

УДК 539.3

## Численный расчет большепролетных регулярно-ребристых оболочек на упругоподатливом контуре на основе конструктивно-ортотропных моделей

<sup>1</sup>Цыхановский В.К., д.т.н., <sup>2</sup>Талах С.М., к.т.н., докторант

ОАО «УкрНИИПроектстальконструкция им. В.Н. Шимановского», Украина  
Национальный авиационный университет, Украина

**Анотація.** Розроблена фізико-механічна модель однорідних гнучких конструктивно-ортотропних оболонок на основі узагальненого закону Гука, розповсюдженого на область скінченних деформацій з використанням структурної симетрії конструкцій тонколистових оболонок, які працюють сумісно з монтажною пружною постіллю з ниток скінченної жорсткості та пружнопіддатливим контуром. Модель реалізована на прикладах чисельних міцнісних розрахунків і оптимізації великопрогонових комбінованих оболочкових систем на основі метода скінченних елементів.

**Аннотация.** Разработана физико-механическая модель однородных гибких конструктивно-ортотропных оболочек на основе обобщенного закона Гука, распространенного на область конечных деформаций с использованием структурной симметрии конструкций тонколистовых оболочек, работающих совместно с монтажной упругой постелью из нитей конечных жесткостей и упругоподатливым контуром. Модель реализована в примерах численных прочностных расчетов и оптимизации большепролетных комбинированных оболочечных систем на основе метода конечных элементов.

**Abstract.** Physics-mechanical model of homogeneous flexible constructive-orthotropic shells on generalizing law of Guk, which has been spreaded on sphere finite deformation, with using of structure symmetry thin shells have been worked with elastic bedding in threads of finite strict and elastic-pliant contour was elaborated. Model was realized in examples numerical of strength solutions due optimization of large-span combined shell-systems on base of finite element method.

**Ключевые слова:** анизотропное однородное твердое тело, упругая симметрия, изотропные и ортотропные среды, криволинейная и прямолинейная ортотропия, технические константы ортотропного материала, тензоры преобразования, упругий потенциал, эквивалентная однородная упругая среда, однородная ортотропная оболочка.

Рассматриваются задачи расчета большепролетных оболочек сложной формы на упругоподатливом пространственном контуре с учетом геометрической и физической нелинейности в постановке задачи. Форма оболочки (срединная поверхность) описывается с помощью аналитического сплайна с использованием канонического уравнения поверхности гиперболического параболоида. Контур в пространстве кусочно-линейный и в плане имеет форму ромбовидного параллелограмма с размерами по диагонали до 180 – 200 м.

Решается задача оптимизации формы и структуры комбинированной оболочечной конструкции с использованием геометрического моделирования формы срединной поверхности оболочки и физического моделирования опорного контура и других элементов каркаса. Реальная неоднородная конструкция тонколистовой оболочки с регулярно расположенными ребрами в виде нитей конечной жесткости в одном направлении по образующим линейчатой поверхности моделируется однородной конструктивно-ортотропной тонкой оболочкой.

На основе геометрического и структурного моделирования достигается глобальная редукция параметров проектирования дискретной формы оболочки и опорного каркаса, а задача оптимизации сводится к ограниченному числу (до 10 – 15) обобщенных параметров проектирования и состояния. Задача оптимального проектирования решается на основе прямого поиска с нелинейными ограничениями по прочности [1, 2]. Окончательно задача сводится к итерационному процессу решения систем нелинейных алгебраических уравнений большого порядка с использованием методов нелинейного программирования, продолжения по параметру возмущения и Ньютона-Канторовича. Получены результаты численного решения для оптимального варианта комбинированной оболочечной конструкции с двоякой гауссовой кривизной на упругоподатливом трубо-бетонном контуре с пролетом – 160 м (проекция диагонали покрытия).

На основе разработанной методики выполнена численная реализация исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) рассматриваемого класса оболочечных конструкций с использованием моментной схемы конечных элементов [1 – 4].

