

УДК 624.011

## **Рассуждения о модулях упругости древесины в расчетах конструкций**

**Клименко В. З.,** к.т.н.

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина

**Аннотация.** С физической точки зрения, нет объективного объяснения существованию двух модулей упругости материала в нормативном документе по проектированию деревянных конструкций. Обоснование модуля упругости, зависящего от расчетного сопротивления древесины, в расчетах элементов по деформированной схеме, с исторической позиции, в оправдание устаревшего метода расчета ненаучно.

**Анотація.** З фізичної точки зору, немає об'єктивного пояснення існуванню двох модулів пружності матеріалу у нормативному документі з проектування дерев'яних конструкцій. Обґрунтування модуля пружності, залежного від розрахункового опору деревини, в розрахунках елементів за деформованою схемою, з історичної позиції, на виправдання застарілого методу розрахунку не є науковим.

**Abstract.** From a physical point of view there is no explanation for the existence of two modules of elasticity in the normative document for designing of timber structures. Justification of the elastic modulus depending on the current resistance of wood in the calculation of the elements in the deformed scheme is unscientific from the historical position, in order to justify the outdated method of calculation.

**Ключевые слова.** Фундаментальный характер модуля упругости материала, расчет по деформируемой схеме.

С физической точки зрения, нет объективного объяснения существованию двух модулей упругости материала в нормативном документе по проектированию деревянных конструкций. Обоснование модуля упругости, зависящего от расчетного сопротивления древесины, в расчетах элементов по деформированной схеме, с исторической позиции, в оправдание устаревшего метода расчета ненаучно.

### **Суть вопроса**

В Украине происходит замена прежней нормативной базы по проектированию деревянных конструкций на новую, и желательно, чтобы спорные и неопределенные положения предыдущих норм (СНиП II-25-80) не вошли в содержание новых национальных нормативных документов. Суть вопроса заключается в присутствии в нормах проектирования искусственного модуля упругости древесины. Вот как это положение сформулировано в нормах, цитируем: “Модуль упругости древесины при расчете по предельным состояниям второй группы следует принимать равным: вдоль волокон  $E=10000$  МПа; ...”. “Модуль упругости древесины

в расчетах конструкций на устойчивость и по деформированной схеме следует принимать равным  $E'=300R_c$  ( $R_c$  – расчетное сопротивление сжатию вдоль волокон), ...". Таким образом, появились два модуля упругости материала, что требует глубокого научного обоснования.

Автор рассуждает о модулях упругости древесины в двух разных расчетах конструкций с позиции исторической и физической. Конкретно речь идет о расчете элементов, работающих на сжатие с изгибом. Относительно расчета на прочность по деформированной схеме свои соображения, с методологической точки зрения, автор изложил в [1].

### Расчет по деформациям. Модуль $E$

Нормативный метод расчета сжато-изгибаемых элементов основан на теории краевых напряжений проф. К. С. Завриева, разработанной в далекие тридцатые годы прошлого столетия, которая дает менее точный результат по сравнению с теорией устойчивости Свенцицкого Г. В., предложенной в то же самое время. По соображению авторов первого нормативного документа по проектированию деревянных конструкций (ОСТ 90001-38), метод на основе теории краевых напряжений оказался более простым. Подробно характеристика нормативного метода расчета с позиции его теоретического качества и соответствия его математической формализации физическому явлению, происходящему в деревянных элементах при одновременном изгибе и сжатии, рассмотрены в [2, 3, 4].

В контексте статьи надо вспомнить некоторые положения теории краевых напряжений, в соответствии с которой эти напряжения равны:

$$\sigma_{кр} = N/A + (M_q + N \cdot y)/W \quad (1)$$

В (1)  $y$  – прогиб элемента, который складывается в деформированной схеме из прогиба  $y_q$  от поперечной нагрузки и дополнительного прогиба  $y_N$  от дополнительного изгибающего момента  $N \cdot y_q$ . В выводе теории прогиб  $y$  в состоянии статического равновесия элемента находился из решения дифференциального уравнения перемещений изгибаемого элемента:

$$d^2 y / dx^2 = -M_x / EI \quad (2)$$

с вычисленной изгибной жесткости элемента по модулю упругости  $E$ .

В то время, когда разрабатывалась теория краевых напряжений, было представление только об одном модуле упругости древесины с соотношением его к временному сопротивлению древесины сжатию вдоль волокон (по А. Б. Губенко)  $E/R_{сп} \approx 310$ .

