

УДК 539.3

## Влияние формы окончаний цилиндрической оболочки на развитие нелинейно-упругих и упругопластических деформаций

<sup>1</sup>Цыхановский В. К., д.т.н., <sup>2</sup>Талах С. М., к.т.н., <sup>1</sup>Кордун А. И.

<sup>1</sup>ООО «Укринсталькон им. В.Н. Шимановского», Украина

<sup>2</sup>Национальный авиационный университет, Украина

**Аннотация.** Рассмотрен подход исследования деформированного состояния твердого тела в нелинейной постановке задачи. Сформулирован вариационный принцип с учетом геометрической и физической нелинейности. Приведены условия, при которых теория пластического течения согласуется с теорией в приращениях, в частности, с текущей лагранжевой формулировкой. На основе приведенной методологии проведено исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки с разными типами окончаний.

**Анотація.** Розглянуто підхід дослідження деформованого стану твердого тіла в нелінійній постановці задачі. Сформульовано варіаційний принцип із урахуванням геометричної і фізичної нелінійності. Наведено умови, за яких теорія пластичної течії відповідає теорії у приростах, зокрема, з поточним лагранжевим формулюванням. На сонові наведеної методології проведено дослідження напружено-деформованого стану циліндричної оболонки з різними типами закінчень.

**Abstract.** The research approach of distorted condition of solid body in non-linear problem formulation is considered. The variation principle subject to geometrical and physical non-linearity is stated. The conditions, under which the plastic flow theory agrees with the theory of increments (particularly with current Lagrangian formulation), are given. On the basis of given methodology the research of deflected mode of cylindrical shell with different ending types is carried out.

**Ключевые слова.** Нелинейное деформирование, вариационные методы, теория пластического течения, тонкие оболочки.

Комбинированные оболочечные системы, основным элементом которых являются гибкие оболочки, широко распространены в современной промышленности. К классу таких пространственных тонкостенных конструкций относятся тонкостенные резервуары большой вместимости, газгольдеры, зернохранилища, большепролетные купольные и висячие покрытия зданий и сооружений, а также специальные оболочечные приспособления – сифоны, компенсаторы, тонкостенные и криволинейные трубы.

При проектировании тонкостенных конструкций используются результаты теоретических и численных исследований на основе теории

упругости и пластичности, в общем случае – нелинейной. Большинство разработанных методик и программных комплексов позволяют определить лишь несущую способность конструкций, что не в полной мере удовлетворяет инженера-проектировщика, основная задача которого состоит в определении рациональной и оптимальной конструкции при заданных внешних воздействиях. Создание работоспособной общей теории рационального, в том числе оптимального, проектирования облегченных пространственных конструкций остается одной из актуальных задач строительной механики.

Для решения этой задачи необходимо создание эффективных специальных алгоритмов оптимального проектирования и прочностного расчета на основе эволюции математического программирования. Процесс оптимизации формы и структуры, начиная с геометрического моделирования и поиска рациональных форм и до определения начального спектра обобщенных параметров проектирования комбинированной механической системы сложной конфигурации, должен учитывать чувствительность отдельных конструктивных элементов.

Рассмотрим подход решения задачи о деформировании твердого тела с геометрическими и физическими нелинейностями в постановке задачи [1]. В данном случае для адекватного математического описания данной задачи целесообразно ввести теорию в приращениях с использованием метода текущей лагранжевой формулировки [3, 4]. Преимущества искомого метода текущей лагранжевой формулировки [2, 3, 4]:

- используется общая теория течения, при этом устанавливаются связи между приращениями (дифференциалами) напряжений и деформаций;
- переменные состояния (напряжения, деформации и перемещения) известны на протяжении всей истории деформирования вплоть до состояния в конечной равновесной конфигурации;
- в задачах геометрической и физической нелинейности (упругой) обеспечивается полнота дифференциальной функции напряжений и независимость уравнений состояния от пути интегрирования;
- в задачах упруго-пластической геометрической и физической нелинейности, связанной со сложным нагружением и вызываемыми им эффектами, применяется разложение результирующего тензора напряжений с удержанием части изотропного роста и поворотов;
- учет поворотов при разложении в ряд результирующих функций напряжений и функций приращений конечных деформаций учитывает изменения компонент девиаторных составляющих

тензоров напряжений и деформаций, определяющих сдвиговую часть тензоров.

Специальные алгоритмы на основе изложенной текущей лагранжевой формулировки разработаны и изложены в трудах В. К. Цыхановского [4].

