

УДК 539.3

Определение рациональной начальной формы гибких пологих нитей

Ленда А.В., Цыхановский В.К., д.т.н.

ОАО «УкрНИИпроектстальконструкция им. В.Н. Шимановского», Украина

Анотація. Розглянута задача формування і дослідження напружено-деформованого стану гнучкої нитки. Отримані зміни початкової форми нитки при шарнірно-нерухомому і пружно-піддатливому закріпленні. За результатами чисельного розрахунку побудовані криві форми пологої нитки в деформованому і недеформованому станах.

Аннотация. Рассмотрена задача формообразования и исследования напряженно-деформированного состояния гибкой нити. Получены изменения начальной формы нити при шарнирно-неподвижном и упругоподатливом закреплении. По результатам численного расчета построены кривые формы пологой нити в деформированном и недеформированном состояниях.

Abstract. The problem of shaping and research of the stressed-deformed state of flexible cable is considered. The changes of initial cable form at hinged and resilient flexing fixing are received. On the results of numerical calculation the curve forms of the flat cable in the deformed and undeformed state are built.

Ключевые слова: гибкая нить, формообразование, напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов.

Введение. Форма и размеры являются неотъемлемыми характеристиками любой конструкции [4]. Вся архитектура основана на проектировании сооружений определенной формы. Результатом применения технологии формообразования является конструкция заданной формы и размеров, способная сохранять эту форму и размеры в течение заданного времени эксплуатации. Цель формообразования состоит в получении заданных геометрических параметров (формы, размеров, шероховатости поверхности) конструкции. Следует заметить, что если решить задачу формообразования отдельного элемента конструкции, то комплексный подход к заданию формы позволит развить существующие методы и внедрить их в вычислительный процесс. Применение простых аналитических формул для решения проблемы формообразования и замена ими некоторых расчетных процессов является актуальной задачей.

Постановка задачи. Рассмотрим абсолютно гибкую и нерастяжимую однородную нить. Равновесная форма данной нити, находящейся в поле силы тяжести, описывается плоской кривой, которая называется «цепной линией», и в декартовой системе координат (рис. 1) имеет вид (уравнение Лейбница [3]):

$$y = \frac{H}{q} \left(\operatorname{ch} \frac{xq}{H} - 1 \right),$$

где $H = \text{const}$ – проекция на горизонтальную ось натяжения нити T ; q – вес единицы длины однородной тяжёлой нити.

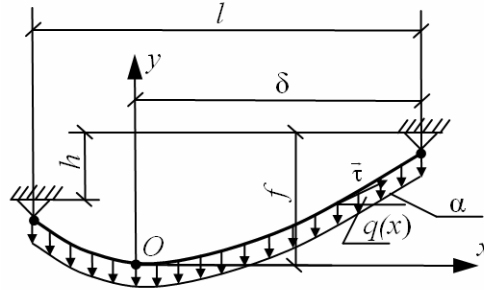


Рис. 1. Расчётная схема абсолютно гибкой однородной нити

В более широком смысле под термином «цепная линия» понимается кривая равновесия тяжёлой однородной и растяжимой нити, при этом

$$q = \frac{q_0}{1 + \alpha^* \cdot T},$$

где α^* – удельное относительное удлинение нити:

$$\alpha^* = \frac{1}{E^*}, \quad E^* = EF,$$

E – модуль упругости материала нити; F – площадь поперечного сечения нити.

Стрела провисания тяжёлой нити, описываемой цепной линией, называется малой, если она существенно мала по сравнению с горизонтальным пролётом между граничными точками нити. Теория нити с малой стрелой провисания (пологой нити) имеет непосредственное отношение к расчёту висячих конструкций мостов, покрытий промышленных и гражданских зданий, комбинированных висячих систем и пр. Это объясняется тем, что при малой стреле провисания нить мало отклоняется от её горизонтальной проекции и можно считать, что распределение силы тяжести висящей нити можно моделировать не по её длине, а по горизонтальной прямой, т.е. так же как и распределение нагрузки висячей комбинированной конструкции моста. Поэтому удобно рассмотреть решение дифференциальных уравнений равновесия для нерастяжимой нити с малой стрелой провисания, а затем получить решение для растяжимой нити с малой стрелой прогиба.

