиях свободного подве-

са, поэтому распределение напряжений как в стенках балок, так и поясах может быть найдено с помощью решения Файлона.

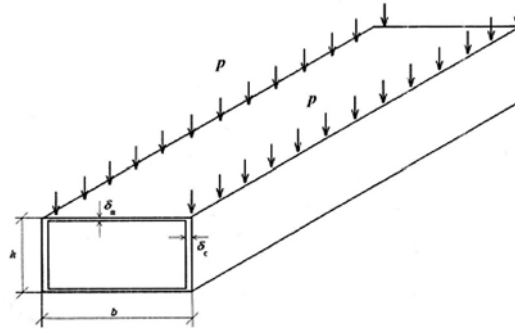


Рис. 1. Коробчатая двухстенчатая балка

При отделении стенок от поясов продольные кромки стенок балки будут загружены заданными нормальными напряжениями p и касательными напряжениями $t_a(x)$ и $t_b(x)$, верхний и нижний пояса – только касательными напряжениями $\delta_c/\delta_n t_a(x)$ и $\delta_c/\delta_n t_b(x)$, приложенными по продольным кромкам (рис. 2). Здесь коэффициенты δ_c/δ_n введены из условия равенства погонных усилий в местах контакта поясов со стенками.

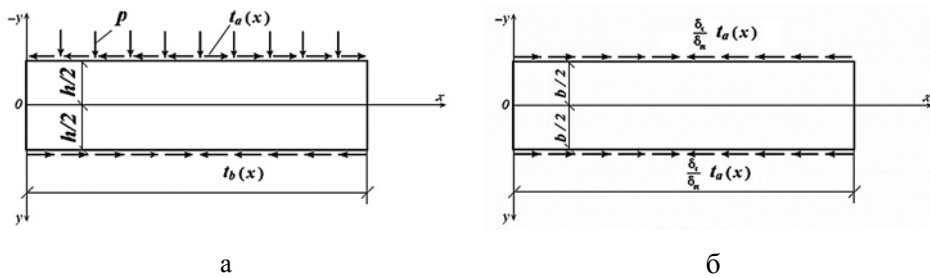


Рис. 2 Расчетные схемы стенок (а) и верхней полки (б)

При решении задачи с помощью тригонометрических рядов нагрузку p и искомые касательные напряжения $t_a(x)$ и $t_b(x)$ для стенок балки представим в виде рядов

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \alpha x, \quad t_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \alpha x, \quad t_b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos \alpha x, \quad (1)$$

где $\alpha = n\pi/l$; $n=1,2,3,\dots$; a_n, c_n, g_n – коэффициенты разложений, опре-

деляемые формулами Фурье

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 p \sin \alpha x \times dx = \frac{4p}{n\pi} \text{ при } n = 1, 3, 5$$

$$c_n = \frac{2}{1} \int_0^1 t_a(x) dx,$$

$$g_n = \frac{2}{1} \int_0^1 t_b(x) dx. \quad (2)$$

Функцию напряжений примем в виде видоизмененного решения типа Файлона

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{\alpha^2} \left[a_n \psi_1(y) + b_n \psi_2(y) + c_n \psi_3(y) + g_n \psi_4(y) \right] \right\} \sin \alpha x, \quad (3)$$

где a_n, b_n – коэффициенты разложений в ряды Фурье контурных, нормальных к продольным кромкам, нагрузок; c_n, g_n – то же, касательных; $\psi_i(y)$ – функции, не зависящие от контурных нагрузок, а зависящие от вида корней характеристического уравнения

$$r^4 - m_1 \alpha^2 r^2 + m_2 \alpha^4 = 0. \quad (4)$$

В этом уравнении $m_1 = \frac{E}{G} - 2\nu_{12}$; $m_2 = \frac{E_1}{E_2}$, E_1, E_2, G, ν_{12} – главные упругие постоянные материала пластин. Для изотропного тела $E_1 = E_2 = E$; $G = E/2(1+\nu)$, $\nu_{12} = \nu$ и коэффициенты $m_1 = 2$; $m_2 = 1$.