Для получения разрешающих уравнений метода конечных элементов (МКЭ) необходимо сформулировать вариационный принцип с учетом геометрической и физической нелинейности в постановке задачи. Исходные вариационные уравнения движения представляются в форме уравнений в приращениях на основе текущей лагранжевой формулировки [2, 3, 4] с использованием принципа виртуальной работы в общих криволинейных координатах и соотношений нелинейной теории упругости и пластичности [2–5]:

$$\int_V (\hat{\sigma}' + \hat{C}_4^{(e,p)} \cdot \hat{\gamma}) \cdot \delta \hat{\gamma} dV + \int_V \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} dV - \int_V \vec{p} \cdot \delta \vec{u} dS = 0, \quad (1)$$

где

$\hat{\sigma}'$  – второй тензор начальных (накопленных) напряжений Пиола-Кирхгоффа;

$\hat{\gamma}$  – тензор приращений конечных деформаций Коши-Грина, обусловленный возмущением равновесной конфигурации  $C^t$  (в произвольный момент времени) и переходом ее в конфигурацию  $C^{t+\Delta t}$ ;

$\vec{u}$ ,  $\vec{u}$  – векторы приращений перемещений и ускорений;

$\vec{p}$  – обобщенный вектор удельных объемных сил, действующих на тело и отнесенных к конфигурации  $C^t$ ;

$\hat{C}_4^{(e,p)}$  – тензор упругостей 4-го ранга в запредельном граничном состоянии с учетом упругих (“e”) и пластических (“p”) деформаций.

При выводе соотношений МКЭ в данной работе используются уравнения в приращениях перемещений, деформаций и напряжений, а также тензорные ряды их функциональных выражений [4]. Это дает возможность учитывать эффекты, связанные с нелинейным деформированием и формоизменением тонкостенных пространственных оболочечных систем.

Теория пластического течения органически связана с теорией в приращениях [3]. Исходные положения этой теории состоят в следующем:

1) тело изотропно;

2) относительное изменение объема твердого тела пропорционально среднему давлению, описываемому шаровым тензором напряжений ( $\hat{\sigma}^c$ ):

$$\gamma = 3\kappa\sigma, \quad (2)$$

где  $\gamma, \sigma$  – шаровые инварианты тензоров деформаций и напряжений соответственно;

$\kappa$  – коэффициент пропорциональности;

3) полное приращение составляющих деформаций складывается из приращений составляющих упругой деформации ( $d\hat{\gamma}^{(e)}$ ) и пластической деформации  $d\hat{\gamma}^{(p)}$ :

$$d\hat{\gamma}_{ij} = d\hat{\gamma}_{ij}^{(e)} + d\hat{\gamma}_{ij}^{(p)}; \quad (3)$$

4) девиатор напряжений  $dev\hat{\sigma}$  и девиатор приращений пластических деформаций  $dev\hat{\gamma}$  подобны и коаксиальны (направления главных базисов совпадают):

$$dev\hat{\gamma} = \lambda dev\hat{\sigma}. \quad (4)$$

Следует отметить, что приращения составляющих упругой деформации связаны с приращениями составляющих напряжений на основе обобщенного закона Гука, и в этом плане теория пластического течения *перекликается* с теорией в приращениях для нелинейно-упругого материала. Положение (4) обобщает результаты многочисленных опытов по сложному нагружению, т. е. скорости пластической деформации, или дифференциалы (приращения) прямо пропорциональны сдвиговым напряжениям в данный момент времени (приращениям напряжений). Из (3) и (4) следует:

$$d\hat{\gamma}^{(p)} = \lambda(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^c). \quad (5)$$

В самом общем случае в пластической области деформирования твердого тела не существует однозначных зависимостей от деформаций. Деформации зависят не только от напряжений в конечном состоянии, но и от предыстории нагружения. В теории пластического течения связи напряжений с деформациями заменяются соотношениями на дифференциальном уровне или в приращениях. Это направление теории пластичности называется *теорией приращений деформаций* или *теорией пластического течения*.

В такой постановке теория пластического течения согласуется с теорией в приращениях, в частности, с текущей лагранжевой формулировкой, алгоритм которой изложен в [4].

Деформационная теория пластичности есть частный случай теории пластического течения и непригодна для решения задачи изучения всего процесса упругопластического поведения металлов [3, 4, 7–9]

Проведем анализ принципа виртуальной работы при использовании теории в приращениях [3] и интегрального закона состояния [4] без учета инерционных сил, с учетом последовательно предоставляемых напряжений, конечных деформаций, перемещений, объемных (массовых) и поверхностных внешних сил в состояниях, фиксируемых конфигурацией  $C^{(N)}$  и  $C^{(N+1)}$ . При этом учитываем, что внутренние и внешние усилия, действующие на  $S_1$ , и перемещения, заданные на  $S_2$ , отнесены к единичному объему или единичной площади. Для наглядности переменные параметры состояний в конфигурациях  $C^{(N)}$  и  $C^{(N+1)}$  представлены в таблице 1.

