УДК 539.3:624.071

Аналітичні розв'язки нелінійних задач деформування ниток скінченної жорсткості при спеціальних завантаженнях

Шалінський В.В., к.т.н.

ВАТ «УкрНДІпроектстальконструкція ім. В.М. Шимановського», Україна

Анотація. Представлені аналітичні розв'язки нелінійної задачі деформування ниток скінченної жорсткості, які отримані за допомогою принципу можливих переміщень. Для визначення розпору в нитці використане загальне диференціальне рівняння рівноваги з урахуванням спеціальних видів додаткових завантажень. Виконана оцінка точності отриманих розв'язків.

Аннотация. Представлены аналитические решения нелинейной задачи деформирования нитей конечной жесткости, полученные с помощью принципа возможных перемещений. Для определения распора в нити использовано общее дифференциальное уравнение равновесия с учетом специальных видов дополнительных загружений. Выполнена оценка точности полученных решений.

Abstract. The analytical solutions of nonlinear problem of deformation of finite rigidity tendons are presented. The solution of problem is got by means the principle of the possible moving. The used common differential equilibrium equation for determination of stretching in the tendon. The special types additional of loads are taken into account. Precision estimation of the got solutions is executed.

Ключові слова: нелінійність, нитка скінченної жорсткості, диференціальне рівняння рівноваги, оцінка точності розв'язку.

Розглядається задача деформування ниток скінченної жорсткості при дії спеціальних практично важливих випадків їх завантаження. Вказана задача розв'язується за допомогою принципу можливих переміщень. При цьому розглядаються нитки, які відповідають вимогам [2], а їх розрахунок проводиться з використанням передумов [9].

Припустимо, що працююча з вигином від початкового і додаткового навантажень [1] нитка скінченної жорсткості з поперечним перерізом площею F, моментом інерції I та модулем пружності E завантажена довільним навантаженням $q(x)$ і знаходиться в стані рівноваги. При цьому під $q(x)$ мається на увазі сума всіх навантажень, які діють на нитку у вертикальній площині. За допомогою викладеної в [9] методики можна отримати загальне диференціальне рівняння для визначення величини розпору в нитці скінченної жорсткості

$$\frac{dF}{dH}-\frac{F}{H}-\frac{EF^2}{lH^2}\int_0^l \frac{q(x)M_y^б m^2}{\left(Hm+EIM_y^б\right)^2}dx+\frac{E^2F^2I}{lH^2}\int_0^l \frac{\left(M_y^б\right)^4 m}{\left(Hm+EIM_y^б\right)^3}dx=0, \quad (1)$$

де $m = z^б EI$; $M_y^б$ – балковий згинальний момент; l – прогін нитки; $z^б$ – балковий прогин.

Розглянемо тепер спеціальні практично важливі випадки завантаження шарнірно закріпленої нитки і представимо рівняння (1) з урахуванням розкриття інтегралів, які входять до його складу. При цьому будемо вважати, що у всіх зазначених випадках на нитку діє початкове рівномірно розподілене навантаження q_1 на всьому прогоні.

У випадку завантаження нитки додатковим рівномірно розподіленим навантаженням q_2 на всьому прогоні диференціальне рівняння для визначення розпору приймає вид:

$$\frac{dF}{dH}-\frac{F}{H}-\frac{25\left(q_1+q_2\right)^2 l^6 EF^2}{12H^2\left(5l^2H+48EI\right)^2}+\frac{120\left(q_1+q_2\right)^2 l^6 E^2F^2I}{H^2\left(5l^2H+48EI\right)^3}=0. \quad (2)$$