Для нитей с малой стрелой провисания, граничные точки которых находятся на одном уровне, отношение разницы длины нити и пролёта к пролёту и разницы максимального натяжения и распора к самому распору составит при $f = 0,002l$ [3] соответственно 0,11 % и 0,32 %, а при $f = 0,01l$ соответственно 2,7 % и 8 %. Для таких нитей результаты вычислений по точным формулам с использованием формы цепной линии и приближенным формулам с использованием уравнения формы практически совпадают, т.к. разница находится в интервалах точности задания исходных данных [3].

Таким образом, для пологих нитей при величине $\frac{f}{l} \leq 0,06$ при расположении опор на одном уровне ($h = 0$) длина нити ненамного превышает величину пролёта, а максимальное натяжение нити T_{max} несущественно превышает горизонтальную составляющую H [3]. Благодаря этому механическому эффекту приняты допущения, что распределение силы тяжести висящей нити в рассматриваемых расчётных схемах можно моделировать по горизонтальной проекции нити, а натяжение нити T заменять на его горизонтальную составляющую. Эти допущения приняты для нерастяжимых нитей. Рассматривая влияние упругих деформаций [3] и допуская, что для высокомодульных (стальных) материалов справедливы соотношения:

$$F^* \gg H_0; \frac{H_0}{E^*} = \alpha^* H_0 \ll 1 \text{ или } \alpha^* H_0 = \varepsilon \ll 1,$$

приходим к выводу – «для нитей с малой стрелой провисания также можно предположить при наличии упругой деформации, что во всех точках нити её натяжение T можно заменить на горизонтальную составляющую, а длину нити после деформирования её пролётом, при этом следует учитывать существенное изменение горизонтальной составляющей после деформации».

Аналитическое решение. На основании формул для равновесных нитей с учётом аппроксимаций по цепной линии (непологой), по параболической и круговым кривым (для пологих) нитей можно вычислить следующие параметры, сведенные в табл. 1.

Анализируя соотношения для пологой нити, приведенные в табл. 1, можно заключить, что уравнения ее формы описываются кривыми второго порядка и наиболее рациональной является плоская круговая кривая.

Сравнительный анализ. Полученные выше аналитические выражения формы упругой пологой нити целесообразно проанализировать на примерах с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

Таблиця 1

№ п/п	Цепная линия	Параболическая (пологая) кривая	Круговая кривая (пологая)
1	$H = aqch \frac{x}{a}$	$H = q \frac{l^2}{f_f}$	$H = q \frac{l^2 + 4f^2}{8f}$
2	$a = \frac{H}{q}$	$a = \frac{l^2}{8f}$	$a = \frac{l^2 + 4f^2}{8f}$
3	$f = a(ch \frac{\delta}{a} - 1)$	$f = \frac{l^2}{8a}$	$f = \frac{l^2 + 4(f^0 + U_{\max})}{8a}$
4	$y = \frac{H}{q} \left(ch \frac{xq}{H} - 1 \right)$ $y = a(chu + \frac{\alpha^*}{2} aq_0 \cdot ch^2 U) - \frac{H}{q}$	$y = \frac{4f}{l^2} (l - x^2)$	$y = \sqrt{\frac{(l^2 + 4f^2)^2}{64f^2} - x^2}$
5	$L = a \left(sh \frac{\delta}{a} + sh \frac{l - \delta}{a} \right)$	$L = l + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l}$	$L = \frac{l^2 + 4f^{*2}}{4f^*} \cdot \arcsin \frac{l}{2R^*}$

Определим геометрические параметры и уравнение пологой нити при условиях:

— пролёт $l = 120,0$ м;

— равномерно распределённая нагрузка на единицу длины горизонтальной проекции нити – $q = 5$ ктс/м.

Дискретная модель и расчетная схема нити приведена на рис. 2.