Таблица 1

**Переменные в текущей формулировке Лагранжа**

№ п/п	Название переменных в состояниях	Обозначения переменных
Конфигурации $C^{(N)}$		
1	Тензор напряжений (преднапряжений) Коши	$\tau'^{ij}$
2	Объемные (массовые) силы	$p^i$
3	Поверхностные внешние силы на $S_1$	$q^i$
Конфигурации $C^{(N+1)}$		
4	Модифицированный тензор напряжений Кирхгоффа	$\tau'^{ij} + \sigma^{ij}$
5	Приращения перемещений	$u_i$
6	Объемные (массовые) силы	$p^i + \Delta p^i$
7	Поверхностные внешние силы на $S_1$	$q^i + \Delta q^i$
8	Заданные приращения перемещений на $S_2$	$\bar{u}_i$

С учетом представления переменных в соответствии с табл. 1 принцип виртуальной работы в состоянии  $C^{(N+1)}$  можно записать в следующем виде:

$$\iiint_V [(\tau'^{ij} + \sigma^{ij}) \delta \gamma_{ij} - (p^i + \Delta p^i) \delta u_i] dV^{(N)} - \iint_{S_1} (q^i + \Delta q^i) \delta u_i dS^{(N)} = 0, \quad (6)$$

где

$$u_i = \bar{u}_i \text{ на } S_2; \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} (\nabla_i u_k \nabla_j u^k); \quad (7)$$

$\gamma_{ij}$  даются уравнениями в [4], а вариации берутся по отношению к  $u_i$ .

Для удобства записи обозначаем:

$$\frac{1}{2}(\nabla_i u_k \nabla_i u^k) \equiv \Delta \varepsilon_{ij}. \quad (8)$$

Пренебрегая членами высшего порядка малости по приращениям перемещений и их градиентов, после некоторых преобразований получаем:

$$\begin{aligned} & \iiint_V [\sigma^{ij} \delta \gamma_{ij} + \tau'^{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij} - \Delta p^i \delta u_i] dV^{(N)} - \iint_{S_1} \Delta q^i \delta u_i dS^{(N)} + \\ & + \iiint_V [\tau'^{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij} - p^i \delta u_i] dV^{(N)} - \iint_{S_1} q^i \delta u_i dS^{(N)} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Если состояние в  $C^{(N)}$  является равновесным, то в уравнении (9) подчеркнутые члены равны нулю. Однако в состоянии  $C^{(N)}$  деформируемое тело может и не находится в полном равновесии из-за того, что в теории в приращениях мы пренебрегаем членами высшего порядка малости и для деформаций различного рода, например, для поворотов это не всегда точно осуществляется, кроме того, при численной реализации существуют так называемые ошибки округления. Следовательно, в (9) эти члены необходимо оставить для коррекции равновесного состояния через вектор *невязки* [4], используя итерационные методы решения систем нелинейных разрешающих уравнений. Интеграл от  $\tau'^{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij}$  в (9) обуславливает деформирование так называемой геометрической матрицы жесткости теории в приращениях [4, 5].

Используя вариационное уравнение, приводя его к виду (1) и собирая члены, представляющие вклад каждого конечного элемента, получаем систему нелинейных уравнений всей дискретной модели конструкции. Решаем эти уравнения на основе специальных алгоритмов с помощью методов продолжения по параметру Ньютона-Канторовича при снижении вектора невязки в уравнениях равновесия узловых реакций до допустимых величин.

При решении системы нелинейных уравнений на каждом (N+1) шаге продолжения по параметру возмущения находим напряжения  $\tau'^{ij} + \sigma^{ij}$  и определяем начальные напряжения на шаге продолжения по параметру (N+2). Это преобразование осуществляется с помощью формул для напряжений Коши и Пиола-Кирхгоффа второго (симметричного) в различных базисах [8]:

$$(\tau^{*ks} + \sigma^{*ks}) = \sqrt{\frac{g}{G}} (\tau'^{ij} + \sigma^{ij}). \quad (10)$$

Таким образом, на каждом последующем шаге процесса реализации текущей лагранжевой формулировки мы определяем истинное напряженное состояние, которое можно расценивать как Эйлерово описание поведения сплошной среды.

Выше приведенная формулировка задачи нелинейного деформирования сплошной среды в приращениях полностью соответствует теории пластического течения, т. е. конечная пластическая деформация может быть определена путем интегрирования полученных соотношений вдоль заданного пути интегрирования по принятому параметру продолжения текущей лагранжевой формулировки.

