УДК 624.011

Развитие методик расчета сжато-изогнутых элементов в историческом аспекте

Клименко В.З., к.т.н.

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина

Анотація. Розглянуто методики розрахунку з позиції теоретичної якості і відповідності математичної формалізації фізичному явищу,яке відбувається в дерев'яних елементах, що працюють на згин зі стиском. Доведено, що методика, яка була розроблена у 30-х рр. минулого сторіччя і є чинною до цього часу на підставі лише того, що вона більш проста порівняно з іншими, не відповідає дійсній роботі дерев'яних стиснено-вигнутих елементів.

Аннотация. Рассмотрено методики расчета с позиции их теоретического качества и соответствия математической формализации физическому явлению, происходящему в сжато-изогнутых элементах деревянных конструкций. Доведено, что методика, разработанная в 30-е гг. прошлого столетия и действующая до сих пор лишь на основании того, что она более проста по сравнению с другими, не соответствует действительной работе деревянных сжато-изогнутых элементов.

Abstract. Consideration of structural analysis methods performed with the position of their academic quality and correspondence their mathematical formalization to the physical phenomena occurring in the compressed-bent elements of timber structures. So in [1], justification of the methodology adopted in the thirties of last century, and is used now, given on the point of view that it is simpler comparatively with other, already known at those times. But it is not so from a position quality of the theoretical methods, due to its non correspondence to the real work of compressed-bent wooden elements. The article proposes to replace this method in the functioning regulatory document.

Ключевые слова: сжато-изогнутые элементы, деревянные конструкции.

Обзор методик расчета[1]**.** В тридцатых годах прошлого столетия расчет сжато-изогнутых элементов разрешалось выполнять на так называемое тогда неравномерное сжатие по формуле Ф.С. Ясинского:

$$\sigma = {N}/{\varphi A} + {M}/{W}. \tag{1}$$

В [2] дана следующая характеристика этой формулы. Структура формулы совершенно неправильная и является грубо условной. В ней соединены проверки на устойчивость (первый член) и на прочность (второй член). Она не отвечает физическому смыслу работы и деформации стержней, работающих одновременно на изгиб и сжатие.

[1] Более ранние методики имеют только историческое значение и не рассмотрены в этой статье.

Мне кажется, что эта оценка не совсем справедлива. Формула (1) была предложена в то время, когда в сжато-изогнутых элементах конструкций напряжения от сжатия преобладали по сравнению с напряжениями от изгиба. Преобладала, таким образом, работа стержня на продольное сжатие,но при этом в формуле (1) изгибающий момент не игнорируется. Этим она отличается от того, что содержится в п. 4.17.5. СНиП II-25-80: при напряжениях изгиба, не превышающих 10 % от напряжений сжатия, следует проверять стержни на устойчивость без учета изгибающего момента. Если выполнен расчет сжато-изогнутого элемента на прочность с учетом деформированной схемы по формуле (28) СНиП, то нет смысла делать упрощенную проверку. С методологической точки зрения такая рекомендация в нормативном документе не желательна.

Характеристика, данная в [2] формуле (1), если считать её справедливой, может быть отнесена в значительной мере и к формуле (28) СНиП II-25-80. Формулы (1) и (28) СНиП отвергают физический смысл работы сжато-изогнутых стержней в зависимости от меры влияния на напряженное состояние материала сжатия или изгиба. Есть граница адекватного отражения этими формулами работы сжато-изогнутых стержней. Вероятно, она ДОСтаточно «размыта», поэтому лучше иметь более универсальную методику расчета, о которой речь идет ниже.

В сжато-изогнутых стержнях помимо изгибающего момента от поперечной нагрузки появляется дополнительный момент в деформированной схеме. Краевые напряжения находятся по формуле сложного сопротивления:

$$\sigma = N/A + M/W + N\left(f_0 + f_\partial\right)/W, \tag{2}$$

где f_0 – прогиб от поперечной нагрузки; f_∂ – дополнительный прогиб от изгибающего момента $M_\partial = N \cdot f_0$.

Абсолютно точное решение по формуле (2) получается при вычислении общего прогиба f_∂ путем интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси стержня. В действующей методике расчета использовано *приближенное решение в предположении упругой работы материала*.

Далее расчётные формулы методик расчета сжато-изогнутых стержней по [1] и [2] приведены фрагментарно без подробных выкладок и преобразований. Этого достаточно для того, чтобы проследить развитие методик.