Сеточная область вдоль нити выбрана так, чтобы размеры отдельного конечного элемента по длине и ширине находились в пределах 1/10, не более. Определенное заранее приведенное квадратное сечение нити составляет:

$$b \cdot h_0 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}; \quad b = h_0 = \frac{d}{2} \sqrt{\pi}; \quad b = h_0 = \frac{1,4}{2} \sqrt{\pi} = 1,24072 \text{ см.}$$

С учетом симметрии длина расчетного фрагмента составляет $l/2 = 6000,0$ см. Целесообразно вдоль сеточной координаты S_3 принять размер сеточной области $S_3 = M_3 = 769$, тогда размеры отдельного конечного элемента составят

$$b \times \frac{l}{2 \cdot 768} = b \times \frac{12000,0}{2 \cdot 768} = 1,24072 \times 7,8125,$$

т.е. отношение сторон КЭ будет в пределах $\frac{7,8125}{1,24072} \cong 6,3 < 10$.

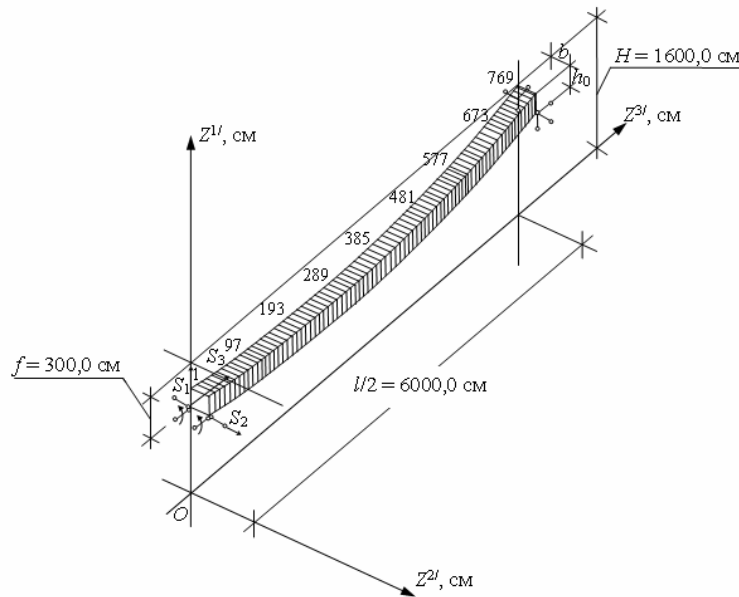


Рис. 2. Дискретная модель и расчетная схема гибкой пологой нити

Равномерно распределенную нагрузку целесообразно привести к значению плотности:

$$q = \rho \cdot v_{(l)} = \rho \cdot b \cdot h_0 \cdot 1;$$

$$\rho = \frac{q}{b \cdot h_0};$$

$$\rho_1 = \frac{q_1}{b \cdot h_0} = \frac{5,0}{100,0 \cdot 1,24072^2} = 0,03248 \text{ кгс/см}^3;$$

$$\rho_2 = \frac{q_2}{b \cdot h_0} = \frac{10,0}{100,0 \cdot 1,24072^2} = 0,064961 \text{ кгс/см}^3.$$

Размеры сеточной области и число узлов составляют

$$NUX = M1 \times M2 \times M3 = 2 \times 2 \times 769 = 3076,$$

что соответствует числу разрешающих уравнений

$$K = 3 \times NUX = 3 \times 3076 = 9228$$

без учета накладываемых связей.

В соответствии с расчетной схемой рассмотрены два варианта граничных условий:

- с шарнирно-неподвижным закреплением опор;
- с шарнирно-подвижным закреплением опор – упругоподатливая связь по 3-му направлению.

Второй вариант рассмотрим только для нагружения $q_2 = 10$ кгс/м.

Рассматриваемая задача формообразования и исследования напряженно-деформированного состояния гибкой нити (как узкий участок тонкой гибкой оболочки) относится к классу сильно нелинейных пространственных конструкций. Решение осуществляется на основе специального алгоритма на основе комбинаций методов продолжения по параметру возмущения, Ньютона-Канторовича и регуляризации [1], [5]. Решение рассматриваемого примера при нагружении 5 кгс/м выполнено за 150 шагов продолжения по параметру нагружения, а при нагружении – 10,0 кгс/м – за 200 шагов продолжения по параметру нагружения. Величина начального шага нагружения при выборе устойчивого решения равна 1/500 от конечной величины нагрузки. Изменение шага нагружения в процессе продолжения по параметру осуществлялось по закону арифметической прогрессии.