Армированный в направлении нитей конечной жесткости материал оболочки можно с некоторым приближением рассматривать как однородную и анизотропную упругую среду, обладающую в зависимости от структуры армирования, тем или иным видом структурной симметрии, которая влияет соответственно на симметрию свойств твердого тела – упругую симметрию [5]. Исходя из этого, тонколистовые оболочки с циклическим расположением низких ребер-вставок можно рассматривать как армированные композиты и соответственно как однородные ортотропные упругие среды (в пределах, в каких деформации под действием внешней нагрузки можно считать упругими). Проблема заключается в том, как теоретически определять упругие характеристики «армированного» оболочечного материала [5, 6]. Это достаточно хорошо изучено для пластин, а в отношении оболочек это „армирование” носит в определенной степени индивидуальный характер, который присущий конкретной рассматриваемой конструкции.

Для каждого конкретного случая следует выбрать циклически повторяемый конструктивный фрагмент рассматриваемого “армирования” и определить соответствующие конструктивные и физико-механические параметры, следуя условиям соответствующей упругой симметрии [5].

Рассмотрим структурную симметрию циклически повторяемого конструктивного фрагмента тонколистовой оболочки с регулярно-расположенными ортогональными ребрами, представленного на рис. 1. В соответствии со структурной симметрией реальной оболочечной конструкции и с учетом условий совместности деформаций тонколистового материала оболочки и ребер можно принять следующую модель упругой симметрии: в касательной плоскости к срединной поверхности материал оболочки рассматриваем как среду с изотропной упругой симметрией, а в двух ортогональных плоскостях к срединной поверхности рассматриваем ортотропную упругую симметрию.

Исходные геометрические и физико-механические параметры оболочки с ребрами следующие:  $h_0, h_{r(e)}, h_{r(b)}, b_{r(e)}, b_{r(b)}, f_a, f_b, E, G, \nu$  ( $E, G, \nu$  – технические константы изотропного материала тонколистовой оболочки). Свойства материала конструктивно-ортотропной условной гладкой модели оболочки, эквивалентной для рассматриваемого расчетного фрагмента (см. рис. 1), описываются следующими геометрическими и физико-механическими параметрами:  $h_{(e)}, l, b, E_1^{(e)}, E_2^{(e)}, E_3^{(e)}, G_{12}^{(e)}, G_{13}^{(e)}, \nu_{21}^{(e)}, \nu_{31}^{(e)}, \nu_{32}^{(e)}$  (девять независимых технических констант и три независимых геометрических параметра), с использованием которых можно получить уравнение состояния однородного ортотропного материала оболочки. Параметры  $l$  и  $b$  являются постоянными для заданной структурной симметрии оболочечной конструкции, а параметр  $h_{(e)}$  и физико-механические характеристики определяем из условий принятой упругой симметрии, условий эквивалентности продольной (цилиндрической), сдвиговой и изгибной жесткостей расчетного фрагмента относительно осей базиса ортотропии  $Ox^1x^2x^3$  и термодинамических ограничений для ортотропного материала

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}; E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}; E_2 \nu_{31} = E_1 \nu_{13}; |\nu_{12}| < (E_2 / E_1)^{1/2};$$
$$|\nu_{21}| < (E_1 / E_2)^{1/2}; E_1, E_2, E_3, G_{12} > 0; \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{31} < 0,5. \quad (1)$$