Развитие методик расчета. Формула (2) выглядит в методиках по разному: в [1] формулой (1.1), в [2] формулой (2.1), в которых полный прогиб вычисляется по разным формулам (1.2) и (2.2), но их физическая суть одинакова.

По [1] прогиб от поперечной нагрузки $f_0 = kM/N_э$, а по [2] $f_0 = Ml^2/kEI$ без преобразования, как сделано в [1], в которых k – коэффициент, зависящий от вида поперечной нагрузки.

В методике [1] на основании того, что коэффициент k для разных нагрузок близок к единице (при равномерно распределенной нагрузке $k = 1{,}028$, при сосредоточенной силе посередине пролёта $-0{,}823$) в дальнейших выкладках принят единый коэффициент, равный единице. В методике [2] такого упрощения избежали. В методике [1] пренебрегли расхождением в величине прогиба f_0 в $+2{,}8\ \%$ и $\approx -17\%$. Это первое замечание по поводу точности методики по [1].

Второе замечание касается предположения об упругой работе материала. В формулах (1.2) и (2.2) Эйлерова сила находится при модуле упругости, найденном по проведенной диаграмме работы древесины на сжатие на участке до условного предела пропорциональности. Для древесины как упруго-вязкопластичного материала надо учитывать в соответствии с диаграммой работы на сжатие (при изгибе речь идёт об условной диаграмме) изменение модуля упругости. Этот факт учитывается в действующих нормах проектирования (п. 3.5) – рекомендовано принимать в расчётах конструкций на устойчивость и по деформируемой схеме $E^1 = 300R_c$.

После преобразований формулы (1.1) и (2.1) принимают вид (1.3) и (2.3). По этим формулам можно проверить краевые напряжения в сжато-изогнутом стержне.

Таблица 1

Расчётные формулы по методикам [1] и [2]

По методике [1]		По методике [2]	
$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} + \frac{Nf}{W}$	(1.1)	$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W}\left(1 + \frac{\Delta M}{W}\right),$ где $\Delta M = Nf$	(2.1)
$f = \frac{M}{N_э\left(1 - \frac{N}{N_э^{кр}}\right)}$	(1.2)	$f = \frac{f_0}{1 - \frac{N}{N_э}}$	(2.2)
$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W\left(1 - \frac{N}{N_э^{кр}}\right)}$	(1.3)	$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W}\left(1 + \frac{\pi^2}{k} \cdot \frac{N}{N_э - N}\right)$	(2.3)

Окончание таблицы 1

По методике [1]		По методике [2]	
$[\sigma]=\frac{N}{A}+\frac{M}{W\left(1-\frac{k_з N}{N_э^{кр}}\right)}$	(1.4)	$\sigma=\frac{N}{A}+\frac{M}{W}\left(1+\frac{\pi^2}{k}\cdot\frac{k_з N}{N_э-k_з N}\right)$	(2.4)
$1-\frac{k_з N}{N_э^{кр}}=\xi$	(1.5)	$\frac{1}{1+\frac{\pi^2}{k}\cdot\frac{k_з N}{N_э-k_з N}}=\xi$	(2.5)
$\sigma=\frac{N}{A}+\frac{M}{W\xi}\le[\sigma]$	(1.6)	$\sigma=\frac{N}{A}+\frac{M}{W\xi}\le[\sigma]$	(2.6)
$\xi=1-\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{\sigma_c}{[\sigma_c]}$	(1.7)		
$\xi=1-\frac{\lambda^2}{3100}\cdot\frac{\sigma_c}{[\sigma_c]}$	(1.8)		
$\frac{N}{A\varphi_e}=[\sigma_c]$	(1.9)	$\frac{N}{A\varphi_e}=[\sigma_c]$	(2.9)
$e=\frac{M}{N}$, $\rho=\frac{W}{A}$		$e=\frac{e_0}{\rho}$, $e_0=\frac{M}{N}$, $\rho=\frac{W}{A}$	
φ_e – функция e и ρ		φ_e – функция e и $\alpha=4E/\lambda^2\sigma_c$	

В [1] сделана оговорка, что проверка по формуле (1.3) считается недостаточной для утверждения о надежности стержня. В качестве аргументации говорится следующее. Структура формулы (1.3) такова, что пропорциональности между нагрузкой и напряжением нет. Приводится довод, что при изменении величины N в два раза, приняв её равной $0,8N_э$ вместо $0,4N_э$, увеличение второго члена формулы (1.3) происходит не в два, а в три раза.