Возможны четыре случая:

1. $m_1^2 > 4m_2$ – все корни действительные и разные: $r_{1,2} = \pm S_1 \alpha$; $r_{3,4} = \pm S_2 \alpha$ ($S_1 > 0, S_2 > 0$);
2. $m_1^2 = 4m_2$ – все корни действительные, попарно кратные: $r_{1,2} = S \alpha$; $r_{3,4} = -S \alpha$ ($S > 0$);
3. $m_1^2 < 4m_2$ – четыре корни комплексные, попарно сопряженные: $r_{1,2} = (S \pm Ki) \alpha$; $r_{3,4} = (-S \pm Ki) \alpha$ ($S > 0; K > 0$);
4. $m_1^2 = 4m_2 = 4$ – изотропная пластинка $r_{1,2} = \alpha$; $r_{3,4} = -\alpha$.

Формулы для напряжений при заданных напряжениях на продольных кромках стенок

$$\sigma_x = \frac{2F}{y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} \left[a_n \psi_1''(y) + b_n \psi_2''(y) + c_n \psi_3''(y) + g_n \psi_4''(y) \right] \sin \alpha x;$$

$$\sigma_y = \frac{2F}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \psi_1(y) + b_n \psi_2(y) + c_n \psi_3(y) + g_n \psi_4(y) \right] \sin \alpha x; \quad (5)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2F}{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \left[a_n \psi_1'(y) + b_n \psi_2'(y) + c_n \psi_3'(y) + g_n \psi_4'(y) \right] \cos \alpha x.$$

Здесь $\psi_1'(y)$ и $\psi_1''(y)$ - первые и вторые производные функций $\psi_1(y)$, определяемые для изотропных пластин согласно [3], для ортотропных – согласно [5, 6].

С учетом граничных условий для стенок в выражениях (3), (5) необходимо положить $b_n=0$. Для нижней и верхней полок не накладывается никаких ограничений в отношении перемещений продольных кромок в направлении оси y ($\sigma_y = 0$ при $y = \pm b/2$), следовательно для полок $a_n = b_n = 0$; Кроме того, в силу симметрии $g_n = -c_n$.

Из соотношений закона Гука для изотропной стенки балки относительные деформации продольных кромок стенок $E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_y$

$$E\varepsilon_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{\alpha^2} \left[a_n \psi_1''\left(-\frac{h}{2}\right) + c_n \psi_3''\left(-\frac{h}{2}\right) + g_n \psi_4''\left(-\frac{h}{2}\right) \right] - a_n \nu \right\} \sin \alpha x$$

при $y = -\frac{h}{2}$;

$$E\varepsilon_x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\alpha^2} \left[a_n \psi_1''\left(\frac{h}{2}\right) + c_n \psi_3''\left(\frac{h}{2}\right) + g_n \psi_4''\left(\frac{h}{2}\right) \right] \sin \alpha x$$

при $y = +\frac{h}{2}$.

С учетом граничных условий относительные деформации продольных кромок полок из изотропного материала при $y = -b/2$:

— верхний пояс

$$E\varepsilon_x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\alpha^2} \frac{\delta_c}{\delta_n} c_n \left[\psi_3'' \left(-\frac{b}{2} \right) - \psi_4'' \left(-\frac{b}{2} \right) \right] \sin \alpha x ; \quad (6)$$

— нижний пояс

$$E\varepsilon_x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\alpha^2} \frac{\delta_c}{\delta_n} g_n \left[\psi_3'' \left(-\frac{b}{2} \right) - \psi_4'' \left(-\frac{b}{2} \right) \right] \sin \alpha x .$$

Приравнявая относительные деформации продольных кромок стенок соответствующим деформациям продольных кромок поясов, получим систему двух алгебраических уравнений для определения коэффициентов Фурье искоемых касательных напряжений

$$\begin{aligned} c_n \left\{ \psi_3'' \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{\delta_c}{\delta_n} \left[\psi_3'' \left(-\frac{b}{2} \right) - \psi_4'' \left(\frac{b}{2} \right) \right] \right\} + g_n \psi_4'' \left(\frac{h}{2} \right) &= a_n \left[\psi_1'' \left(-\frac{h}{2} \right) + \nu_1 \alpha^2 \right]; \\ c_n \psi_3'' \left(\frac{h}{2} \right) + g_n \left\{ \psi_4'' \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{\delta_c}{\delta_n} \left[\psi_3'' \left(-\frac{b}{2} \right) - \psi_4'' \left(-\frac{b}{2} \right) \right] \right\} &= a_n \psi_1'' \left(\frac{h}{2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\psi_1(\pm h/2)$ и $\psi_1''(-b/2)$ – вторые производные функций $\psi_1(y)$ соответственно на продольных кромках стенок и полок при $y=-b/2$, определяемые согласно [3] следующим образом:

$$\begin{aligned} Z \times \psi_1''(h/2) &= 4u_n \operatorname{sh} 2u_n \alpha^2; \quad Z \times \psi_1''(-h/2) = -(\operatorname{sh}^2 2u_n + 4u_n^2) \alpha^2; \\ Z \times \psi_3''(h/2) &= -Z \psi_4''(-h/2) = (-2\operatorname{sh} 2u_n + 4u_n \operatorname{ch} 2u_n) \alpha^2; \\ Z \times \psi_4''(h/2) &= -Z \psi_3''(-h/2) = (\operatorname{sh} 4u_n - 4u_n) \alpha^2, \quad Z = \operatorname{sh}^2 2u_n - 4u_n^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь для стенок $u_n = \pi h / 2l$ для полок вторые производные $\psi_3''(-b/2)$ и $\psi_4''(-b/2)$ будут определяться выражениями (8), в которых необходимо положить $u_n = \alpha b / 2 = \pi b / 2l$.

Пример определения напряжений в стальной балке. В качестве примера выполним расчет стальной балки ($\nu = 0,3$) для частого случая, когда

$$h/l = 1/10; \quad b/l = 5; \quad \delta_n / \delta_c = 1,5 .$$

Вычисление коэффициентов a_n и вторых производных функций $\psi_i(y)$ на продольных кромках стенки ($y = \pm h/2$) и поясов ($y = -b/2$) согласно (8) для первых трех членов тригонометрического ряда представлено в таблице.

Таблица

Коэффициенты a_n и вторые производные функций $\psi_i(y)$

| n | $\frac{a_n}{p}$ | Стенка | | | | Полка | |
|-----|-----------------|-------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| | | $\psi_1''\left(\frac{-h}{2}\right)$ | $\psi_1''\left(\frac{h}{2}\right)$ | $\psi_3''\left(\frac{h}{2}\right)$ | $\psi_4''\left(\frac{h}{2}\right)$ | $\psi_3''\left(\frac{-b}{2}\right)$ | $\psi_4''\left(\frac{-b}{2}\right)$ |
| 1 | 1,273 | $-60,82 \alpha^2$ | $60,82 \alpha^2$ | $6,30 \alpha^2$ | $12,79 \alpha^2$ | $-6,53 \alpha^2$ | $-3,14 \alpha^2$ |
| 2 | 0,424 | $-6,996 \alpha^2$ | $6,923 \alpha^2$ | $2,055 \alpha^2$ | $4,495 \alpha^2$ | $-2,62 \alpha^2$ | $-0,92 \alpha^2$ |
| 3 | 0,255 | $-2,970 \alpha^2$ | $2,556 \alpha^2$ | $1,159 \alpha^2$ | $2,970 \alpha^2$ | $-2,169 \alpha^2$ | $-0,403 \alpha^2$ |

После подстановки этих значений в систему уравнений (7) и в результате ее решения получим значения коэффициентов c_n и g_n касательных напряжений. В результате этого неизвестные напряжения $t_a(x)$ и $t_b(x)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} t_a(x) &= 3,60p \cos \pi x/l + 0,360p \cos 3\pi x/l + 0,115p \cos 5\pi x/l + \dots; \\ t_b(x) &= 3,628p \cos \pi x/l + 0,39p \cos 3\pi x/l + 0,125p \cos 5\pi x/l + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Сопоставим полученные результаты со скалывающими напряжениями, определяемые по формуле сопротивления материалов

$$\tau = \frac{QS}{2\delta_c J}, \quad (10)$$

где Q – поперечная сила; J – момент инерции поперечного сечения; S – статический момент пояса относительно нейтральной оси; $2\delta_c$ – толщина двух стенок балки.

В рассматриваемом примере $Q = 2p\delta_c (1/2 - x)$, кроме того, при условии, что δ_c и δ_n малы по сравнению с высотой сечения

$$\begin{aligned} J &= \frac{h^2}{2} \left(b\delta_n + \frac{h\delta_c}{3} \right); \\ S &= b\delta_n h/2; \quad h/l = 1/10; \quad b/l = 5; \quad \delta_n/\delta_c = 1,5. \end{aligned}$$

После подстановки этих значений в (10) получим

$$\tau = 4,5p(1/2 - x). \quad (11)$$

Сопоставление наибольших напряжений (9) и (11) показывает, что напряжения (9) получились на самом деле несколько меньшими, чем это дает элементарная формула (10). Это уменьшение является естественным следствием неравномерности распределения напряжений по ширине поясов, уменьшающей долю участия поясов в работе всего сечения.

