

УДК 624.016

## **Деформационный метод расчета стержневых систем произвольной геометрической структуры с учетом влияния нелинейных деформаций гибких стержней в их пролете**

<sup>1</sup>Уласевич В.П., к.т.н., <sup>2</sup>Костюк О.В., к.т.н.

Брестский государственный технический университет, Республика Беларусь  
ОДО «Брестстройсервис», Республика Беларусь

**Анотація.** Показана необхідність розрахунку конструктивних моделей з гнучких стрижнів з урахуванням деформованої геометрії (ефекти другого порядку). Викладені основні принципи розробленого авторами деформаційного методу розрахунку гнучких стрижньових систем і підтверджена його роль у підвищенні ступеня надійності будівельних конструкцій. Приведений розрахунок гнучкої сталеві рами по деформованому стану, який дає вищу достовірність результатів порівняно з лінійним розрахунком.

**Аннотация.** Показана необходимость расчета конструктивных моделей из гибких стержней с учетом деформированной геометрии (эффекты второго порядка). Изложены основные принципы разработанного авторами деформационного метода расчета гибких стержневых систем и подтверждена его роль в повышении степени надежности строительных конструкций. Приведен расчет гибкой стальной рамы по деформированному состоянию, дающий более высокую достоверность результатов в сравнении с линейным расчетом.

**Abstract.** The importance of calculating the flexible rods system models with the view of deformed geometry (second order effects) is shown. The basic principles of deformation method calculation for system schemes of flexible rod structures and its role in enhancing the structures reliability are described. A deformation design analyses of a flexible steel frame has been made to prove it's higher reliability against linear procedures.

**Ключевые слова:** стержневые систем, деформация гибких стержней, надежность строительных конструкций.

**Введение.** При оценке эксплуатационной надежности вновь проектируемых или реконструируемых зданий и сооружений анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) их конструктивных решений основан на анализе соответствующих им расчетных моделей, которые должны удовлетворять всем возможным предельным состояниям. Это значит, что независимо от строительного материала, из которого будут изготовлены строительные конструкции зданий и сооружений, они должны быть запроектированы так, чтобы была обеспечена достаточная степень надежности с учетом экономичности при возведении и эксплуатации, или при

оценке их технического состояния [1]. При этом требуемая степень надежности должна учитывать:

- а) причины и формы вероятного разрушения, с учетом возможного проявления неблагоприятных сочетаний воздействий, свойств материалов, изменения геометрических параметров и своевременного принятия мер для предотвращения последствий разрушения;
- б) степень риска для жизни людей, экономический ущерб и социальные затраты, которые могут возникнуть в результате проявления исключительных, но прогнозируемых силовых воздействий и (или) воздействий окружающей среды;
- в) обоснованную возможность оценки риска от неточностей, возникших в результате ошибочного выбора расчетной модели или метода ее расчета, недостаточно точно оценивающих действительную работу конструктивной схемы.

Для этого расчетная модель и основные допущения при ее расчетах должны описывать работу конструкции в соответствующем предельном состоянии и с адекватной точностью отражать предполагаемый тип работы ее поперечных сечений, элементов, соединений, опор. Усилия и перемещения, полученные в расчетной модели, считают основными. Однако необходимо помнить, что расчетные усилия, напряжения и деформации, действующие в конструктивной схеме, отличаются от вычисленных в принятой для нее расчетной схеме. Это отличие, в результате которого в конструкции появляются не учитываемые расчетом дополнительные усилия, конструктор должен свести к достаточно малым величинам.

Заметим, что конструктивная форма здания или сооружения под воздействием возмущающих параметров (расчетных нагрузок, предварительного напряжения, температурных воздействий и др.) деформируется всегда нелинейно. Поэтому применение линейных методов статического расчета, построенных на принципе отвердевания, не учитывающем изменение начальной геометрии конструкции в процессе ее деформирования, должно быть обосновано введением специальных критериев оценки. Так в EN 1993-1 [2, 3] сказано, что хотя внутренние усилия в общем случае могут быть определены с применением как анализа первого порядка, использующего начальную геометрию конструкции, так и анализа второго порядка, учитывающего влияние деформированной геометрии конструкции, однако для оценки возможности их применения введен следующий

критерий:  $\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} \geq 10$  – для упругого расчета;  $\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} \geq 15$  – для

пластического расчета, где  $\alpha_{cr}$  – коэффициент увеличения расчетной нагрузки, при котором будет достигнуто неустойчивое состояние в упру-

гой стадии при общем анализе;  $F_{Ed}$  – расчетная нагрузка на конструкцию;  $F_{cr}$  – критическая нагрузка потери устойчивости в упругой стадии при общем анализе, основанная на начальных упругих жесткостях.