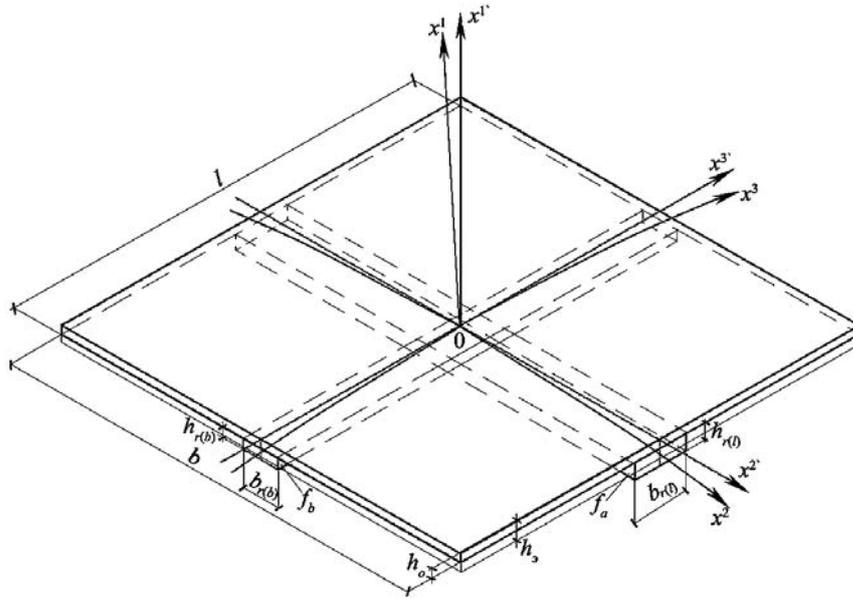


Рис. 1. Конструктивна схема расчетного фрагмента с учетом циклической (структурной) симметрии.

Учитывая, что исследуемые оболочки относятся к классу тонких и, исходя из принятых условий симметрии, – условий равенства упругих потенциалов для рассматриваемых моделей можно принять:

$$E_1^{(e)} = E; \quad \nu_{21} = \nu_{31} = \nu; \quad G_{12}^{(e)} = G_{13}^{(e)} = G. \quad (2)$$

С учетом (2) достаточно определить один независимый геометрический параметр  $h_{(e)}$  и четыре независимых технических константы конструктивно-ортоотропной условно гладкой модели однородной тонколистовой оболочки –  $E_2^{(e)}$ ,  $E_3^{(e)}$ ,  $G_{23}^{(e)}$ ,  $\nu_{32}^{(e)}$ . Для их определения с использованием выше указанных условий получим пять уравнений:

$$\begin{aligned} E_2^{(e)} \cdot l \cdot h_{(e)} &= EA_{(g)}^{(2)}; \quad E_3^{(e)} \cdot b \cdot h_{(e)} = EA_{(g)}^{(3)}; \\ E_2^{(e)} \cdot \frac{l \cdot h_{(e)}^3}{12} &= EI_{(g)}^{(2)}; \quad E_3^{(e)} \cdot \frac{b \cdot h_{(e)}^3}{12} = EI_{(g)}^{(3)}; \quad G_{23}^{(l)} \cdot l \cdot b = G \cdot l \cdot b. \end{aligned} \quad (3)$$

Решая систему уравнений (3), получим:

$$E_2^{(e)} = \frac{1}{l} \sqrt{[EA_{(g)}^{(2)}]^3 / 12EA_{(g)}^{(2)}}; \quad G_{23}^{(l)} = G;$$

$$E_3^{(e)} = \frac{1}{b} \sqrt{[EA_{(g)}^{(3)}]^3 / 12EA_{(g)}^{(3)}}; \quad h_{(e)}^{2(3)} = \sqrt{\frac{12EI_{(g)}^{(2)(3)}}{EA_{(g)}^{(2)(3)}}}, \quad (4)$$

где  $EA_{(g)}^{(2)}$ ,  $EA_{(g)}^{(3)}$ ,  $EI_{(g)}^{(2)}$ ,  $EA_{(g)}^{(3)}$  – соответственно продольные и изгибные жесткости относительно осей  $OX^2$  и  $OX^3$  соответственно для структурно-симметричного расчетного фрагмента неоднородной конструкции тонколистовой оболочки (см. рис. 1).

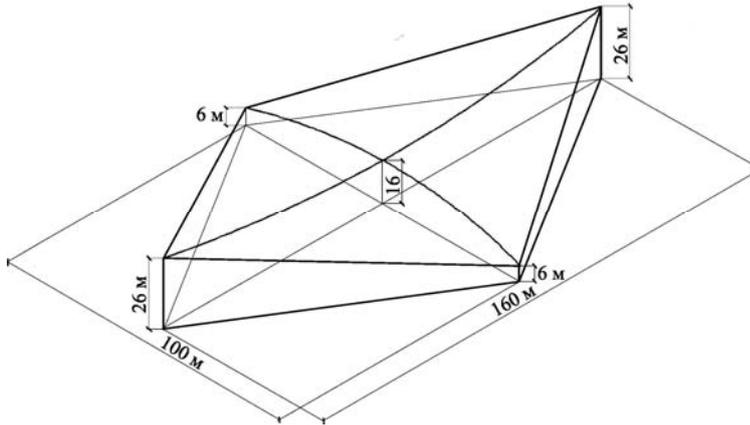


Рис. 2. Схема покрытия

Для обеспечения условий гладкости материала эквивалентной тонкой оболочки, работающей преимущественно на растяжение – сжатие, принимаем величину  $h_{(e)}$  в соответствии с неравенством