Определение приведенной ширины поясов. Для практических расчетов балок, основанных на методах сопротивления материалов коэффициент приведенной ширины поясов определяется следующим образом:

$$k = \frac{\sigma_x^{\text{cp}}}{\sigma_x^{\text{max}}},$$

где σ_x^{cp} – нормальные напряжения в поясах при условии их равномерного распределения по ширине; σ_x^{max} – максимальные напряжения в поясах в местах соединения со стенками, определяемые согласно (6).

Для верхней полки балки (рис. 2б), находящейся под действием симметрично приложенных касательных напряжений,

$$\sigma_x^{\text{cp}} = \frac{\delta_c}{\delta_n} \frac{I}{\delta_n b} \int 2t_a(x) \delta_n dx = \frac{\delta_c \times 2}{\delta_n} \int c_n \cos dx = \frac{\delta_c}{\delta_n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n} c_n \sin \alpha x.$$

Максимальные напряжения в верхнем поясе согласно (6)

$$\sigma_x^{\text{max}} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\alpha^2} \frac{\delta_c}{\delta_n} c_n [\psi_3^2(-b/2) - \psi_4^2(-b/2)] \sin \alpha x.$$

Коэффициент приведенной ширины верхнего пояса

$$k = \frac{\sigma_x^{\text{cp}}}{\sigma_x^{\text{max}}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_c}{\delta_n} \frac{1}{u_n} c_n \sin \alpha x}{\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\alpha^2} \frac{\delta_c}{\delta_n} c_n [\psi_3^2(-b/2) - \psi_4^2(-b/2)] \sin \alpha x}. \quad (12)$$

С учетом значений вторых производных согласно (8)

$$k = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n} c_n \sin \alpha x}{\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{4\text{ch}^2 u_n}{2u_n + \text{sh} 2u_n} \sin \alpha x}. \quad (13)$$

При учете только первого члена ряда ($n=1$) для среднего сечения балки

$$k = \frac{2u_n + \text{sh}2u_n}{4u_n \text{ch}^2 u_n}. \quad (14)$$

В принятом примере для верхнего пояса коэффициенты c_n необходимо взять согласно первого выражения (9) с умножением на δ_c/δ_n для нижнего – из второго. Коэффициент k согласно (12) при учете первых трех членов ряда для середины пролета

$$k = \frac{2,40 p/0,3142 - 0,24 p/0,9424 + 0,076 p/1,5708}{2,40 p \times 3,39 - 0,24 p \times 1,134 + 0,076 p \times 1,178} = 0,934.$$

То же, для нижнего пояса

$$k = \frac{2,419 p/0,3142 - 0,26 p/0,9424 + 0,083 p/1,5708}{2,419 p \times 3,39 - 0,26 p \times 1,134 + 0,089 p \times 1,178} = 0,937.$$

При учете только первого члена ряда согласно (12)

$$k = \frac{\alpha^2}{u_n [\psi_3^2(-b/2) - \psi_4^2(-b/2)]} = \frac{1}{0,3142 \times 3,39} = 0,938.$$

Поскольку значение коэффициента k при учете трех членов тригонометрического ряда мало отличается от его значения при учете только первого члена, в практических расчетах можно использовать выражение (14) как самое простое. На рис. 3 показана зависимость этого коэффициента от отношения l/b верхнего (нижнего) пояса.

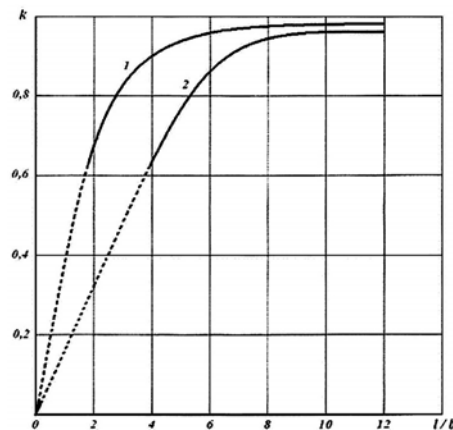


Рис. 3. Коэффициенты приведенной ширины плоского (1) и гофрированного поясов (2)