В настоящее время появились универсальные программно-вычислительные комплексы (Lira Windows, SCAD, Nastran, ANSYS и др.), позволяющие строить и анализировать сложные расчетные модели, в том числе и требующие учета геометрической нелинейности. Их использование порождает у инженера, а иногда и у исследователя чрезмерную уверенность, что алгоритм современного вычислительного комплекса всегда готов дать высокую гарантию точности расчета, упуская при этом необходимость оценки адекватности расчетной модели анализируемой конструктивной схеме. Эта ложная иллюзия – результат необоснованной уверенности в абсолютной точности алгоритмов вычислительных комплексов, что далеко не всегда соответствует действительности. В свете выше сказанного можно сделать вывод, что учет геометрической нелинейности расчетных моделей, связанный с необходимостью дальнейшего совершенствования методов решения задач строительной механики и способов их алгоритмизации в программах для ЭВМ, – задача актуальная как в теоретическом, так и в практическом плане.

Согласно [1] конструкция должна быть запроектирована с соблюдением условий надежности и экономичности. А поскольку анализ расчетных моделей связан, в первую очередь, с их статическим расчетом, то принятие надежной расчетной модели проектируемой конструктивной формы, предельно близкой к конструктивной схеме и удовлетворяющей условию экономичности, связано с необходимостью совершенствования методов расчета.

Особенно актуально сказанное при проектировании так называемых гибких стержневых систем (ГСС), для расчета которых необходимо иметь метод, который позволил бы комплексно учитывать деформированное их состояние и, в первую очередь, деформированное состояние всех стержней системы, представленных в расчетной модели. Решение этой проблемы позволит не только более точно учесть влияние геометрической нелинейности на НДС, но и установить возможность потери устойчивости отдельных стержней и системы в целом, а при выключении стержня ГСС из работы – оценить влияние проявившей себя конструктивной нелинейности, а также возможность прогрессирующего обрушения (живучесть конструктивной системы). Именно такой подход к расчету заложен в стандартах Еврокода (ТКП ЕН), принятых с 01.01.2010 г. в Республике Беларусь.

1. Исходное состояние модели в деформационном методе расчета. Из всех методов статического расчета стержневых систем сложной геометрической структуры, реализованных в большинстве вычислительных комплексов, широкое признание получил метод конечных элементов (МКЭ), в котором наиболее часто используется принцип Лагранжа, составляющий основу метода перемещений (деформаций) при воздействии узловых нагрузок. Если конечный элемент (КЭ) загружен сплошной нагрузкой, то в качестве узловых нагрузок принимают обычно соответствующие ему узловые реакции опорных участков стержней (КЭ) по готовым решениям, не учитывающим влияние продольных деформаций, что связано с особенностями выбора основной системы в методе перемещений. Вносимая при этом погрешность для систем из гибких стержней либо на точность расчета влияет существенно, либо для стержней с  $EI \rightarrow 0$  делает расчет вовсе непригодным. Поэтому МКЭ применяется, главным образом, для анализа стержневых моделей, не требующих учета геометрической нелинейности, а попытки учесть в МКЭ влияние геометрической нелинейности достигаются в определенной мере созданием специальной библиотеки стержней (КЭ). Однако, алгоритмы, не учитывающие конечные деформации сечений стержней по длине КЭ в основной системе метода перемещений, как правило, занимают, в сравнении с изложенным здесь, более низкий уровень (этаж) геометрической нелинейности из четырех, указанных А.В. Перельмутером в [4].

Расчет по МКЭ стержневых конструкций или сооружений, имеющих бесконечное число степеней свободы, заменяется системой с конечным числом степеней свободы. Связь КЭ между собой описывается в МКЭ статическими уравнениями равновесия, которые в глобальной системе координат в матричной форме имеют вид:

$$-\{r\} + \{P_u\} + [T_a]^T \{P_s\} + \{R\} = 0 \quad (1)$$

и условиями неразрывности деформаций (физические уравнения)  $[K] \cdot \{\Delta\} = \{r\}$ , где  $[T_a]^T$  – транспонированная матрица преобразований (направляющих косинусов) [5];

$\{r\}$  – вектор компонентов суммарных реакций в глобальной системе координат всех  $m$  узлов системы на все примыкающие к ним стержни. В развернутой транспонированной форме указанный вектор имеет вид:

$$-\{r\}^T = \{N_{r1} \ Q_{r1} \ M_{r1} \ N_{r2} \ Q_{r2} \ M_{r2} \ \dots \ N_{rm} \ Q_{rm} \ M_{rm}\}; \quad (2)$$

$\{P_u\}$  – вектор всех внешних нагрузок, действующих в узлах системы,

$$\{P_u\}^T = \{P_{ux1} \ P_{uy1} \ M_{u1} \ P_{ux2} \ P_{uy2} \ M_{u2} \ \dots \ P_{uxm} \ P_{uym} \ M_{um}\};$$

$\{P_s\}$  – вектор реакций начала и конца КЭ, приложенных с обратным знаком к узлам системы, от воздействия распределенных по его длине поперечных сплошных нагрузок  $q(x)$ , температурных воздействий, предварительного натяжения  $P_n$  с учетом граничных условий закрепления элемента в узлах

$$\{P_s\}^T = \{H_{s1} \ V_{s1} \ M_{s1} \ H_{s2} \ V_{s2} \ M_{s2} \ \dots \ H_{sm} \ V_{sm} \ M_{sm}\}; \quad (3)$$

$\{R\}$  – вектор опорных реакций, действующих в узлах, на которые наложены соответствующие опорные связи (если в узле нет связей, то соответствующие им величины равны нулю),

$$\{R\}^T = \{R_{x1} \ R_{y1} \ M_{R1} \ R_{x2} \ R_{y2} \ M_{R2} \ \dots \ R_{xm} \ R_{ym} \ M_{Rm}\}. \quad (4)$$

Для расчетной модели, состоящей из  $n$  узлов, вектор  $\{R\}$  в глобальной системе координат может быть вычислен из системы  $3n$  уравнений (1) равновесия всех сил, действующих в каждом  $i$ -м узле расчетной модели. Если в узле нет опорных связей, то соответствующие им величины в векторе  $\{R\}$  равны нулю.