В теории краевых напряжений вычисление прогиба элемента в деформированной схеме выполняется по приближенной формуле:

$$y_D = y_q / (1 - N / N_{Э}), \quad (3)$$

в которой сила Эйлера  $N_{Э} = \pi^2 EI / l^2$  находится с использованием того же модуля упругости древесины  $E$ .

Формула (1) приобрела вид:

$$\sigma_{кр} = N / A_{расч} + M_q / [W_{расч} (1 - N / N_{кр})], \quad (4)$$

а с заменой  $(1 - N / N_{кр})$  на коэффициент  $\xi$  формула (1) получила вид, приведенный в нормах проектирования:

$$\frac{N}{A_{расч}} + \frac{M_D}{W_{расч}} \leq R_c, \quad (5)$$

в которой  $M_D = M_q / \xi$ .

Таким образом, в теории краевых напряжений и в нормативном методе расчета элементов по предельному состоянию первой группы с учетом деформированной схемы используется модуль упругости древесины  $E$ . Оказывается, следовательно, что нормативный метод расчета сжато-изгибаемых элементов вошел в противоречие с положением в приведенной выше цитате из норм.

Что такое деформированная схема элемента или конструкции, нормы проектирования не объясняют. Это, по мнению автора, является недостатком норм. Пользователь норм не должен строить догадки о том, что означает деформированная схема.

### **Расчет по прочности. Модуль $E'$**

Пособие к нормам проектирования [5] тоже не объясняет суть деформированной схемы, в п. 4.11 повторяются положения теории краевых напряжений. Однако в п. 4.1 опять говорится о двух модулях упругости древесины. Цитируем: “Следовательно, надо различать нормируемые значения модулей упругости древесины при расчете: по предельным состояниям первой группы  $E'$ ; по предельным состояниям второй группы  $E$ ”. Из равенства  $E' / R_c = \bar{E} / R_{сп}$  с учетом того, что сейчас соотношение кратковременного модуля упругости  $\bar{E}$  к временному сопротивлению сжатию  $R_{сп}$  составило  $\bar{E} / R_{сп} = 300$ , соотношение  $E' / R_c = 300$ . То есть, модуль упругости древесины зависит от расчетного

сопротивления древесины сжатию вдоль волокон. Как это понять с физической точки зрения? Расчетное сопротивление назначается в пределах упругой работы древесины. Упругопластическая работа древесины появляется в сжатых элементах и учитывается при их расчете на устойчивость. В п. 4.2 Пособия говорится о том, что расчет сжато-изгибаемых элементов на прочность и на устойчивость плоской формы деформирования производится по упругой стадии работы. Уже упоминаемый п. 4.1 Пособия начинается со следующего положения: “В расчетах элементов на прочность по деформированной схеме и на устойчивость используется параметр жесткости  $EF$ ”. Приведенные цитаты противоречат друг другу. С физической точки зрения, непонятно, как модуль  $E$  становится переменным при различных  $R_c$ , когда сейчас нормы рассматривают три сорта цельной и клееной древесины. Подобные представления о модуле упругости древесины требует серьезного обоснования.

Модуль Томаса Юнга характеризует модуль упругости как фундаментальное свойство конструкционного материала. Соглашаемся с тем, что физический смысл модуля упругости даже сейчас, не говоря уже про время Т. Юнга, есть чем-то очевидным. Сам Т. Юнг дал следующее определение модуля упругости: “Модуль упругости всякого вещества представляет собой столбик этого вещества, способный вызвать давление на свое основание, которое так относится к весу, как длина столбика к уменьшению его длины”.

### Модули деформаций древесины

В [6] рассматривается модуль длительной деформации  $E_{dl}$  при разработке методики расчета конструкций на длительные воздействия нагрузок. Базой для вычисления  $E_{dl}$  является величина и режим изменения во времени напряжений  $\sigma(t)$  и значения относительных деформаций  $\varepsilon(t_0, t)$ :

$$E_{dl}(t_0, t) = \sigma(t) / \varepsilon(t_0, t). \quad (6)$$

Тут есть обоснование модуля  $E_{dl}$  с физической позиции. Подобного обоснования нет в рекомендации норм проектирования относительно модуля упругости  $E' = 300R_c$ , определяемого в зависимости от расчетного сопротивления материала. В нормах не отражено то, о чем говорится в [6]: длительный модуль деформации используется в нелинейных расчетах статически неопределимых деревянных конструкций на длительные нагрузки. В [6] рассматривается мгновенный начальный модуль деформации, равный  $E_0 = 1,48 \cdot 10^4$  МПа, и константа  $H = 10^4$  МПа, имеющая физический смысл длительного модуля деформации. При напряжениях  $\sigma < \sigma_{dl}$  при сколь угодно большой продолжительности действия нагрузки

модуль деформации  $H = \sigma_{\text{дл}}/\varepsilon - \text{const}$ . При  $\sigma > (E_0/H)\sigma_{\text{дл}}$  наблюдается установившаяся ползучесть и деформации становятся необратимыми. В этом случае  $\varepsilon = (R_{\text{сп}} - \sigma_{\text{дл}})/B$ . Вводится модуль деформации при их критическом нарастании, равный  $B = (R_{\text{сп}} - \sigma_{\text{дл}})/\varepsilon_2 - \text{const}$ .