Для повышения местной устойчивости полки трубчатых балок могут быть выполнены с продольной гофрировкой. Такой пояс можно рассматривать как конструктивно ортотропную пластину с упругими постоянными, определяющимися геометрией гофров и модулем упругости стали. Многочисленные расчеты показывают, что в этом случае корни характеристического уравнения (4) комплексные ($\pm s \pm ki$), а вторые производные функций $\psi_i(y)$ на продольных кромках будут определяться согласно [4] выражениями

$$\begin{aligned}\psi_3''(-b/2) &= \frac{1}{Z} (k \times \text{sh} 4u_n - s \times \sin 4ku_n) k s \alpha^2; \\ \psi_4''(-b/2) &= \frac{2}{Z} (k \times \text{sh} 2su_n \times \cos 2ku_n - s \times \text{ch} 2su_n \times \sin 2ku_n) k s \alpha^2.\end{aligned}\quad (15)$$

Здесь $Z = k^2 \text{sh}^2 2su_n - s^2 \times \sin^2 2ku_n$.

Коэффициенты приведенной ширины гофрированного (ортотропного) пояса будут в этом случае также определяться согласно (12), в котором вторые производные функций $\psi_i(y)$ определяются согласно (15). Как и в случае плоскостенчатых поясов, можно ограничиться только первым членом ряда ($n=1$), тогда

$$k = \frac{k \times \text{sh} 2su_n + s \times \sin 2ku_n}{2ksu_n (\text{ch} 2su_n + \cos 2ku_n)}.\quad (16)$$

В качестве примера примем упругие постоянные ортотропного верхнего пояса, соответствующего гофрированному, следующими: $E_x=1,5E$; $E_y=0,01E$; $\nu_x=0,3$; $G=0,256E$, где $E=2,1 \cdot 10^4$ кН/см²

Решение характеристического уравнения (4) дает комплексные корни $s=2,74$; $k=2,2$. Для гофрированного пояса при $b/l=1/5$ согласно (16) при $u_n = 1 \times \pi b / 2l = 0,3142$

$$k = \frac{2,2 \times \text{sh} 2 \times 2,74 \times 0,3142 + 2,74 \times \sin 2 \times 2,2 \times 0,3142}{2 \times 2,74 \times 2,2 \times 0,3142 (\text{ch} 2 \times 2,74 \times 0,3142 + \cos 2 \times 2,2 \times 0,3142)} = 0,796.$$

Сравнение значений коэффициента с его значением для плоскостенчатого пояса показывает падение на 15 %, что увеличивает неравномерность распределения нормальных напряжений по ширине гофрированных поясов. На рис. 3 показана зависимость коэффициента приведенной ширины гофрированного (ортотропного) пояса согласно (16) от соотношения l/b поясов балки.

Выводы

Использование для расчета трубчатых балок видоизмененного решения типа Файлона позволяет в компактной форме получить систему уравнений для определения скалывающих напряжений в местах контакта поясов со стенками, пригодной как для изотропных, так и ортотропных пластинчатых систем с различной их комбинацией для поясов и стенок. В последнем случае в эту систему необходимо ввести только отношение модулей упругости вдоль продольной оси балки для поясов и стенок.

Расчет стальной балки с параметрами $l/h = 10$ и $l/b = 5$ показал некоторое уменьшение касательных напряжений по сравнению с элементарным решением, что является следствием неравномерности распределения нормальных напряжений по ширине поясов.

Для использования в практических расчетах получены значения коэффициентов приведенной ширины поясов в форме, пригодной как для изотропных, так и ортотропных пластин с любой степенью анизотропии. Для плоскостенчатого и гофрированного пояса получены формулы и графики зависимости этого коэффициента от отношения l/b балки.

Литература

- [1] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
- [2] Папкович П.Ф Теория упругости. – М.Л.: Оборонгиз, 1939. – 638 с.
- [3] Никольский Е.Н. Оболочки с вырезами типа вагонных кузовов. – М.: Машиностроение, 1963. – 312 с.
- [4] Лозбинев В.П. Форма решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной ортотропной пластинки // Вопросы транспортного машиностроения. – Брянск, 1974. – Вып. 3 – С. 190 – 202.
- [5] Кириленко В.Ф. Подальший розвиток видозмінюваного рішення типу Файлона для прямокутної ортотропної пластинки // Вісник Сумського державного агроуніверситету. – 2000. - № 5. – С. 42 – 47.
- [6] Кириленко В.Ф. Напряженное состояние коробчатых изгибаемых элементов, выполненных из изотропных и конструктивно-анизотропных материалов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1983. – № 6. – С. 63 – 66.

Надійшла до редколегії 05.06.2009 р.