Такая замена исходной конструкции набором дискретных элементов подразумевает равенство энергий дискретной модели и исходной континуальной системы, что и дает возможность получить систему разрешающих уравнений МКЭ в виде уравнений совместности, описывающих связь внутренних усилий и деформаций в элементах с перемещениями узлов системы. В традиционной постановке МКЭ, применяемой, главным образом, для расчета линейно деформируемых систем, эта связь в матричной форме в глобальной системе координат имеет вид:

$$[K] \cdot \{\Delta\} = \{P_u\} + [T_a]^T \{P_s\} + \{R\}, \quad (5)$$

где  $[K]$  – матрица внешней жесткости системы, каждый элемент которой  $K_{ij}$  представляет собой реакцию  $r_i$  в  $i$ -м направлении от единичного перемещения узла в  $j$ -м направлении;

$\{\Delta\}$  – вектор перемещений узловых точек системы в глобальной системе координат (если на узел системы наложены внешние связи, то в соответствующих им направлениях перемещения равны нулю),

$$\{\Delta\}^T = \{\Delta_{x1} \ \Delta_{y1} \ \Delta_{\phi1} \ \Delta_{x2} \ \Delta_{y2} \ \Delta_{\phi2} \ \dots \ \Delta_{xm} \ \Delta_{ym} \ \Delta_{\phi m}\}. \quad (6)$$

Связь перемещений узлов системы и концов КЭ, примыкающих к узлам, описывается условиями неразрывности перемещений вида

$$\{\delta\} = \{\Delta\},$$

где  $\{\delta\}$  – вектор перемещений начальной и конечной точек КЭ в глобальной системе координат, вызванных силовыми и другими воздействиями.

Перемещения концов стержневой расчетной модели в локальных системах координат связаны с перемещениями в глобальной системе координат (рис. 1, а) зависимостью [6]

$$\{\delta'\} = [T_\alpha]\{\delta\}. \quad (7)$$

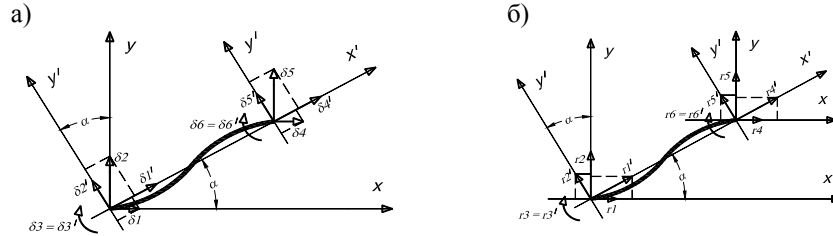


Рис. 1. Связь параметров в локальной и глобальной системах координат:  
а – между перемещениями концов КЭ; б – между реакциями концов КЭ

Связь реакций узлов всей системы  $\{r\}$  с реакциями и перемещениями концов ее элементов с учетом (7) осуществляем по формуле (рис. 1,б):

$$\{r\} = [T_\alpha]^T \cdot \{r'\} = [T_\alpha]^T \cdot [K'] \cdot \{\delta'\} = [T_\alpha]^T \cdot [K'] \cdot [T_\alpha] \cdot \{\delta\}. \quad (8)$$

В выражениях (7) и (8):  $\{\delta\}$  и  $\{\delta'\}$  – векторы перемещений концов КЭ системы соответственно в глобальной и локальной системах координат;  $\{r'\}$  – вектор реакций концов КЭ от перемещений этих концов в локальной системе координат;  $[K']$  – матрица внутренней жесткости элементов в локальной системе координат.

Анализируя выражение (5) и (7), можно записать

$$[K] = [T_\alpha]^T \cdot [K'] \cdot [T_\alpha].$$

Матрица внешней жесткости отдельного  $i$ -го конечного элемента  $[K_s]_i$  системы с началом в узле  $a_i$  и концом в узле  $b_i$  принята следующей структуры [6]:

$$[K_s]_i = \begin{bmatrix} A^i_{a_i, a_i} & A^i_{a_i, b_i} \\ A^i_{b_i, a_i} & A^i_{b_i, b_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1 \dots s, \quad (9)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  – номера узлов, к которым примыкают соответственно начала и концы  $i$ -х конечных элементов;  $A^i_{a_i, a_i}$  – блок реакций на  $a_i$ -м конце  $i$ -го элемента (узловых усилий в соответствующих связях, соединяющих этот конец элемента

с узлом  $a_i$ ) от перемещений этого же ( $a_i$ -го) конца элемента (и соответственно узла  $a_i$ );  $A_{b_i, b_i}^i$  – аналогично, только применительно к концу  $b_i$ -го элемента (и к узлу  $b_i$ );  $A_{a_i, b_i}^i$  – блок реакций (узловых усилий) на  $a_i$ -м конце конечного элемента (и соответственно в узле  $a_i$ ) от перемещений  $b_i$ -го его конца (узла  $b_i$ );  $A_{b_i, a_i}^i$  – аналогично  $A_{a_i, b_i}^i$ , если поменять местами  $a_i$  и  $b_i$ ;  $s$  – количество конечных элементов в системе.