$$h_{(e)}^{(2)(3)\min} \leq h_{(e)} \leq h_{(e)}^{(2)(3)\max} \quad (5)$$

и последующим уточнением технических констант ортотропии

$$E_{(2)(3)}^{(e)} = EA_{(g)}^{(2)(3)} / l(b) \cdot h_{(e)}. \quad (6)$$

Независимый коэффициент Пуассона  $\nu_{32}$  определяем из условий термодинамических ограничений

$$E_2\nu_{32} = E_3\nu_{23}; \quad |\nu_{23}| < (E_3 / E_2)^{1/2}; \quad |\nu_{32}| < (E_2 / E_3)^{1/2}. \quad (7)$$

В формулах (2) – (6) используются следующие соотношения (см. рис. 1):

$$EA_{(g)}^{(2)} = E(f_a + h_0 \cdot l); \quad EA_{(g)}^{(3)} = E(f_b + h_0 b);$$

$$EI_{(g)}^{(2)} = \frac{E}{12} \left[ l \cdot h_0^3 + b_{r(l)} h_{r(l)}^3 + 3f_a (h_0 + h_{r(l)})^2 \right]; \quad (8)$$

$$EI_{(g)}^{(3)} = \frac{E}{12} \left[ b \cdot h_0^3 + b_{r(b)} h_{r(b)}^3 + 3f_b (h_0 + h_{r(b)})^2 \right].$$

С использованием полученных технических констант условно-гладкой конструктивно-ортотропной модели конструкции тонколистовой оболочки вычислим компоненты тензора упругости  $\hat{C}_4^{(e)}$  в исходной конфигурации [1]:

$$C^{ijkl} = \overset{o}{C}^{strp} \overset{*}{S}_s^i \overset{*}{S}_t^j \overset{*}{S}_r^k \overset{*}{S}_p^l; \quad \overset{*}{S}_s^i = \delta_s^i + \overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{u}^k, \quad (9)$$

где  $\overset{*}{S}_k^i$  – компоненты аффинного тензора преобразования натурального базиса лагранжевой системы координат в базис исходной конфигурации  $C^t$  дискретной модели оболочки [1]. Компоненты  $\overset{o}{C}^{strp}$  вычисляются с использованием компонент тензора упругостей в физическом базисе ортотропии с последующим денормированием:

$$\overset{o}{C}^{ijkl} = \tilde{C}^{strp} \tilde{\overset{o}{S}}_{.r}^i \tilde{\overset{o}{S}}_{.s}^j \tilde{\overset{o}{S}}_{.t}^k \tilde{\overset{o}{S}}_{.p}^l \sqrt{g^{(rr)} g^{(ss)} g^{(tt)} g^{(pp)}},$$

$$\tilde{\overset{o}{S}}_{.r}^i = \overset{o}{C}_{.r}^{i \cdot j'}; \quad \overset{o}{C}_{.i}^{j'} = \frac{\partial \overset{o}{Z}^{j'}}{\partial x^i}; \quad \overset{o}{C}_{.j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \overset{o}{Z}^{j'}}; \quad C_{i'}^{j'} = \frac{\partial z^{j'}}{\partial x^i}; \quad C_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial z^{j'}},$$

где  $\frac{\partial \overset{o}{Z}^{j'}}{\partial x^i}; \frac{\partial x^i}{\partial z^{j'}}$  – компоненты тензоров преобразования (прямого и обратного) лагранжевой системы координат в глобальную декартовую систему;  $C_{j'}^{i'}$  – компоненты тензора ортогонального преобразования системы глобальных декартовых координат  $\overset{o}{Z}^{i'}$  в декартовый базис криволинейной (в общем случае) ортогональной системы координат  $x^{i'}$ .