Константа  $H$  в соответствии с нормами проектирования есть модуль упругости  $E$ . С физической точки зрения, в расчетах деревянных конструкций нет оснований к изменению этой константы, “привязывая” ее к  $R_c$ .

### **Искусственность модуля упругости $E'$**

Вернемся к теории краевых напряжений. Представление о модуле упругости  $E'$  в расчете по деформируемой схеме требует использования его в теории краевых напряжений. Это приводит к решению, существенно отличающемуся от того, что дают нормы проектирования. Коэффициент  $\xi = 1 - N/N_3$  становится зависимым от Эйлеровой силы в соответствии с изменением модуля  $E'$ . Для разных сортов древесины изменение  $N_3$  находится в широком диапазоне. Использование теории краевых напряжений без внесения в нее уточнений, вызванных переменным модулем упругости в  $N_3$ , дает конечный результат с разной мерой приближенности расчета как в сторону запаса, так и в сторону недостаточности прочности элементов из древесины разного сорта. Остается вопрос: с каким намерением введен модуль упругости  $E'$ ? В Пособии [5] ответа нет, в нем не объясняется, каким образом использовать параметр жесткости  $E'I$  в расчетах сжато-изгибаемых элементов на прочность по деформируемой схеме. В п. 4.2 отмечается, что расчет сжато-изгибаемых элементов на прочность выполняется в упругой стадии работы клееной и цельной древесины. В связи с этим появление модуля  $E'$  входит в противоречие с расчетом конструкций по методу предельных состояний.

Дальше в п. 6.29 Пособия содержится указание о том, что перемещения узлов ферм с учетом податливости соединений должны выполняться с введением в известные формулы строительной механики приведенного модуля упругости  $E'_{\text{нр}}$ , который находится в зависимости от  $E'$ . Не дается объяснение, для чего нужно устанавливать перемещение узлов. Допускаем – необходимостью установления деформированной схемы, что важно для ферм с неразрезным верхним поясом, в которых распределение усилий в панелях в деформированной схеме отличается от распределения усилий в

изначальной геометрической схеме. При этом нормами проектирования перемещение узлов ограничивается, и, по сути, этот расчет есть проверкой по второму предельному состоянию, который выполняется с использованием в формуле Мора жесткости стержней  $EA$ . Зачем в однотипных расчетах конструкций применять модули упругости древесины, отличающиеся между собой в 2...4 раза? Соответственно этому отличаются между собой деформированные схемы конструкций. Остается вопрос: как объяснить изменение модуля упругости древесины в конструкциях при расчетах их на прочность и по деформациям в пределах упругой работы материала?

В нормах проектирования конкретное указание о расчете по деформированной схеме касается расчета на прочность только элементов, работающих на сжатие с изгибом и внецентренно сжатых<sup>1</sup>. В формуле (5) изгибающий момент  $M_d$  заменяет теоретически точный момент  $M_q+N$  из формулы (1). Теория краевых напряжений не дает точного решения прогиба  $u_d$  по формуле (3). В [1], с методологической позиции, выказано замечание о возможности не использовать формулу  $\xi = \left(1 - N / N_{кр}\right) = 1 - \left(N / \left(\varphi \cdot R_c \cdot A_{бр}\right)\right)$  на всем диапазоне гибкостей сжато-изгибаемых элементов в плоскости изгиба, когда в реальных элементах, например, в панелях ферм из клееной древесины, появляются случаи, когда коэффициент  $\varphi$  ставится больше единицы. Подобный методологический диссонанс вызывает серьезную претензию к нормативному методу расчета, с точки зрения философии техники, при несовпадении математической формализации расчета с физическим явлением [3, 4].

В [7] оправдание тому, что вместо точного решения для прогиба  $u$  принято приближенное решение для  $u_d$  по теории Завриева К. С. [8], объясняется сложностью интегрирования дифференциального уравнения оси сжато-изогнутого элемента в деформированной схеме. Сейчас нет практических трудностей в использовании точного расчета методом начальных параметров. Применение приближенного метода с серьезной к нему методологической претензией [4] представляется анахронизмом.