Если считать состояние деформируемой среды в конфигурации  $C^{(N)}$  равновесным, можно описать вариационные принципы теории пластического течения для упрочняющегося материала в скоростях или в приращениях [3] с использованием (9). Следуя Хиллу Р. [7], можно установить связи приращения (дифференциалов) напряжений и деформаций с использованием ассоциированного закона пластического течения [4]:

$$d\hat{\varepsilon} = d\hat{\varepsilon}^{(e)} + d\hat{\varepsilon}^{(p)}; \quad d\hat{\varepsilon}^{(p)} = d\lambda \hat{f}_{,\hat{s}}; \quad (11)$$

или в приращениях [8]:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{(e)} + \hat{\varepsilon}^{(p)}; \quad \hat{\varepsilon}^{(p)} = d\lambda \hat{f}_{,\hat{s}}; \quad (12)$$

$$\hat{f}_{,\hat{s}} = \frac{\partial f(\hat{S}, \hat{\varepsilon}^{(p)}, \chi)}{\partial \hat{S}}; \quad (13)$$

$$f = \frac{3}{2} I_1(\hat{S}^2) - \sigma_{(s)}^2(\hat{\varepsilon}^{(p)}, \chi) = 0; \quad (14)$$

$$df = \hat{f}_{,\hat{S}} \cdot d\hat{S} + \hat{f}_{,\hat{\varepsilon}^{(p)}} \cdot d\hat{\varepsilon}^{(p)} + f_{,\chi} dx = 0 \quad (15)$$

Уравнения (14) и (15) – критерий текучести Мизеса и его дифференциал.

Значение функции упрочнения при биномиальном разложении в ряд функции  $\sigma_{(s)} = \sigma_{(s)}\chi$ :

$$\sigma_{(s)} = \dot{\sigma}_{(s)} + h'\chi; \quad h' = E_T / (1 - \frac{E_T}{E}) \quad (16)$$

$$\chi = \int_{\varepsilon_{(e)}^{(p)}} d\varepsilon_{(e)}^{(p)} \quad (17)$$

где  $\chi$  – параметр пластичности Одквиста, фиксирующий историю нагружения;

$d\varepsilon_{(e)}^{(p)} = \sqrt{\frac{2}{3}} d\hat{\varepsilon}^{(p)} \cdot d\hat{\varepsilon}^{(p)}$  – дифференциал эффективных пластических деформаций;

$d\hat{\varepsilon}^{(e)}, d\hat{\varepsilon}^{(p)}$  – приращения тензора деформаций Альманзи, соответственно упругой и пластической составляющей.

Определим приращения напряжений в любой точке при активном нагружении, исходя из соотношений (11):

$$\hat{\tau} = \hat{C}_4^{(e)} \cdot d\hat{\varepsilon}^{(e)}, \quad (18)$$

где  $\hat{C}_4^{(e)}$  – изотропный тензор упругостей четвертого ранга [8]

$$\hat{C}_4^{(e)} = \lambda \hat{E}\hat{E} + \mu \left( \hat{C}_{II} - \hat{C}_{III} \right) + \nu \left( \hat{C}_{III} - \hat{C}_{II} \right). \quad (19)$$

С учетом (11) можно записать:

$$d\hat{\tau} = \hat{C}_4^{(e)} \cdot \left( d\hat{\varepsilon} - d\hat{\varepsilon}^{(p)} \right), \quad (20)$$

или для приращений напряжений:

$$\hat{\tau} = \hat{C}_4^{(e)} \cdot \left( \hat{\varepsilon} - d\lambda \hat{f}, \hat{s} \right). \quad (21)$$

После некоторых преобразований на основе (14)÷(21) в соответствии с ассоциированным законом пластического течения определяем выражение для множителя пластичности  $d\lambda$  [4]:

$$d\lambda = \beta \hat{f}, \hat{s} \cdot \hat{C}_4^{(e)} \cdot d\hat{\varepsilon}, \quad (22)$$

где

$$\beta = \left( \hat{f}, \hat{s} \cdot \hat{C}_4^{(e)} \cdot \hat{f}, \hat{s} + h' \right)^{-1}. \quad (23)$$

Используя уравнение (21) и (22), получаем требуемые соотношения между приращениями напряжений и деформаций в запредельном состоянии:

$$d\hat{\tau} = \hat{C}_4^{(e,p)} \cdot d\hat{\varepsilon}; \quad \hat{C}_4^{(e,p)} = \hat{C}_4^{(e)} \cdot \beta \hat{n}\hat{n}; \quad (24)$$

$$\hat{n} = \hat{C}_4^{(e)} \cdot \hat{f}, \hat{s}; \quad (25)$$



$$d'f = \hat{f}, \hat{s} \cdot d\hat{\tau}, \quad (26)$$

$d'f$  – неполный дифференциал функции нагружения.