Для установления достоверности получаемых численных решений задач нелинейного деформирования большепролетных комбинированных оболочечных конструкций при моделировании реальной неоднородной конструкции тонколистовой оболочки на упругой постели с помощью однородной конструктивно-ортотропной условно-гладкой оболочки выбран при-

мер покрытия выставочного павильона с линейчатой поверхностью на упругоподатливом контуре, имеющем горизонтальную проекцию в виде ромба (размеры по диагонали 160x100 м) и трапециевидные вертикальные симметричные проекции с разницей высот по углам – 20 м ( $H_{\max}=26$  м;  $H_{\min}=6$  м), схематическая аксонометрия представлена на рис. 2.

Линейчатая поверхность покрытия в виде косої плоскости (гиперболический параболоид) позволяет использовать в виде несущих элементов нити конечной жесткости (из прокатного металла швеллерного профиля № 40), которые направлены вдоль прямолинейных образующих с регулярным шагом 377,6 см, по этим нитям укладываются элементы тонколистовой оболочки. Конструкция покрытия представлена в виде двух расчетных моделей – тонкая оболочка с ребрами в одном направлении и условно-гладкая конструктивно-ортотропная мембранная оболочка, расчетная схема представлена на рис. 3. В связи с тем, что в рассматриваемой расчетной схеме отсутствуют плоскости симметрии (плоскости симметрии расположены в ортогональных сечениях по диагоналям покрытия), для исключения смещения диска покрытия в горизонтальной проекции как жесткого целого в центральных узлах контурных элементов каркаса конструкции покрытия накладываются связи в виде подвижных шарниров (в касательной плоскости вдоль контурного элемента), в которых при симметричной нагрузке наблюдаются симметричные горизонтальные перемещения, так что в центре покрытия смещения в плоскости равны нулю. Накладывая связи в виде стержней в центральных узлах элементов контура, мы фактически вводим два фиктивных шарнира в касательной плоскости, проходящей через центры контуров, и обеспечиваем исключение поворота и параллельного смещения диска покрытия (см. рис. 5). Таким образом задача прочностного расчета конструкции решается в двух вариантах:

1) с реальной конструктивной схемой в виде неоднородной оболочки с ребрами-вставками вдоль сеточной координаты  $S_2$  с равномерным шагом – 21 нить конечной жесткости с эквивалентным сечением и следующими параметрами:  $b_y = 50$  см;  $h_y = 12$  см;  $E = 2,153 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, которые получены в соответствии с [2];

2) гладкая конструктивно-ортотропная оболочка, защемленная на контуре.

Нити длиной 9434 см опираются на трубобетонный контур, основным элементом которого является труба  $\varnothing 1200 \times 14$  мм. Эквивалентное сечение наружного контура также получено в соответствии с [2] и имеет следующие параметры:  $b_s = 120$  см;  $h_s = 140$  см;  $E_s = 4,05 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>. Топология расчетной модели единая (см. рис. 3).

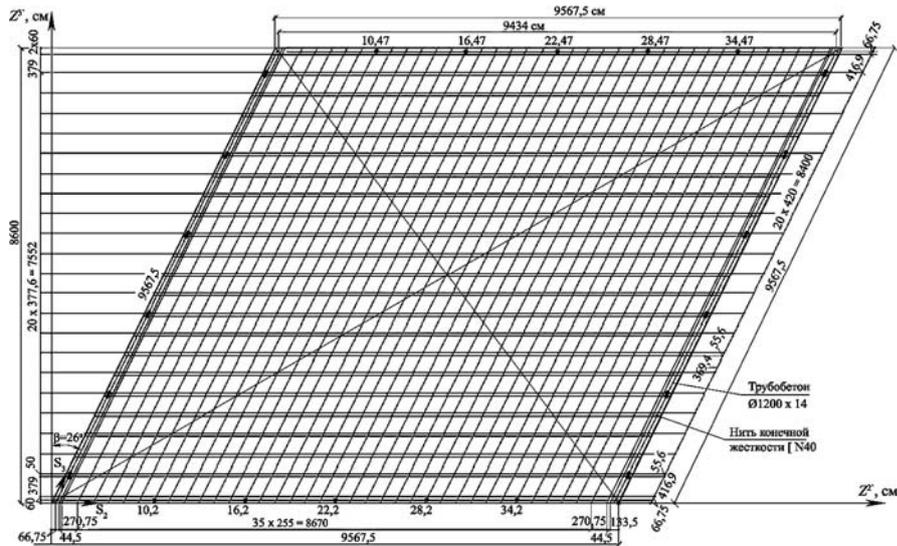


Рис. 3. Расчетная схема большепролетного покрытия (линейчатая поверхность) с упругоподатливым контуром