Но эта операция чисто математическая и лишена физического смысла в элементах конструкций, скажем, в верхних поясах ферм. Изменение силы N происходит в результате изменения нагрузки на ферму, что приводит к изменению местного изгибающего момента M. На основании такого, на мой взгляд, странного и неубедительного довода сделано заключение, что формула (1.3) не гарантирует сжато-изогнутому стержню определенный коэффициент запаса по отношению к разрушающей нагрузке.

В [2] говорится, что формула (2.3) для расчета сжато-изогнутого стержня не вполне верна, так как не отвечает определённому запасу прочности, и как всякая формула проверки сечения она должна относиться к моменту разрушения. Смысл тот же, что и в [1].

В несколько иной интерпретации по сравнению с [1], но так же странно, в [6] объясняется схема решение задачи устойчивости сжато-изогнутого стержня. Говорится, что в сжато-изогнутом стержне внешние силы, вызывающие сжатие и поперечный изгиб, не зависят друг от друга. Поэтому для любой продольной силы N можно подобрать такую поперечную нагрузку q, при которой стержень будет находиться в критическом состоянии. Задача устойчивости в такой постановке относится к виртуальному стержню, а не к реальному сжато-изогнутому элементу. Далее в [6] решение задачи сжато-изогнутого стержня переносится на решение внецентренно сжатого стержня с эквивалентным эксцентриситетом $e = M/N$. Но этим соотношением устанавливается взаимосвязь между продольной силой и изгибающим моментом, в отличие от решения задачи для виртуального стержня. Ниже будет подробнее рассмотрено решение задачи внецентренно сжатого стержня по [1] и [2]. Сейчас фрагмент из [6] приведен исходя из обязательного методологического подхода изложения материала в специальной технической литературе относительно теоретической формализации физического явления, который сформулирован в аннотации.

После введения в формулы (1.3) и (2.3) коэффициента запаса $k_з$ к N и M, приняв $\sigma = R_{вр}/k_з$, эти формулы после преобразований приняли вид (1.4) и (2.4). Приняв в [1] значение коэффициента ξ по формуле (1.5), а в [2] – по (2.5), формулы (1.3) и (2.3) приобрели одинаковую структуру: соответственно формулы (1.6) и (2.6).

Числовые коэффициенты ξ по формулам (1.5) и (2.5) одинаковые, и в инженерных расчётах можно пользоваться формулами (1.6) и (2.6), которые имеют одинаковую структуру с формулой (28) СНиП. Но двучленная формула неудобна для подбора сечения, так как содержит две переменных *A* и *W*. Подбор сечения удобно делать по одночленной формуле. Методика [2] дальше развивалась в этом направлении, поэтому формула (2.5) для определения коэффициента ξ не получила развития. В методике [1] остановились на двучленной формуле и преобразовали выражение (1.5) в удобную, по мнению авторов [1], формулу, в которой не присутствует коэффициент запаса. После преобразования формулы (1.5) выражение для коэффициента ξ приняло вид (1.7). Из двух выражений для вычисления коэффициента продольного изгиба при разных гибкостях для использования в формуле (1.6) принято $\varphi = 3100/\lambda^2$, после чего формула для ξ приняла вид (1.8) при любой гибкости стержня. При этом тот факт, что при $\lambda < 55$ коэффициент $\varphi > 1$, никаким образом не комментируется с точки зрения устойчивости как физического явления.

Сопоставив методики [1] и [2], перейдем к современному методу расчёта согласно СНиП. Если в формуле (1.8) коэффициент φ как-то «завуалирован», то в нормах, в формуле (30), он в явном виде с рекомендацией по определению, когда он становится больше единицы. Гибкости 25...50 обычные для сжато-изогнутых элементов, например, верхних поясов ферм из клееной древесины при длине панелей $l \geq 3$ м. Как объяснить студентам и другим пользователям норм правомочность использования коэффициента продольного изгиба $\varphi > 1$ и даже $\varphi >> 1$? С методологической позиции это совершенно неправильно, а к физическому явлению при расчете стержней на устойчивость это не имеет отношения. Очевидно, что подобного в нормативном документе быть не должно.

Удовлетворительные результаты расчетов не вызывают возражений против математической формализации коэффициента ξ ранее формулой (1.7), а сейчас формулой (30) СНиП, если считать, что в них φ не коэффициент продольного изгиба для стержней с λ = 25…55 , а некий числовой параметр неопределенного физического смысла.