Теорию пластического течения еще называют теорией приращений деформаций [3, 6, 7, 9]. Допуская, что в заданный момент времени  $t$  (конфигурация  $C^t$ ) рассматриваемое тело находится в состоянии статического равновесия, при этом напряженное состояние  $\tau'^{ij}$  в конфигурации  $C^t$  и его предыстория предполагаются известными в каждой его точке, и с учетом выше приведенных соотношений можно записать принципы виртуальной и дополнительной работы в приращениях (исключая в (9) подчеркнутый член):

– виртуальная работа:

$$\iiint_V [\sigma'^{ij} \delta \gamma_{ij} + \tau'^{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij} - \Delta p^i \delta u_i] dV - \iint_{S_1} \Delta q^i \delta u_i dS = 0; \quad (27)$$

– дополнительная работа:

$$\iiint_V \gamma_{ij} \delta \sigma'^{ij} dV - \iint_{S_2} u_i \delta \sigma'^{ij} n_j dS = 0; \quad (28)$$

$$\Delta q_i = \sigma'^{ij} n_j \text{ на } S_1. \quad (29)$$

Поскольку напряжения  $\tau'^{ij}$  в заданный момент времени  $t$  (конфигурация  $C^t$ ) самоуравновешены, можно дополнительно сформулировать два вариационных принципа:

– виртуальная работа:

$$\iiint_V \sigma'^{ij} \delta \dot{\gamma}_{ij} dV - \iint_{S_1} \Delta q^i \delta \dot{u}_i dS = 0 \quad (30)$$

– дополнительная работа:

$$\iiint_V \dot{\gamma}_{ij} \delta \sigma'^{ij} dV - \iint_{S_2} \dot{u}_i \delta \sigma'^{ij} n_j dS = 0. \quad (31)$$

На основе выражений (27)–(31) и с учетом (11)–(26) можно представить уравнения состояния в приращениях для упруго-пластического материала в теории пластического течения. Для твердого тела с упрочнением имеем:

– линеаризованная однородная форма в приращениях напряжений

$$\sigma'^{ij} = C^{ijkl} \gamma_{kl} - \alpha * \beta n^{ij} n^{kl} \gamma_{kl}. \quad (32)$$

$$n^{ij} = C^{ijkl} \frac{\partial f(\hat{s}, \sigma_{(s)})}{\partial s^{kl}}; \quad s^{kl} \equiv dev \hat{\sigma}^{kl}, \quad (33)$$

где

$$\alpha^* = 1 \text{ если } f(s^{ij}) \geq \sigma_{(s)}^2 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial s^{kl}} \sigma^{kl} \geq 0; \quad (34)$$

$$\alpha^* = 0 \text{ если } f(s^{ij}) < \sigma_{(s)}^2 \text{ и если } f(s^{ij}) = \sigma_{(s)}^2 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial s^{kl}} \sigma^{kl} < 0; \quad (35)$$

– линеаризованная однородная форма в приращениях деформаций

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij} + \alpha^{**} \gamma_{ij}^{(p)}; \quad (36)$$

$$\text{или } \gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{(e)} + \alpha^{**} (h')^{-1} \hat{f}, \hat{s} d' f, \quad (37)$$

где

$$\alpha^{**} = 1 \text{ если } f(s^{ij}) \geq \sigma_{(s)}^2 \text{ и } d' f > 0; \quad (38)$$

$$\alpha^{**} = 0 \text{ если } f(s^{ij}) = \sigma_{(s)}^2 \text{ и } d' f = 0; \quad (39)$$

$$\alpha^{**} = 0 \text{ если } f(s^{ij}) < \sigma_{(s)}^2; \quad (40)$$

$$\alpha^{**} = 0 \text{ если } f(s^{ij}) = \sigma_{(s)}^2 \text{ и } d' f < 0. \quad (41)$$

Для упрочняющихся материалов поверхность пластичности (критерий пластичности) (14) может изменяться при изменении напряженного состояния, при этом поверхность пластичности называется поверхностью упрочнения, или поверхностью нагружения. Поверхность нагружения (14) в окрестности регулярной точки является гладкой [3]. Упругой области соответствует отрицательное значение функции нагружения. При разгрузке приращения пластических деформаций и параметра пластичности Одквиста (17) равны нулю, а неполный дифференциал функции нагружения (26) меньше нуля. В уравнениях состояния упруго-пластического деформирования упругой области, нейтрального состояния и разгрузки соответствуют ограничения (35), (39) ÷ (41).

При нейтральном нагружении напряженное состояние находится на пределе упругости, и изменение поверхности пластичности не происходит (40), а это означает, что в уравнениях состояния при вычислении

приращений напряжений и деформаций учитываются только упругие составляющие.