---

<sup>1</sup>В [3] высказано сомнение в возможности распространения метода расчета сжато-изогнутых элементов на элементы внецентренно сжатые, поскольку физическое явление в них не отвечает деформировано-напряженному состоянию на основе теории краевых напряжений.

### Точный метод расчета сжато-изогнутого элемента

Дифференциальное уравнение изгиба сжато-изогнутого линейно упругого элемента при постоянной жесткости имеет вид:

$$EI \cdot y^{IV} + N \cdot y'' = q(x). \quad (7)$$

Дифференциальное уравнение изгибных перемещений сжато-изогнутого стержня с произвольными условиями закрепления концов имеет вид:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q(x)}{EI}, \quad (8)$$

а его решение –

$$y \leq C_1 \cdot \sin kx + C_2 \cdot \cos kx + C_3 \cdot x + C \cdot y + y. \quad (9)$$

В формулах (8) и (9), соответственно,  $k^2=N/EI$  и  $k = \sqrt{N/EI}$  с использованием в параметре  $k$  модуля упругости  $E$ .

В отличие от теории краевых напряжений, в которой изгибные перемещения по формуле (2) записаны без учета продольного усилия, в точном методе оно учитывается. При этом продольным обжатием стержня пренебрегли; материал считается линейно упругим, т.е.  $\sigma=E\varepsilon$ ; сохраняется гипотеза плоских сечений; плоская форма изгиба считается обеспеченной.

В решениях уравнения (8) для  $y$  и  $M$  в форме метода начальных параметров (эти решения приведены в [9]) содержится параметр  $l \cdot \sqrt{N/EI}$ , связывающий продольное сжимающее усилие с изгибной жесткостью стержня. В этом принципиальное отличие точного метода от приближенного нормативного. Главное, в контексте статьи, в обоих методах расчета сжато-изогнутых элементов на прочность по деформированной схеме используется их жесткость  $EI$ . Нет места изменению модуля упругости древесины на  $E'$ .

### Заключение

В пособии [5] в примере на стр. 44, в расчете изгибающего момента в деформированной схеме сжато-изогнутого элемента используется жесткость  $EI$ ; Модуль упругости  $E'$  не упоминается. Вопрос о практическом смысле этого модуля упругости остался открытым.

В статье рассмотрены отдельные факты, которые в отрыве друг от друга могут быть оценены как признаки позитивизма в научном познании, результатом которого есть расчет конструкций. Но как раз метод расчета конструкций с соблюдением в древесине закона упругости объединяет эти

факты и позволяет сделать заключение: появление в древесине модуля упругости  $E'=300R_c$  является противоестественным.

## **Література**

- [1] Клименко В. З. Феноменологический подход к расчету сжато-изогнутых деревянных элементов / В. З. Клименко // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – №1. – С. 7–11.
- [2] Клименко В. З. Развитие метода расчета сжато-изогнутых элементов в историческом аспекте / В. З. Клименко // 36. наук. праць УкрНДІ-проектстальконструкція ім. В.М. Шимановського.– К.: Сталь, 2010 – Вип. 5. – С. 130–139.
- [3] Клименко В. З. Устранение методологического диссонанса в расчете деревянных элементов, работающих на изгиб со сжатием / В. З. Клименко // Промислове будівництво та інженерні споруди. – 2010. – №2. – С. 41–44.
- [4] Клименко В. З. Философская и методологическая основы расчета сжато-изгибаемых элементов деревянных конструкций / Современные металлические и деревянные конструкции : сб. науч. тр. междунар. симпоз. – Брест, 2009. – С. 119–122.
- [5] Пособие по проектированию деревянных конструкций : пособие к СНиП II-25-80. – М. : Стройиздат, 1986. – 216 с.
- [6] Пятикristовский К. П. Обоснование зависимостей между интенсивностями напряжений и деформаций для нелинейного расчета деревянных конструкций / К. П. Пятикristовский, К. С. Хунагов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – №1. – С. 62–69.
- [7] Курс деревянных конструкций : Ч. 1 / [Карлсен Г. Г. и др]. – М. ; Л. : СИ, 1942. – 634 с.
- [8] Завриев К. С. Расчет стержней на одновременное действие изгиба и осевого сжатия / К. С. Завриев. – Тифлис : Гос. изд-во Грузии, 1932. – 215 с.
- [9] Справочник проектировщика. Расчетно-теоретический. Ч. II / [Под редакцией А. А. Уманского]. – М., Стройиздат, 1973. — 415 с.

*Надійшла до редколегії 22.07.2011 р.*