Вот какая характеристика дана коэффициенту ξ в [1]:

«В выражение $\xi = 1 - (1/\varphi)(\sigma_c/[\sigma_c])$ *входит коэффициент* φ, *который при расчете сжато-изогнутых стержней вычисляется при любой гибкости по формуле* $\varphi = 3100/\lambda^2$, *действительной на самом деле только при* $\lambda \geq 75$.

Так как при $\lambda < 75$ *значение коэффициента продольного изгиба* φ *меньше величины* $3100/\lambda^2$, *то может получиться, что стержень, который по расчету на продольный изгиб выдерживает только силу N, при расчете по формуле сжато-изогнутого стержня сможет воспринять кроме силы N еще некоторый изгибающий момент M».*

По существу, в этой характеристике признается нелегитимность величины ξ, а значит в целом и методики расчета.

Известно, что при отсутствии внутренней логики всякое научное суждение вырождается в схоластику. Научное суждение не должно оставлять возможностей для неверного ответа. В следующих изданиях учебника глубоко уважаемых мною и всей научной и инженерной общественностью в области строительных конструкций авторов [1], подобных суждений не содержится. Но формула СНиП (30) продолжает функционировать и выполняет свою функцию успешно. Конечно, пользователю методом расчета при этом безразлично философское рассуждение относительно этой формулы. С методологической позиции надо найти аргумент, если он существует, оправдывающий формулу (30) СНиП, а ранее формулу (1.7).

Методики по [1] и [2] заканчиваются приведением формул (1.4) и (2.4) в одночленные формулы, удобные для подбора сечения стержня. Не останавливаюсь на «тактических» различиях расчетов, с которыми можно познакомиться в [3] и [4]. В обеих методиках эти формулы имеют одинаковую структуру: $\varphi_e < 1$. Этим формулы (1.9), (2.9) по своему физиическому содержанию принципиально отличаются от формулы продольного изгиба стержня, потому что являются формулами расчета по прочности, а не устойчивости. Исторически сложилось так, что для расчета деревянных сжато-изогнутых элементов методика с одночленной формулой (1.9) не получила применения, при том, что она в [1] названа «точной теорией», начиная с 40-х годов прошлого столетия, для расчета формулой (2.9).

Количественное сравнение методик. Выполнено количественное сопоставление рассмотренных методик расчета сжато-изогнутого стержня:

1 – по формуле (1);
2 – по СНиП, приближенный расчет;
3 – по формуле (2),без учета дополнительного изгибающего момента $N \cdot f_q$;
3* – по формуле (2) с учетом момента $N \cdot f_q$;
4 – по формуле (1.9);
5 – по формуле (2) с вычислением прогиба f методом начальных параметров по точной формуле [7]

$$f = \frac{ql^2}{EIu^2}\pi\left(\frac{1}{\cos\frac{u}{2}} - 1 - \frac{u^2}{8}\right),$$

в которой $u = \sqrt{N/EI} \cdot l$.

Количественное сопоставление методик состояло в сравнении напряжений в верхнем поясе ферм с длиной панелей 6 и 9 м при действии двух разных нагрузок на фермы. Так сформировались четыре варианта, в которых для сопоставимости результатов расчетов все остальные факторы сохранялись одинаковыми. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2

l,м	6		9	
q, кН/м	12,2	24,4	12,2	24,4
Вариант	I	II	III	IV
Методика расчета	σ, МПа			
1	11,17	11,47	11,08	11,87
2	11,62	11,67	11,52	12,17
3	11,12	11,43	11,08	11,87
3*	11,15	11,44	11,09	11,88
4	11,14	11,42	11,09	11,88
5	11,02	10,61	11,09	11,54

Вопреки характеристике методики 1, её результаты практически совпадают с результатами других методик, исключая методику 5. Результаты расчетов по методикам 3 и 4 одинаковые. Очень небольшое увеличение краевых напряжений по методике 3* по сравнению с 3 свидетельствуют о совершенно незначительном влиянии дополнительного изгибающего момента от продольной силы за счет прогиба стержня от момента в деформированой схеме, равного Nf. Это объясняется приближенностью метода расчета. Методика 5 без упрощений дает самые низкие результаты.

Методика 2 дает несколько завышенные результаты. Но к ней было больше всего замечаний, касающихся предпосылок расчета. Здесь допускается $\varphi > 1$. С методологической позиции эта методика уязвима. К тому же она нисколько не проще других. Поэтому можно считать, что совершенно не обязательный запас расчета по методике 2, не может быть оправданием её присутствия в СНиП с позиции методологии изложения научного положения.