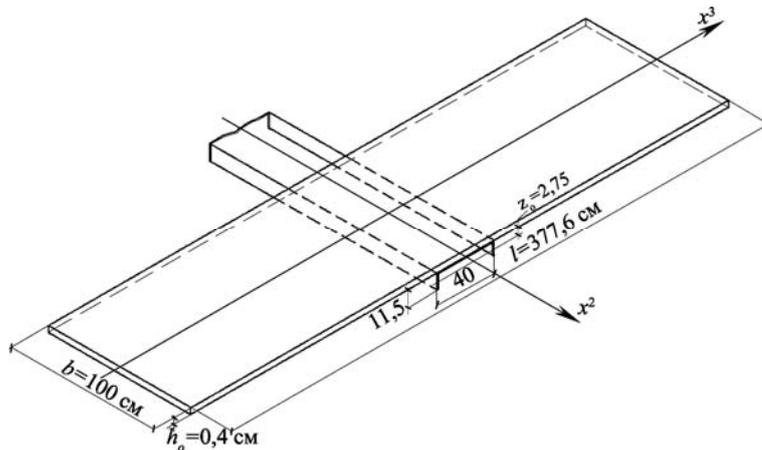


Рис. 4. Расчетный фрагмент на основе структурной симметрии конструкции тонколистовой оболочки с упругой постелью

Во втором варианте расчетной схемы, представленной на рис. 3, элемент оболочки, его геометрические и физико-механические параметры получены исходя из структурной симметрии в виде циклического фрагмента, представленного на рис. 4. Сравнивая его с фрагментом на рис. 1, отмечаем, что параметры  $h_{r(b)}$ ,  $b_{r(b)}$ ,  $f_b$  имеют нулевые значения. Используя формулы (1) – (8), определяем геометрические и физико-механические

параметры условно-гладкой конструктивно-ортотропной оболочки, а именно:

$$E_1^{(e)} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2; E_2^{(e)} = 1,74 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2; E_3^{(e)} = 1,14 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\nu_{23} = 0,35; \nu_{32} = 0,26; \nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{cm} = 0,3; G_{12}^{(e)} = G_{13}^{(e)} = G_{23}^{(e)} = G_{c\dot{o}}.$$

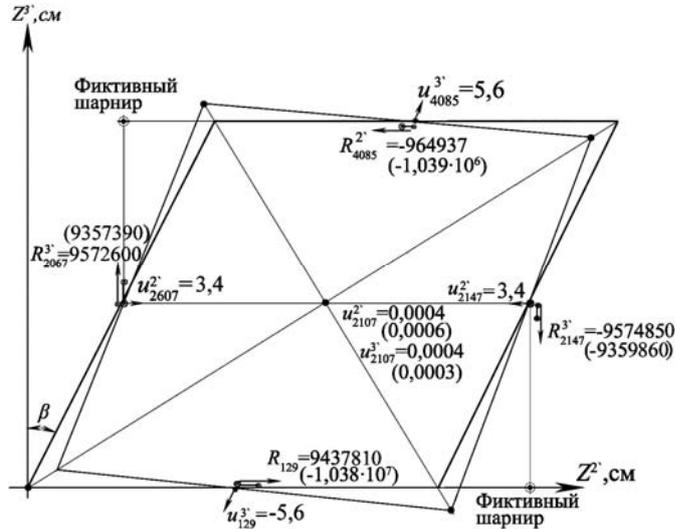


Рис. 5. Схема к анализу исключения смещения расчетной модели как единого целого

Получены результаты расчета по реальной и конструктивно-ортотропной схемам. С использованием этих результатов определены равнодействующие усилия в касательных плоскостях отдельных конечных элементов в соответствии со схемой на рис. 4:

— равнодействующие усилия для неоднородной конструкции оболочки

$$\hat{R}_N^i = \hat{\sigma}_N^{22} \hat{A}_N^i + \hat{\sigma}_M^{22} \hat{A}_M^i; \quad (10)$$

— равнодействующие усилия для однородной конструктивно-ортотропной оболочки

$$\hat{R}_N^o = \hat{\sigma}_N^{22} \hat{A}_N^o + \hat{\sigma}_M^{22} \hat{A}_M^o, \quad (11)$$