Если же приращения тензора напряжений  $\sigma^{ij}$  по (32) сопровождаются приращением пластических составляющих тензора деформаций  $\gamma^{ij}$  по (37), то процесс называется активным нагружением при удовлетворении условий (34) и (38):

$$d\hat{\gamma}^{(p)} \neq 0; d'f > 0; df = 0. \quad (42)$$

Для апробации разработанной методологии проведено исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки с эллипсоидальным (в частном случае имеет сфероидальное завершение), овальным и торопластинчатым завершением (рис. 1) при воздействии избыточного внутреннего давления.

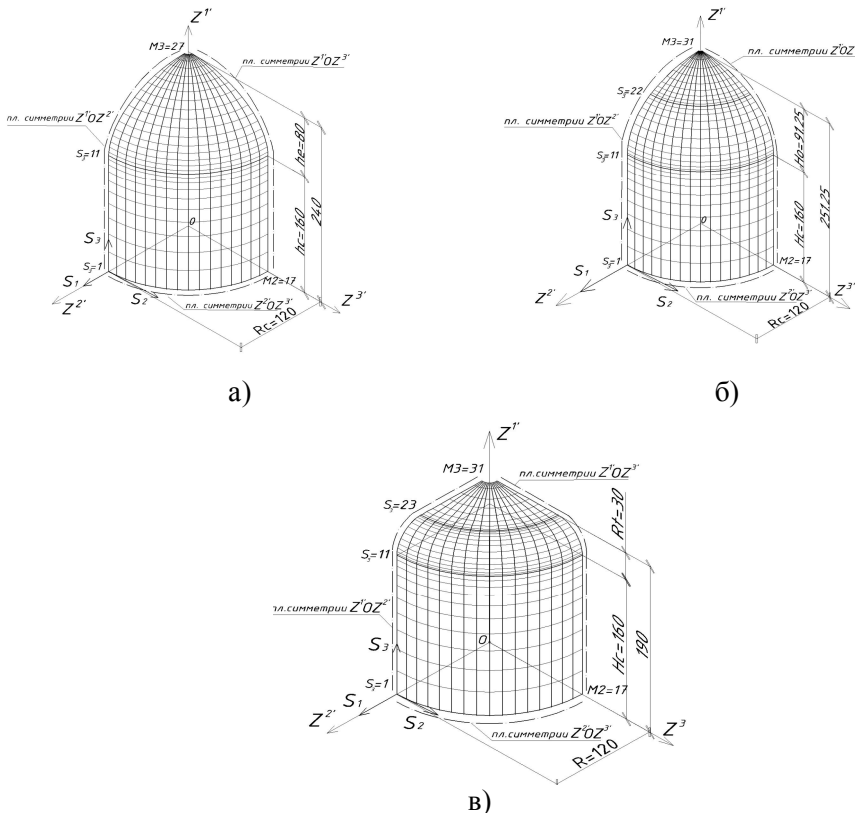


Рис. 1. Дискретные модели цилиндрических оболочек:  
а) с эллипсоидным окончанием (сфера); б) с овальным окончанием;  
в) с торопластинчатым окончанием

Расчет проведен при действии внутреннего избыточного давления  $p=21.6 \text{ кгс/см}^2$  (эксплуатационное давление) и  $p=40.0 \text{ кгс/см}^2$  (испытательное давление). Полученные численные результаты расчета сведены в таблицы 2 и 3.