В расчетах плоских стержневых систем обычно используют четыре основных варианта матриц внутренней жесткости отдельных КЭ, отличающихся друг от друга способами присоединения КЭ к узлам системы (см. рис. 2).

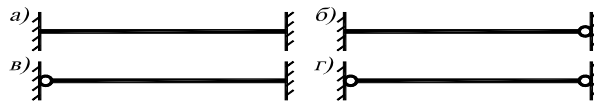


Рис. 2. Варианты присоединения конечных элементов к узлам:  
а – жесткое прикрепление обоих концов КЭ к узловым точкам;  
б – начало КЭ прикреплено жестко, конец – шарнирно;  
в – начало КЭ прикреплено шарнирно, конец – жестко;  
г – оба конца КЭ прикреплены шарнирно.

Для прямолинейного КЭ с защемленными концами матрица внутренней жесткости  $[K_3']$  имеет вид:

$$[K_3'] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & -\frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{array} \right] \cdot (10)$$

Матрицы внутренней жесткости для других вариантов крепления стержня к узлам получены из (10) путем исключения по методу Гаусса-Жордана, см. также [6].

Для системы, состоящей из  $t$  узлов, матрица внешней жесткости системы  $[K]$ , свободной от внешних связей, также имеет блочную структуру вида (11) и состоит из блоков  $A$  матриц  $[K_3]_i$ , при этом индексы  $a_i$  и  $b_i$ , принадлежащие блокам  $A$ , определяют их положение в матрице  $[K]$ . Каждый узел

в плоской стержневой системе в общем случае обладает  $n = 3$  возможными перемещениями, поэтому порядок матрицы  $[K]$  определен произведением  $k = m \cdot n$ .

$$[K] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Изложенная здесь методика формирования матрицы жесткости  $[K]$  стержневой системы произвольной геометрической структуры реализована нами в среде MathCAD [7].

При наложенных на расчетную модель внешних связях в системе уравнений (5) матрица внешней жесткости свободной системы (11) преобразуется в матрицу жесткости закрепленной системы  $[K^*]$  вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих наложенным связям, при этом вычеркиванием соответствующих строк в векторах  $\{P_u\}$ ,  $\{P_s\}$ ,  $\{R\}$  образуются векторы  $\{P_u^*\}$ ,  $\{P_s^*\}$ ,  $\{R^*\}$ . Поскольку в результате этих преобразований в векторе  $\{R^*\}$  остаются только нулевые элементы, то на данной стадии он также может быть исключен. Тогда искомым вектор перемещений в глобальной системе координат будет вычислен из (5) по выражению

$$\{\Delta^*\} = [K^*]^{-1} \cdot (\{P_u^*\} + \{P_s^*\}), \quad (12)$$

где  $\{\Delta^*\}$  – вектор, образованный из  $\{\Delta\}$  после вычеркивания строк, соответствующих направлениям, в которых на систему наложены связи.

Вектор усилий  $\{r'\}$  по концам каждого КЭ в местной системе координат вычисляется по выражению

$$\{r'\} = [K'] \cdot [T_\alpha] \cdot \{\Delta\} - \{P_s'\}, \quad (13)$$

где  $[K']$  – матрица жесткости КЭ в местной системе координат;  $[T_\alpha]$  – матрица преобразований.

Найденный вектор  $\{r'\}$  является решением системы уравнений (5), так как он позволяет определить действительные усилия во всех стержнях (КЭ) расчетной модели.

Точность расчета по уравнениям (5) МКЭ зависит от принятых условий при выборе основной системы метода перемещений и методики вычисления компонент вектора  $\{P_s'\}$ , определяемых в ней на стадии оценки НДС каждого КЭ расчетной модели ГСС. Обычно в расчете по



методу перемещений, не учитывающем деформированную схему расчетной модели (по [2] – анализ первого порядка), на жесткие узлы системы накладывают связи, препятствующие их повороту, но не ограничивающие линейную их подвижность, а линейная связь накладывается только по направлениям возможных независимых перемещений узлов. Такой прием упрощает формирование и решение системы уравнений (5) с использованием готовых решений [5], однако, как было указано выше, не позволяет учесть влияние продольных и угловых деформаций сечений стержней по длине на точность их расчета.