Решение рассматриваемого примера можно классифицировать как решение тестовой задачи. В табл. 2 представлены результаты определения формы пологой нити в деформированном состоянии, при этом величина перемещения составила $u_{\max}^1 = -62,86$ см, т.е. более 50-ти толщин. В табл. 2 рассмотрены координаты 9-ти точек вдоль сеточной координаты S_3 . Численные результаты сравниваются с аналитическими при использовании уравнения формы круговой пологой нити:

$$y = \pm \sqrt{\frac{(l^2 + 4 \cdot f^{*2})^2}{64 \cdot f^{*2}} - x^2},$$

при этом использовано аналитическое решение с учетом того, что система координат расположена в центре вращения радиуса R^* , т.е. в системе координат $OZ^1 Z^2 Z^3$ координаты этой точки равны

$$Z_c^{2'} = 0; Z_c^{3'} = 0;$$

$$Z_c^{1'} = R^* + (H - f^*) = 50180,0 + (1600,0 - 360,0) = 51420,0$$

и аналитически координаты точек нейтральной линии нити могут быть вычислены по формуле:

$$Z_N^{1'} = 51420,0 - \sqrt{50180,0^2 - Z_N^{3'}}$$

Таблица 2

Сравнение координат начальной и деформированной формы пологой нити с закрепленными краями (нагрузка – 5 кгс/м)

№ т-к	№ у-в	Начальная форма		Перемещения		Деформированная форма		Теоретические значения, у, см	Разница, %
		$Z_N^{3'(0)}$, см	$Z_N^{1'(0)}$, см	$u_N^{3'}$, см	$u_N^{1'}$, см	$Z_N^{3'}$, см	$Z_N^{1'}$, см		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0,00	1300,00	0,00	-62,86	0,00	1237,14	1240,00	0,23
2	385	751,23	1304,69	0,57	-61,88	751,80	1242,81	1245,60	0,22
3	769	1502,34	1318,76	1,08	-58,93	1503,42	1259,83	1262,53	0,21
4	1153	2253,22	1342,22	1,49	-54,00	2254,71	1288,22	1290,68	0,19
5	1537	3003,75	1375,05	1,73	-47,12	3005,48	1327,93	1330,09	0,16
6	1921	3753,81	1417,25	1,76	-38,27	3755,57	1378,98	1380,73	0,13
7	2305	4503,28	1468,81	1,52	-27,46	4504,80	1441,35	1442,61	0,09
8	2689	5252,05	1529,73	0,95	-14,71	5253,00	1515,02	1515,71	0,05
9	3073	6000,00	1600,00	0,00	0,00	6000,00	1600,00	1600,00	0,00

Вычисление координат для точек $N = 1, \dots, 9$ сведено в табл. 2, а результаты внесены в графу «9».

Численные значения координат характерных точек $N = 1, \dots, 9$ (см. табл. 2) сравнивались с аналитическими и разница составила от 0,23 % до 0,05 % (см. графу 10 табл. 2). По этим результатам можно судить о том, что численные результаты определения деформированной формы (при использовании начальной, полученной с помощью формул табл. 1) практически совпадают с аналитическими.

На основе численных решений усилия в КЭ дискретной модели нити практически одинаковы (как для единичного сечения цилиндрической оболочки – кольцевые усилия):

$$T_{\max} = \bar{T}_{\max} \cdot b = 2005,0 \cdot 1,24072 = 2488,26 \text{ кгс,}$$

где \bar{T}_{\max} – погонное усилие в нити-оболочке.

Аналитическое значение усилия в нити составляет $T^* = 2509,0$ кгс, а разница с численным результатом составляет

$$\Delta T\% = \frac{(2488,26 - 2509,0) \cdot 100}{2509,0} = -0,81\%$$

Напряженные состояния в нити, полученные численно и аналитически, также практически совпадают.

По результатам численного расчета, которые практически совпадают с аналитическими, построены кривые формы полой нити в деформированном и недеформированном состояниях, которые представлены на рис. 3.