где  $\hat{A}_N^i = 600 \text{ см}^2$  – площадь эквивалентного ребра реальной конструкции оболочки;  $\hat{A}_M^i = 131,04 \text{ см}^2$  – площадь элементов тонколистовой оболочки в реальной конструкции;  $\hat{A}_N^o = 30 \text{ см}^2$  – площадь элемента однородной

конструктивно-ортотропной модели, заменяющего ребро;  $A_M^o = 196,56 \text{ см}^2$  – площадь элементов конструктивно-ортотропной модели, заменяющих соответствующие элементы тонколистовой оболочки.

Результаты определения равнодействующих усилий вдоль сеточной координаты  $S_2$  в пределах –  $S_2 = 8 \div 37$ ;  $S_3 = 19 \div 22$  получены с определением отклонений значений равнодействующих продольных усилий для реальной и гипотетичной конструкций оболочки. Разница значений усилий составляет 3 – 6 %, причем большие значения погрешностей наблюдаются в областях, примыкающих к контуру, и обусловлены некоторым краевым эффектом. По результатам деформаций оболочек двух конструктивных схем в двух сечениях покрытия – по главной диагонали и ей ортогональной построены эпюры начальных форм срединной поверхности оболочки и прогибы в направлении  $OZ^1$ . Эпюры представлены на рис. 6 и 7.

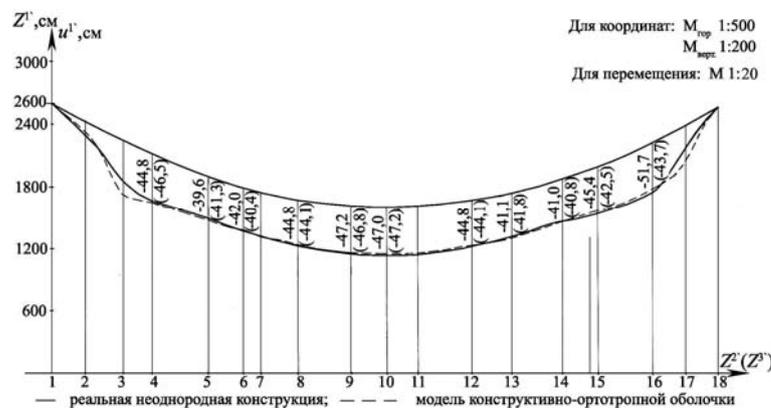


Рис. 6. Эпюры перемещений относительно срединной поверхности оболочки в сечении по главной диагонали

Для большей наглядности масштабы поверхности и перемещений отличаются на два порядка. Построенные графики свидетельствуют, что за исключением краевых зон прогибы – для реальной конструктивной схемы и гипотетичной практически совпадают.

На рис. 8 представлены эпюры мембранных усилий оболочки в центральном сечении с учетом реальной толщины тонколистовой оболочки – 4,2 см и конструктивно-ортотропной – 6,0 см. Разница составляет в пределах 6 – 10 %, что является вполне удовлетворительным с учетом разброса исходных значений геометрических и физико-механических параметров. На рис. 8 также представлены эпюры напряжений в наружном контуре конструкции покрытия для рассматриваемых двух вариантов конструктивных схем. Эти эпюры практически совпадают, так как нагрузки, которые

передаються на контур, практично не змінюються. На рис. 8 також приведені епюри рівнодействующих продольних зусиль в відповідності з розрахунковим фрагментом на рис. 4.