В предложенном нами деформационном методе расчета этот недостаток устранен тем, что в основной системе метода перемещений исходного состояния расчетной модели на все ее узлы накладываются жесткие связи, препятствующие как их повороту, так и линейным смещениям. В результате расчетная схема КЭ в основной системе представляет собой гибкий стержень, жестко закрепленный в узлах расчетной модели (рис. 3). Если на такой стержень действует поперечная нагрузка, температурные воздействия, усилия предварительного напряжения и др., то для вычисления опорных реакций в узлах требуется в общем случае рассмотреть его деформированное равновесие, связанное с внешними воздействиями и внутренними усилиями (продольными силами, изгибающими моментами и поперечными силами). Их величины, вычисленные в начале и конце каждого стержня основной системы, и будут искомыми параметрами вектора  $\{P_s\}$  (3), входящего в систему матричных уравнений (5).

Для отыскания параметров вектора  $\{P_s\}$  во всех гибких стержнях расчетной модели нами используется интегро-дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{H}{EI} \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{H - H_0}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{EI} q(x) \quad (14)$$

и его аналитическое решение относительно функции прогибов  $v$  и связанной с ней функцией изгибающих моментов  $M_s$  в деформированном состоянии, полученные в [7],

где  $H_0$ ,  $y$  – распор и функция формы очертания стержня в исходном состоянии;  $H$ ,  $v$  – распор и функция прогибов гибкого стержня от воздействия сплошной нагрузки произвольной интенсивности  $q(x)$ , соответственно;  $EI$  – изгибная жесткость стержня.

Для прямолинейного гибкого стержня ( $y = 0$ ) с жесткостями  $E_A$  и  $E_I$ , испытывающего в исходном состоянии распор  $H_0$  и находящегося в деформированном состоянии под воздействием нагрузки произвольной интенсивности  $q(x)$  при жестком креплении его концов к узлам (рис. 3), функция

прогибов  $v$  и увязанная с ней функция изгибающих моментов  $M_s$ , полученные из аналитического решения уравнения (14) как частное, имеют вид [9]:

$$v = -\frac{1}{H} \left[ R_b x - \int_0^x (x-t)q(t)dt + M^x - (M^a - M^b) \frac{x}{l} - M_s \right], \quad (15)$$

$$M_s = \frac{r_s}{a_1} sh(a_1 x) - \frac{1}{a_1} \int_0^x sh(a_1(x-t))q(t)dt + \frac{M^a}{sh(a_1 l)} sh(a_1(l-x)) + \frac{M^b}{sh(a_1 l)} sh(a_1 x), \quad (16)$$

где  $a_1 = \sqrt{\frac{|H|}{EI}}$ ;  $R_b = \frac{1}{l} \int_0^l (x-t)q(t)dt$ ;  $r_s = \frac{I}{sh(a_1 l)} \int_0^l sh(a_1(l-t))q(t)dt$ .

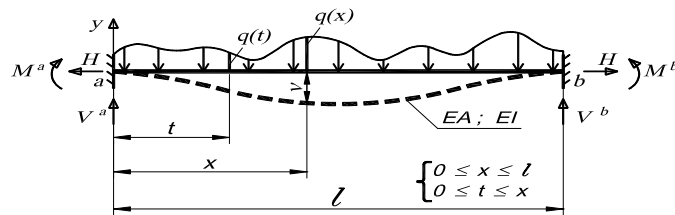


Рис. 3. К оценке НДС прямолинейного гибкого стержня

Функция (15) дифференцируема совместно с (16) до 4-го порядка включительно. Это позволило получить в замкнутом аналитическом виде систему нелинейных разрешающих уравнений относительно основных неизвестных: распора  $H$  и опорных моментов  $M^a$  и  $M^b$  [7, 9].

$$\frac{H \cdot l}{EA} - \left( \frac{H}{EA} - \frac{1}{2} \right) \frac{D(H)}{H^2} + H(c_u^a - c_u^b) + \left( \alpha \cdot l \cdot \Delta t^o - \frac{P_n \cdot l}{EA} \right) = 0; \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{th(a_1 l) - a_1 l}{H \cdot l \cdot th(a_1 l)} - c_\phi^a \right) \cdot M^a - \frac{sh(a_1 l) - a_1 l}{H \cdot l \cdot sh(a_1 l)} \cdot M^b &= \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0; M^a=0; M^b=0} \\ \frac{sh(a_1 l) - a_1 l}{H \cdot l \cdot sh(a_1 l)} \cdot M^a - \left( \frac{th(a_1 l) - a_1 l}{H \cdot l \cdot th(a_1 l)} - c_\phi^b \right) \cdot M^b &= \frac{dv}{dx} \Big|_{x=l; M^a=0; M^b=0} \end{aligned} \right\}; \quad (18)$$

$$D(H) = \int_0^l \left( R_b - \int_0^x q(t)dt - \frac{1}{l} (M^a - M^b) - \frac{dM_s}{dx} \right)^2 dx, \quad (19)$$

где  $c_u^a$ ,  $c_u^b$ ,  $c_\phi^a$ ,  $c_\phi^b$  – коэффициенты линейной и угловой податливости левой и правой опор гибкого стержня.

Если гибкий стержень испытывает сжатие, то выражения (14), (15) остаются справедливыми при замене в них гиперболических функций на тригонометрические [7].