Якщо нитка завантажена додатковим рівномірно розподіленим навантаженням q_2 на половині прогону, то відповідне рівняння буде [10]:

$$\begin{aligned}&\frac{dF}{dH}-\frac{F}{H}-\frac{\left(q_1^2+\left(q_1+q_2\right)^2\right)l^6EF^2}{32H^2}\Big[361\left(19Hl^2+192EI\right)^{-2}+\\&+\frac{25}{3}\left(5Hl^2+48EI\right)^{-2}\Big]+\frac{\left(q_1^2+\left(q_1+q_2\right)^2\right)l^6E^2F^2I}{H^2}\times\\&\times\Big[2052\left(19Hl^2+192EI\right)^{-3}+15\left(5Hl^2+48EI\right)^{-3}\Big]=0.\end{aligned} \quad (3)$$

Припустимо, що на нитку діє додаткове зосереджене навантаження P у середині прогону. Тоді рівняння для визначення розпору можна представити наступним чином:

$$\begin{aligned}&\frac{dF}{dH}-\frac{F}{H}-\frac{k_1k_2l^4EF^2}{48H^2\left(k_2Hl^2+48k_1EI\right)^2}\left[k_6-\frac{144k_1^2k_3EI}{k_2Hl^2+48k_1EI}\right]-\\&-\frac{k_4k_5l^4EF^2}{48H^2\left(k_5Hl^2+192k_4EI\right)^2}\left[k_5q_1l-\frac{576k_3k_4^3EI}{k_5Hl^2+192k_4EI}\right]=0,\end{aligned} \quad (4)$$

де $k_1 = q_1l + 2P$; $k_2 = 5q_1l + 8P$; $k_3 = 1 + q_1$; $k_4 = 3q_1l + 4P$; $k_5 = 57q_1l + 88P$; $k_6 = q_1l + 6P$.

У випадку, коли нитка завантажена зосередженим навантаженням P у чверті прогону отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\frac{dF}{dH}-\frac{F}{H}-\frac{k_1k_7l^4EF^2}{64H^2\left(k_7Hl^2+192k_1EI\right)^2}\left[k_6k_7-\frac{564k_1^3EI}{k_7Hl^2+192k_1EI}\right]-\\
&-\frac{k_8k_9l^4EF^2}{768H^2\left(k_9Hl^2+768k_8EI\right)^2}\left[k_9q_1l-\frac{4068k_8^3EI}{k_9Hl^2+768k_8EI}\right]-\\
&-\frac{3k_{10}k_{11}l^4EF^2}{256H^2\left(k_{11}Hl^2+768k_{10}EI\right)^2}\left[k_{11}q_1l-\frac{13824k_{10}^3EI}{k_{11}Hl^2+768k_{10}EI}\right]+\\
&+\frac{441k_{12}^4k_{13}l^4E^2F^2I}{2H^2\left(k_{13}Hl^2+768k_{12}EI\right)^2}=0,
\end{aligned}\qquad(5)$$

де $k_7 = 19q_1l + 24P$; $k_8 = 7q_1l + 12P$; $k_9 = 497q_1l + 648P$; $k_{10} = 5q_1l + 4P$; $k_{11} = 395q_1l + 408P$; $k_{12} = q_1l + 4P$; $k_{13} = 71q_1l + 88P$.

При отриманні вище наведених розв’язків були застосовані як загальноприйняті припущення (пологість нитки, пружна робота матеріалу, обмеження відношення напружень згину до напружень розтягу, гіпотеза плоских перерізів, одноосний напружений стан поздовжніх волокон нитки), так і ті, що відображають характерні особливості роботи ниток скінченної жорсткості, а саме – пропорційна залежність між прогинами і згинальними моментами у нитці скінченної жорсткості та аналогічній їй за всіма параметрами балці. Так як величина похибки, яка вноситься у кінцевий результат внаслідок застосування загальноприйнятих припущень достатньо повно вивчена багатьма авторами [1, 2, 4 – 8], проведено оцінку похибки тільки останнього припущення шляхом порівняння результатів, отриманих пропонованим і точним способом для різних випадків завантаження нитки скінченної жорсткості.

Встановлено залежність величини похибки визначення параметрів напружено-деформованого стану нитки від параметра $u = 0,5l\sqrt{H/EI}$ для середини та чверті прогону при різних навантаженнях [10].