Таблица 2

**Мембранные напряжения в исследуемых оболочках**

№ узла КЭ	Эллипсоидное окончание				Овальное окончание				Торовидное окончание	
	$p = 21,6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$		$p = 40,0 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$		$p = 21,6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$		$p = 40,0 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$		$p = 21,6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$	
	$\sigma_M^{22}$	$\sigma_M^{33}$	$\sigma_M^{22}$	$\sigma_M^{33}$	$\sigma_M^{22}$	$\sigma_M^{33}$	$\sigma_M^{22}$	$\sigma_M^{33}$	$\sigma_M^{22}$	$\sigma_M^{33}$
1	2202.3	815.9	4342.5	1896.2	2203.1	794.3	4335.4	1838.4	2161.5	828.6
35	2201.9	826.0	4318.3	1914.0	2202.8	804.3	4317.4	1858.8	2160.9	838.7
69	2202.1	843.7	4273.5	1939.5	2202.8	821.7	4280.8	1889.9	2161.4	856.5
103	2200.7	866.6	4222.6	1962.7	2201.6	844.2	4233.8	1920.0	2160.8	879.5
137	2193.8	892.6	4157.0	1977.8	2196.6	869.7	4180.4	1940.9	2147.7	905.8
171	2210.0	920.0	4113.3	1984.8	2206.5	896.6	4137.4	1951.3	2168.7	933.7
205	2256.6	947.1	4107.8	1986.1	2237.6	923.0	4126.3	1954.6	2271.9	961.4
239	2186.9	972.0	3924.8	1984.8	2195.2	947.3	3895.9	1956.2	2233.8	986.8
273	1840.9	993.0	3330.3	1987.8	1968.9	967.8	3463.9	1958.6	1693.5	1008.1
307	1306.8	1010.2	3343.5	1995.7	1621.1	983.5	3689.0	1961.1	701.1	1025.1
341	780.4	1025.3	3072.7	2006.2	1332.0	993.8	3127.9	1968.8	-63.4	1036.8
375	321.6	1037.8	1102.2	2009.8	1081.1	1002.5	3224.8	1973.4	-657.3	1045.8
409	44.2	1056.3	17.0	2029.7	825.3	1013.8	2263.4	1976.4	-1551	1060.9
443	0.5	1084.9	-173.5	2076.1	654.9	1029.0	1247.1	1988.1	-2799	1104.4
477	125.3	1123.7	140.1	2146.1	592.9	1049.5	944.1	2017.1	-3649	1183.5
511	322.9	1170.4	595.2	2231.2	578.4	1076.2	1000.6	2062.6	-5417	1374.2
545	532.2	1222.1	1024.6	2325.4	540.5	1110.3	1023.6	2122.2	-6969	1728.9
579	734.0	1276.6	1411.3	2425.0	478.8	1154.7	943.4	2201.1	-5603	2142.7
613	925.2	1331.2	1772.6	2525.5	458.4	1207.1	917.4	2295.5	-3899	2467.1
647	1101.6	1383.1	2107.2	2621.6	529.7	1258.3	1055.7	2388.4	-3302	2699.2
681	1256.6	1429.7	2401.2	2708.4	674.3	1298.6	1322.0	2461.9	-2714	2865.6
715	1382.9	1469.4	2640.7	2782.5	824.0	1324.1	1593.5	2508.8	-2253	2974.5
749	1470.7	1501.8	2808.4	2843.2	987.9	1345.5	1889.3	2548.4	-1761	3096.9
783	1502.4	1530.0	2872.4	2895.5	1196.7	1368.8	2266.0	2592.4	-1005	3312.2
817	1460.5	1566.2	2791.1	2961.9	1389.8	1385.8	2617.5	2626.0	-324.9	3641.0
851	1659.0	1128.1	3157.9	2124.8	1500.1	1390.8	2827.2	2639.1	865.4	4058.5
885	-	-	-	-	1511.2	1385.8	2865.6	2634.1	2663.9	4477.5
919	-	-	-	-	1433.7	1380.4	2744.9	2626.2	3773.4	4827.9
953	-	-	-	-	1317.8	1401.5	2536.7	2660.6	4579.9	4932.8
987	-	-	-	-	1701.1	1037.9	3229.2	1950.4	5463.4	3055.0

По этим численным результатам построены эпюры кольцевых и меридиональных напряжений с определением мембранной и изгибной составляющих тензора напряжений, которые представлены на рис. 2÷6.