Анализируя систему разрешающих уравнений (17) и (18) с учетом (19), видим, что опорные реакции в гибком стержне (рис. 3) могут быть определены при воздействии нагрузки  $q(x)$ , линейных температурных воздействиях ( $\alpha l \Delta t^0$ ), воздействиях предварительного натяжения  $P_n$ . При заданной продольной жесткости  $EA$  уравнения (17) и (18) обеспечивают работу расчетной модели из сжато-изогнутых и растянуто-изогнутых стержней и справедливы во всем интервале изгибных жесткостей: при  $EI \rightarrow 0$  система уравнений (5) отпадает, т.к. опорные моменты  $M^a \rightarrow 0$  и  $M^b \rightarrow 0$ , а уравнение (17) превращается в кубическое, известное из теории расчета гибкой нити; при  $H \rightarrow 0$  приходим к решению для простой балки. Система уравнений (18) позволяет также в автоматическом режиме смоделировать все четыре варианта крепления КЭ к узлам адекватно четырем вариантам матриц внутренней жесткости  $[K_s]$  (см. рис. 2) путем вычеркивания требуемых строки и столбца на пересечении опорных моментов. Следует особо отметить, что уравнения позволяют без обоснованной необходимости не разбивать стержни между узлами стержневой модели на более мелкие части, что облегчает ее анализ на устойчивость как отдельных стержней, так и стержневой модели в целом [11].

Сказанное выше позволило нам сделать вывод, что рассмотренное решение в уравнениях (15)÷(19) представляет собой универсальный КЭ «Гибкий стержень» [9], а если стержень между узлами не делить на мелкие КЭ, то МКЭ вырождается в классический метод перемещений (деформаций), учитывающий продольные и угловые деформации сечений стержней. Особо отметим универсальность аналитических выражений (16)÷(17) относительно параметрического представления в них функции нагрузки  $q(x)$ , которое в расчетных моделях можно заменить ее конкретным аналитическим выражением, непрерывным по длине КЭ.

После снятия связей, наложенных на узлы, расчетная модель переходит в соответствующее ей деформированное положение равновесия. Это и есть исходное деформированное состояние расчетной модели, описанное уравнением совместности (5). Решение уравнения (12) позволяет определить вектор перемещений  $\{\Delta^*\}$ , после этого по уравнению (13) может быть вычислен вектор  $\{r'\}$ , являющийся для расчетной модели исходного состояния его решением.

Следует отметить также, что вектор  $\{\Delta^*\}$  (12) совместно с вектором  $\{r'\}$  (13) позволяет вычислить по выражениям (15) и (16) прогибы и изгибающие моменты, соответственно, в любом сечении любого стержня, входящего в ансамбль стержней расчетной модели, а, используя уравнения равно-

весия и известные в строительной механике дифференциальные зависимости [5], все другие искомые параметры исходного состояния.

Таким образом, уравнение (5) совместно с изложенными для него функциями и уравнениями представляет собой усовершенствованный метод расчета плоской стержневой системы произвольной геометрической структуры по недеформированной схеме. Важно только, чтобы все стержни расчетной модели были подчинены принципу квазиинвариантности [8].

**Учет влияния деформированной геометрии гибких стержневых систем.** Если анализ расчетной модели требует учета ее деформированной геометрии (по [2] и [3] – учет эффектов второго порядка) ввиду значительного увеличения внутренних усилий и перемещений или значительного изменения работы конструкции, то матричная система уравнений (5) превращается в матричную систему уравнений деформационного расчета, которую запишем так:

$$[K(\Delta)] \cdot \{\Delta\} = \{P_u\} + [T_\alpha]^T \cdot \{P'_s\} + \{R\}, \quad (20)$$

где  $[K(\Delta)]$  – матрица внешней жесткости системы, зависящая, при переходе из исходного состояния в рассчитываемое от искомого вектора перемещений  $\{\Delta\}$ ;  $\{\Delta\}$  – вектор искомых перемещений узловых точек системы в глобальной системе координат, зависящий от изменений матрицы  $[K(\Delta)]$ , вызванных учетом влияния деформированной геометрии рассчитываемой модели по отношению к геометрии ее исходного состояния.

Решение матричной системы нелинейных разрешающих уравнений (20) выполняется способом «последовательных увязок силовых и деформационных параметров» [8]. Итерационная процедура способа следующая:

а) выполняется расчет модели гибкой стержневой системы (ГСС) по недеформированной схеме, согласно п. 1, с целью определения в КЭ системы  $s$  векторов внутренних усилий  $\{r^0\}$  и перемещений  $\{\Delta_1\}$ , принимаемых за параметры исходного состояния;

б) с учетом полученных значений перемещений узлов  $\{\Delta_1\}$  корректируются координаты узлов конечноэлементной модели ГСС, что ведет к корректировке длин КЭ в матрице жесткости системы  $[K(\Delta)]$ , матрице преобразований  $[T_\alpha]$  и векторе  $\{P'_s\}$ , а также углов поворота локальных осей КЭ в матрице преобразований  $[T_\alpha]$  и векторе  $\{P'_s\}$ ;

в) После корректировки геометрии первого приближения – выполняется расчет по деформированному состоянию первого приближения с целью определения  $s$  векторов внутренних усилий в каждом КЭ системы  $\{r^1\}$  и их приращений первого приближения  $\{\Delta r^1\} = \{r^1\} - \{r^0\}$ ;

— выполняется расчет по деформированному состоянию первого приближения на приращения внутренних усилий  $\{\Delta r^1\}$  и, с учетом полученных невязок к перемещениям узлов  $\{\Delta_{\Delta_1}\}$ , по аналогии с п. б)

корректируется состояние геометрии системы второго приближения  
 $\{\Delta_2\} = \{\Delta_1\} + \{\Delta_{\Delta 1}\}$ ;

г) Далее вычислительная процедура второго и последующих приближений повторяется, согласно п. в), до достижения требуемой точности, которая достигается уже после 3÷5 итераций.