З’ясовано, що для середини прогону максимальна похибка спостерігається, як це і очікувалось, при дії зосередженого навантаження у середині прогону нитки й складає 12,22 % вбік перебільшення. При цьому відрізок, на якому величина похибки перевищує 10 %, являє собою достатньо вузький інтервал зміни параметра u – від 2 до 6,5. У випадку зосередженого навантаження у чверті прогону максимальна величина похибки складає 6,29 % вбік зменшення, а сама похибка, значення якої перевищує 4 %, присутня на незначному інтервалі зміни параметра u – від 1,2 до 6. При дії ж рівномірно розподіленого навантаження на всьому або половині прогону найбільш можлива похибка дорівнює тільки 1,29 % вбік зменшення результатів.

Для чверті прогону найбільша похибка спостерігається при завантаженні нитки зосередженим навантаженням у чверті прогону і досягає 19,82 % вбік перебільшення. Зі зростанням параметра u похибка зменшується до 10,95 % при $u = 10$. При інших видах завантажень значення похибки ще менше. Зокрема, при завантаженні нитки зосередженим навантаженням у середині прогону похибка досягає максимального значення 6,29 % вбік зменшення. Але при параметрі $u > 6$, що відповідає реальним висячим системам [2, 3, 5, 11], похибка стає меншою 4 %. У випадках завантаження нитки рівномірно розподіленими навантаженнями на всьому або половині прогону максимальні значення похибки складають 1,02 % і 6,54 % відповідно вбік перебільшення результатів.

Так як у практичних задачах із розрахунку висячих конструкцій схема завантаження нитки завжди поєднує різнотипні навантаження (як правило, три-п'ять розподілених і декілька не дуже значних зосереджених), то реальна величина похибки внаслідок їх взаємодії завжди буде набагато менше максимальної. Крім цього, у реальних висячих системах параметр u у більшості випадків змінюється у межах $6 \le u \le 14$ [2, 3, 5, 11], при яких навіть максимальна похибка при визначенні параметрів напружено-деформованого стану нитки скінченної жорсткості буде складати дуже незначну величину. Останнє свідчить не тільки про високий ступінь точності вихідних передумов розрахунку, а й про точність отриманих розв'язків у цілому.

Література

[1] Власов В.З. Избранные труды. – М.: АН СССР, 1962. – т. 1. – 528 с.; т. 2. – 507 с.; т. 3. – 472 с.

[2] Качурин В.К. Теория висячих систем. – М. – Л.: Госстройиздат, 1962. – 224 с.

[3] Качурин В.К., Брагин А.В., Ерунов Б.Г. Проектирование висячих и вантовых мостов. – М.: Транспорт, 1971. – 280 с.

[4] Косенко И.С. Висячие конструкции покрытий. – М.: Стройиздат, 1966. – 87 с.

[5] Москалев Н.С. Конструкции висячих покрытий. – М.: Стройиздат, 1980. – 331 с.

[6] Ржаницын А.Р. Статика и динамика пологой упругой нити // Висячие покрытия: Сб. науч. тр. НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 60 – 76.

[7] Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 363 с.; Т. 2. – 480 с.

[8] Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. – М.: Наука, 1975. – Т. 1. – 832 с.; 1978. – Т. 2. – 616 с.; 1981. – Т. 3. – 480 с.

[9] Шимановский А.В., Оглобля А.И. Теория и расчет несущих элементов большепролетных пространственных конструкций. – К.: Издательство «Сталь», 2002. – 372 с.

[10] Шимановський О.В., Шалінський В.В. Нелінійні задачі міцності ниток скінченної жорсткості при спеціальних завантаженнях // Промислове будівництво та інженерні споруди. – 2009. – №3. – С. 16 – 21.

[11] Шимановский В.Н., Смирнов Ю.В., Харченко Р.Б. Расчет висячих конструкций (нитей конечной жесткости). – К.: Будівельник, 1973. – 198 с.

Надійшла до редколегії 10.06.2010 р.