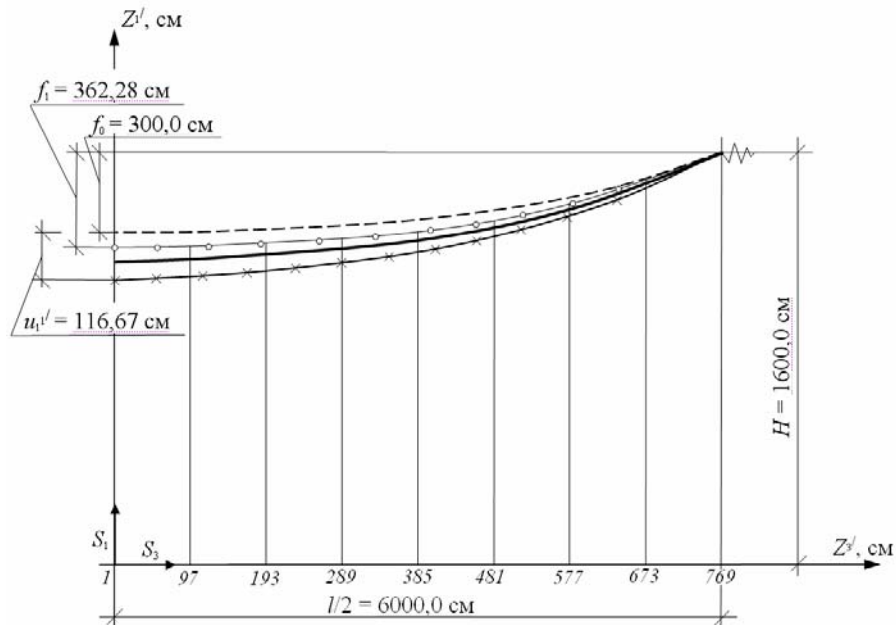


Рис. 3. Начальная и деформированная форма полой нити:
 - - - начальная форма нити;
 —○— от нагрузки $q_1 = 5$ кгс/м;
 ——— от нагрузки $q_2 = 10$ кгс/м при жестком закреплении опор;
 —×— от нагрузки $q_2 = 10$ кгс/м при упругоподатливом закреплении опор

Результаты проведенного анализа показывают, что предложенные уравнения формы полой нити для определения начальной формы при заданном пролете и величине нагрузки вполне приемлемы и могут быть использованы при аппроксимации для численных экспериментов.

При расчетах нитей с постоянным натяжением аналитический расчет может успешно использоваться в инженерных расчетах, что значительно упрощает расчет подобных элементов конструкции в случае отсутствия соответствующего программного обеспечения.

Выводы

В результате проведенного анализа было показано, что задача формообразования отдельного элемента вантовых конструкций с целью организации комплексного подхода к заданию его формы является актуальной пробле-

мой, а ее решение позволит развить существующие методы и внедрить их в вычислительный процесс.

Вычислены основные геометрические параметры начальной формы конструкции на основании формул равновесных нитей с учётом аппроксимаций по цепной линии, по параболической и круговым кривым. Установлено, что наиболее рациональной является плоская круговая кривая.

Рассмотрена задача формообразования и исследования напряженно-деформированного состояния гибкой нити (как узкий участок тонкой гибкой оболочки). Получены изменения начальной формы нити при шарнирно-неподвижном и упругоподатливом закреплении. По результатам численного расчета построены кривые формы пологой нити в деформированном и недеформированном состояниях.

В результате проведенного анализа сделан вывод об эффективности и целесообразности применения полученных аналитических формул для определения рациональной формы пологой нити конечной жесткости в ходе практического расчета.

Литература

- [1] Баженов В.А. Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок / В.А. Баженов, В.К. Цыхановський, В.М. Кислоокий. – К.: КНУБА, 2000. – 386 с.
- [2] Мацелинский Р.Н. Статический расчет гибких висячих конструкций / Р.Н. Мацелинский. – М. – Л.: Госстройиздат, 1950. – 192 с.
- [3] Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити / Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
- [4] Отто Ф. Висячие покрытия, их формы и конструкции / Ф. Отто. – М.: Госстройиздат, 1960. – 179 с.
- [5] Шимановский А.В. Теория и расчет сильнонелинейных конструкций / А.В. Шимановский, В.К. Цыхановский. – К.: Сталь, 2005. – 432 с.

Надійшла до редколегії 15.06.2010 р.