Вычисленный в результате решения уравнений (1) вектор  $\{\Delta\}$  позволяет определить вектор усилий в узлах стержня  $\{r'\}$ , после чего для всех КЭ могут быть определены прогибы  $v$  (15) и изгибающие моменты  $M_s$  (16) в произвольном по его длине сечении.

3. Численная реализация метода. Изложенный здесь деформационный метод расчета гибких стержневых систем положен в основу алгоритма, реализованного в программе расчета SdCAD средствами программ мирования математической среды MathCAD (рис. 4) [11, 12].

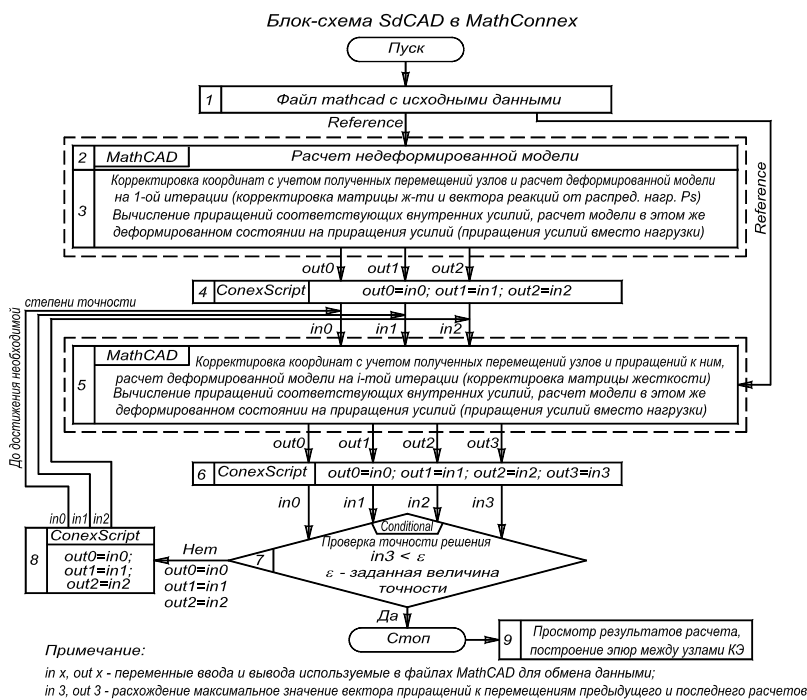


Рис. 4. Укрупненная блок-схема программы SdCAD в среде MathCAD

С ее использованием выполнен анализ многих конструктивных схем с гибкими стальными элементами (балочно-вантовых, пологих арочных, стальных ферм и рам) как вновь проектируемых, так и предназначенных для усиления несущих конструкций перекрытий [10]. Результаты подтвердили высокую надежность и экономическую целесообразность применения

программы при анализе расчетных моделей с ярко выраженной геометрической нелинейностью.

Это подтверждает и пример расчета стальной рамы обследуемого объекта, НДС которой определено по программе SdCAD с учетом требований ТКП ЕН 1993-1-1 [3].

Анализ результатов расчета рамы показал, что линейный ее расчет не позволяет выявить действительную несущую способность колонн рамы. Недооценка действительных расчетных усилий в нижней части колонны рамы составляет 30,8 %. Кроме того, коэффициент увеличения расчетной нагрузки  $\alpha_{ст}$ , при котором будет достигнуто ее неустойчивое состояние в упругой стадии, вычисленный по методике, указанной в [2], равен 6,83. Однако, чтобы задействовать этот резерв несущей способности, необходимо было доказать его расчетом по деформированному состоянию. Результаты анализа расчетной модели представлены на рис. 5.