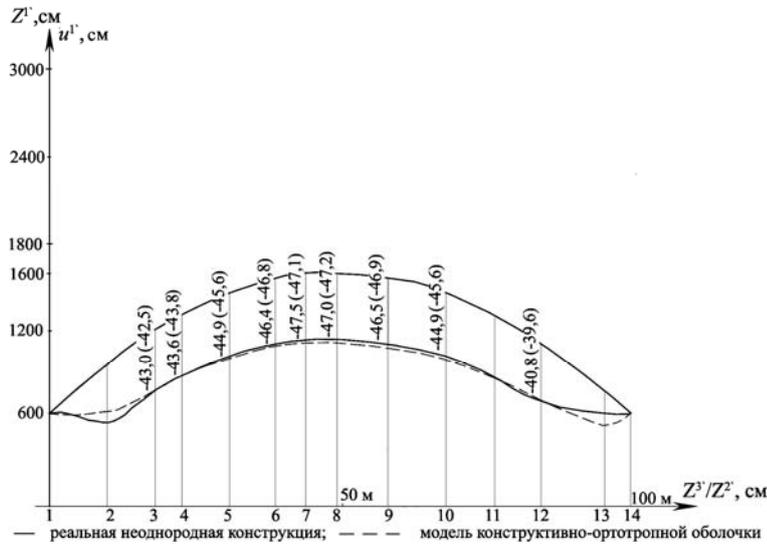


Рис. 7. Епюры перемещений относительно срединной поверхности оболочки в сечении вдоль побочной диагонали

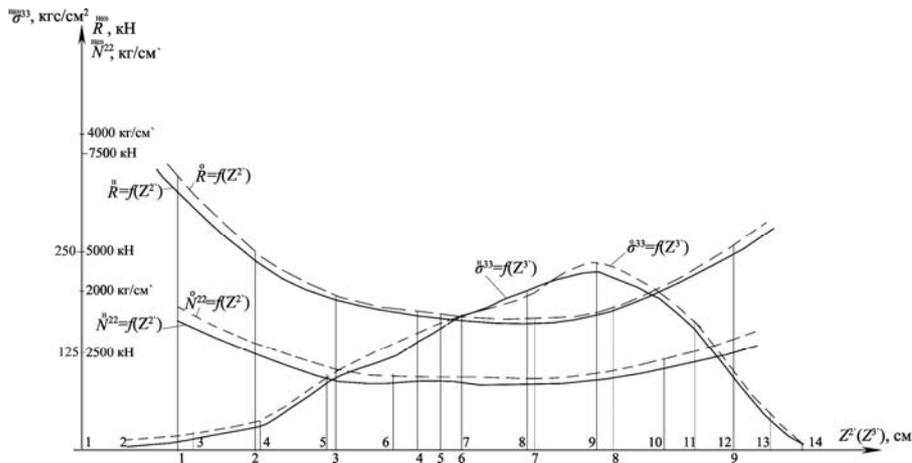


Рис. 8. Епюры мембранных напряжений в контуре, мембранных усилий в оболочке и равнодействующих усилий в циклическом фрагменте

Полученные численные отклонения равнодействующих продольных зусиль для двух вариантов расчетных схем при графической иллюстрации качественно и количественно практически являются несущественными.

Исходя из приведенного сравнительного анализа результатов расчета рассматриваемой конструкции большепролетного покрытия, можно сделать следующие выводы.

### **Выводы**

Реальная конструкция ребристой тонколистовой оболочки и ее конструктивно-ортотропный аналог по интегральным характеристикам прочности и деформативности практически совпадают. Это свидетельствует о достоверности предложенной методики моделирования конструктивно-ортотропных условно-гладких оболочечных конструкций. Предложенное моделирование конструкции тонколистовой оболочки на регулярной конструкции постели дает возможность для рассматриваемой дискретной модели построить расчетную схему с учетом одной или двух плоскостей симметрии, значительно понизить порядок системы сильнонелинейных уравнений и получить более точные численные результаты при различных вариантах внешнего воздействия статического и динамического характера.

### **Литература**

- [1] Баженов В.А., Цыхановский В.К., Кислоцкий В.М. Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. –К.: КНУБА, 2000. – 386 с.
- [2] Цыхановский В.К., Козловец С.М., Костыра Н.А. Несущая способность комбинированных оболочечных конструкций с учетом развития пластических деформаций //Промислове будівництво та інженерні споруди, № 3, 2008. – К.: С. 17 – 21.
- [3] Шимановский А.В., Цыхановский В.К. Теория и расчет сильнонелинейных конструкций. – К.: Изд-во „Сталь”, 2005. – 432 с.
- [4] Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К. Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды// Прикладная механика. –К.: Ин-т механики НАН Украины, 2002. – Т.38(48), № 6, июль. – С.24 – 63.
- [5] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977. – 416 с.
- [6] Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. – Л.: Машиностроение.

*Надійшла до редколегії 15.07.2009 р.*