Физическая суть методик расчета. Методики по [1] и [2] основаны на разработанной ранее проф. К.О. Завриевым [3] теории краевых напряжений для стержней при одновременном действии изгиба и осевого сжатия. В теории краевых напряжений с учетом гибкости стержней в плоскости изгиба появилось соотношение $N/N_э$, в котором N – продольное усилие сжатия, а $N_э$ – эйлерова сила в стержне. Для стержней с гибкостью, превышающей граничную λ_{min}, делящую работу материала в пределах и за пределом пропорциональности, справедлив коэффициент продольного изгиба по гиперболе Эйлера на графике «λ-φ». Методики по [1] и [2] идентичны до получения формул соответственно (1.6) и (2.6). Усилия N и $N_э$ относятся к одному и томуже сжато-изогнутому стержню.

Для деревянных стержней с $\lambda > \lambda_{min} = 70$ коэффициент $\varphi_э = \Phi / \lambda^2 < 1$ и методики по [1] и [2] для них справедливы, поскольку отвечают сути физического явления происходящему в сжато-изогнутом стержне. Параметр Ф зависит от временного сопротивления (предела прочности материала) и переменный в методе расчета по предельным состояниям для трех сортов древесины с разными $R^{вр}$. Для сжатых деревянных стержней с $\lambda \le \lambda_{\min}$ эмпирическая формула для коэффициента φ, который также не превышает единицы. Гипербола Эйлера при $\lambda < \lambda_{\min}$ на графике «$\lambda - \varphi$» уходит в бесконечность и коэффициент $\varphi_э$ стремительно возрастает, он относится к виртуальному стержню, который не может существовать физически. Коэффициентом $\varphi_ý$ нельзя пользоваться для расчета реальных элементов с $\lambda = 25...55$, работающих на сжатие с изгибом, поскольку он не имеет никакого отношения к физическому явлению, происходящему в них. Соотношение $N/N_э$ теряет физический смысл, так как N – это расчетное усилие в элементе, например в верхнем поясе фермы, а $N_э$ – критическая сила в виртуальном стержне.

Методика по [2] не нашла практического применения и для расчета металлических элементов используется одночленная формула (2.9). По каким соображениям по [1] для расчета деревянных стержней принята была и продолжает функционировать методика, неадекватная физическому явлению, при том, что уже была предложена в [4] одночленная формула (1.9), логического объяснения нет.

Выводы

Методика СНиП вызывает большой вопрос: неужели она принята в результате случайного хорошего конечного результата при ξ с $\varphi = 3000/\lambda^2$ при любой гибкости.

Удовлетворяющий результат,тем более с некоторым запасом, обеспечен структурой формулы (30) СНиП. В ней нивелируется значение ξ при различии в достаточно широком диапазоне величин, входящих в неё, в том числе $\varphi_э$. Если заключение справедливо, то с методологической позиции в нормативном документе надо привести методику расчета, свободную от претензий с этой позиции.

Вызывает сомнение также целесообразность допущения, которое содержится в нормативной, начиная с [5], и учебной литературе относительно того, что $E = const$ и $E/R^{вр}_{const}$ в методике расчета по предельным состояниям [8].

Литература

[1] Курс деревянных конструкций. Ч.1 Г.Г. Карлсен и др. М.-Л.: СИ. 1942.
[2] Курс металлических конструкций. Ч.1. Н.С. Стрелецкий. М.: СИ. 1940.
[3] Расчет стержней на одновременное действие изгиба и осевого сжатия. К.О. Завриев. 1932.
[4] Устойчивость внецентренно сжатых цельных деревянных стержней. Г.В. Свенцицкий. Сб. УНИПС. М. 1940.
[5] Расчет деревянных конструкций по расчетным предельным состояниям. В.М. Коченов. ГСИМ. 1955.
[6] Металлические конструкции: Общий курс. Учеб. Для вузов / Г.С. Ведеников, Е.И. Беленя и др. – М.: Стройиздат, 1998.
[7] Справочник проектировщика. Расчетно-теоретический. ч. II. – М.:СИ. 1973.
[8] Конструкції з дерева і пластмас. Підручник. – К.: Вища школа. В.З. Кліменко, 2000.

Надійшла до редколегії 29.12.2009 р.