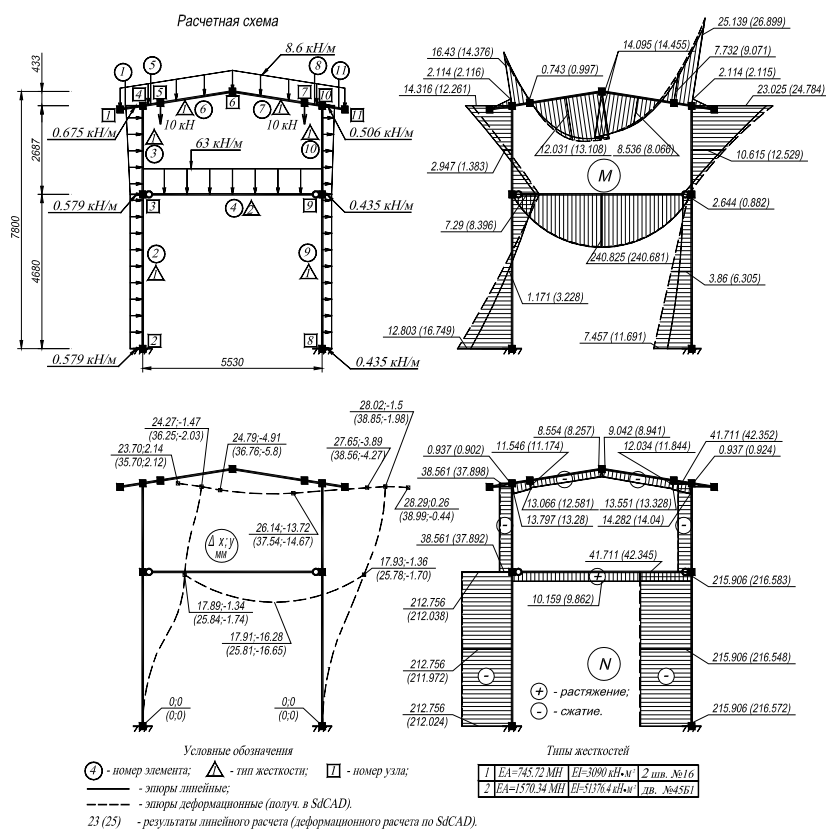


Рис. 5. Результаты расчета стальной рамы по программе SdCAD

## **Выводы**

При анализе расчетных моделей гибких стержневых систем применение программы SdCAD, в которой реализован разработанный авторами деформационный метод расчета, дает возможность инженеру-конструктору разрабатывать конструктивные системы, предельно близкие к оптимальным. При этом имеется возможность выполнить решение сложных многофункциональных нелинейных задач строительной механики, связанных с оценкой их напряженно-деформированного состояния, предельно близкого к действительной работе элементов в конструктивных схемах. Это позволит проектировать надежные и экономичные конструктивные системы, расчетные модели которых целесообразно представить в виде гибких стержневых систем.

## **Литература**

- [1] Надежность строительных конструкций. Общие принципы: СТБ ISO 2394-2007 (ISO 2394:1998, IDT). Введ. 29.12.2007, № 67. – Минск: Госстандарт Республики Беларусь, 2007. – 65 с.
- [2] Еврокод 3. Проектирование стальных конструкций. Часть 1-1. Общие правила и правила для зданий. ТКП EN 1993-1-1-2009 и национальное приложение. Введ. с 01.01.2010 Минстройархитектуры, 2010. – 93 с.
- [3] Еврокод 3. Проектирование стальных конструкций. Часть 1-11. Проектирование конструкций со стальными элементами, работающими на растяжение. ТКП EN 1993-1-11-2009 и национальное приложение. Введ. с 01.01.2010 Минстройархитектуры, 2010. – 39 с.
- [4] Перельмутер А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – Киев: Сталь, 2002. – 600 с.
- [5] Строительная механика. Стержневые системы: учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашенников, Н.Н. Шапошников; под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
- [6] Игнатюк В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: учебное пособие / В.И. Игнатюк. – Брест: БрГТУ, 2004. – 172 с.
- [7] Уласевич В.П. Деформационный расчет и исследование напряженно-деформированных состояний пологих однопоясных распорных систем: автореф. дис. ...к.т.н.: 01.02.03 / В.П. Уласевич; ЦНИИСК им. Кучеренко. – М., 1984. – 24 с.
- [8] Уласевич В.П. Деформационный расчет гибких балочно-вантовых систем методом конечных элементов в среде MathCAD / В.П. Уласевич, О.В. Костюк // Вестник БрГТУ. – 2004. – № 1 (25): Строительство и архитектура. – С. 111–117.
- [9] Уласевич В.П. Прямолинейный гибкий стержень как универсальный конечный элемент в расчетах гибких стержневых систем методом конечных элементов / В.П. Уласевич, О.В. Костюк // Вестник БрГТУ. – 2007. № 1(43): Строительство и архитектура. – С. 45 – 49.

- [10]** Уласевич В.П. Гибкие балочно-вантовые системы в конструктивных схемах усиления перекрытий / В.П. Уласевич, О.В. Костюк // Вестник БрГТУ. – 2007. № 1 (43): Строительство и архитектура. – С. 50 – 55.
- [11]** Костюк О.В. Деформационный метод расчета комбинированных балочно-вантовых систем, применяемых для усиления конструкций перекрытий: автореф. дис....к.т.н.: 05.23.01 / О.В. Костюк; УО «Брестский государственный технический университет» РБ. – Брест, 2008. – 21 с.
- [12]** Уласевич В.П. К эффективности разработки алгоритма деформационного метода расчета гибких стержневых систем в среде MathCAD / В.П. Уласевич, О.В. Костюк, Н.В. Бочарова // Вестник БрГТУ. – 2009. № 5 (59) Физика, математика, информатика. – С. 57 – 62.

*Надійшла до редколегії 18.06.2010 р.*