Таблиця 3

**Изгибные напряжения в исследуемых оболочках**

№ узла КЭ	Эллипсоидное окончание				Овальное окончание				Торовидное окончание	
	$p = 21,6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$		$p = 40,0 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$		$p = 21,6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$		$p = 40,0 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$		$p = 21,6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$	
	$\sigma_N^{22}$	$\sigma_N^{33}$	$\sigma_N^{22}$	$\sigma_N^{33}$	$\sigma_N^{22}$	$\sigma_N^{33}$	$\sigma_N^{22}$	$\sigma_N^{33}$	$\sigma_N^{22}$	$\sigma_N^{33}$
1	-75.4	-39.6	-105.0	-233.5	-79.6	-41.1	-110.0	-227.2	-70.3	-37.0
35	-73.4	-38.8	-94.3	-99.8	-77.6	-40.3	-100.9	-119.2	-68.3	-35.9
69	-70.2	-39.1	-78.4	131.4	-74.4	-40.2	23.6	79.0	-65.6	-37.5
103	-63.9	-33.3	-60.1	391.6	-68.5	-36.0	-67.1	330.6	-58.6	-29.4
137	-58.6	-35.4	-47.7	623.7	-63.0	-36.5	-52.6	549.8	-52.3	-27.4
171	-61.9	-69.9	-50.0	767.4	-62.9	-59.1	-49.2	703.5	-66.4	-98.1
205	-33.5	-3.2	-6.3	858.7	-42.3	-16.8	-17.0	846.7	-40.0	-39.5
239	69.4	313.2	135.5	831.5	28.4	192.8	73.9	890.6	138.7	529.1
273	154.4	578.0	271.5	89.6	90.5	378.9	160.5	287.3	366.8	1279.1
307	62.1	297.2	-132.7	-1613	42.2	218.8	-124.0	-1080	364.2	1296.1
341	-133.7	-333.2	-1007	-3173	-70.2	-119.6	-350.5	-2305	222.3	873.1
375	-218.4	-633.5	-963.2	-3036	-132.8	-340.7	-759.3	-2900	141.2	618.0
409	-162.2	-477.1	-566.8	-1782	-131.2	-351.6	-807.7	-2561	140.0	645.0
443	-71.3	-206.9	-186.7	-589.8	-75.6	-186.5	-415.5	-1285	175.3	845.6
477	-11.3	-31.2	1.1	-6.5	-22.0	-24.3	-89.4	-235.0	54.3	764.9
511	10.7	27.0	41.9	115.3	0.1	40.4	22.8	130.3	-481.7	-524.9
545	14.4	28.5	32.6	77.0	-0.1	38.3	14.0	115.7	-1681	-3558
579	16.3	23.8	28.1	48.8	-19.7	-31.6	-37.9	-54.7	-3756	-7865
613	20.4	26.6	34.6	54.0	-56.6	-181.5	-104.9	-322.7	-4729	-10929
647	24.9	32.3	43.1	68.1	-81.1	-318.5	-144.9	-552.4	-4125	-11488
681	28.5	37.4	49.2	78.4	-58.8	-306.4	-105.3	-528.8	-2892	-10103
715	31.5	44.2	53.6	89.2	3.5	-135.9	4.4	-226.9	-1661	-8007
749	32.8	54.4	55.6	106.0	86.9	124.2	152.3	234.4	-126.2	-5078
783	25.5	47.4	43.8	99.7	138.2	320.2	240.4	573.6	2014.9	-989
817	11.6	-39.6	15.7	-49.6	114.0	302.8	195.9	535.1	3641.0	2626.0
851	281.9	-203.1	472.7	-351.6	50.4	161.0	86.1	290.7	3854.9	3998.1
885	-	-	-	-	2.9	53.9	4.9	109.9	3714.2	4041.7
919	-	-	-	-	-20.7	12.0	-36.8	42.8	3227.7	3272.5
953	-	-	-	-	-46.5	-113.4	-88.9	-175.6	2996.6	2700.3
987	-	-	-	-	256.4	-368.7	410.9	-636.8	2616.5	2042.3

Для оболочек с эллипсоидальным и овальным окончанием, на участке стыка цилиндрической оболочки и ее окончания, в меридиональном сечении на эпюре кольцевых мембранных составляющих напряжений наблюдается спад ординаты до нулевого и даже отрицательного значения. При давлении  $p=21.6 \text{ кгс/см}^2$  оболочка находится в упругом состоянии. При увеличении избыточного внутреннего давления до  $p=40.0 \text{ кгс/см}^2$  вся цилиндрическая часть оболочки переходит в запредельное состояние, т. е. максимальные напряжения достигают первичной площадки текучести, а затем переходят на верхний участок кривой и равняются значениям напряжений, соответствующим упрочнению стали до  $4300 \text{ кгс/см}^2$ .

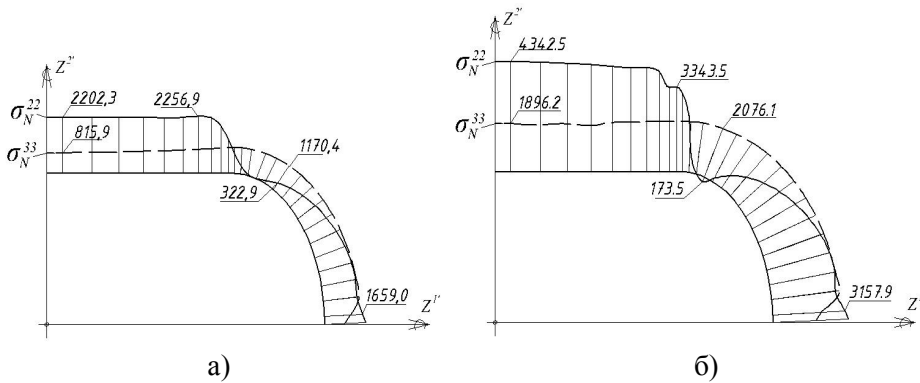


Рис. 2. Эпюры кольцевых и меридиональных ( $\sigma_{(M)}^{22}, \sigma_{(M)}^{33}$ ) мембранных напряжений для цилиндра-эллипсоида при воздействии избыточного внутреннего давления: а)  $p=21.6 \text{ кг/см}^2$ ; б)  $p=40 \text{ кг/см}^2$

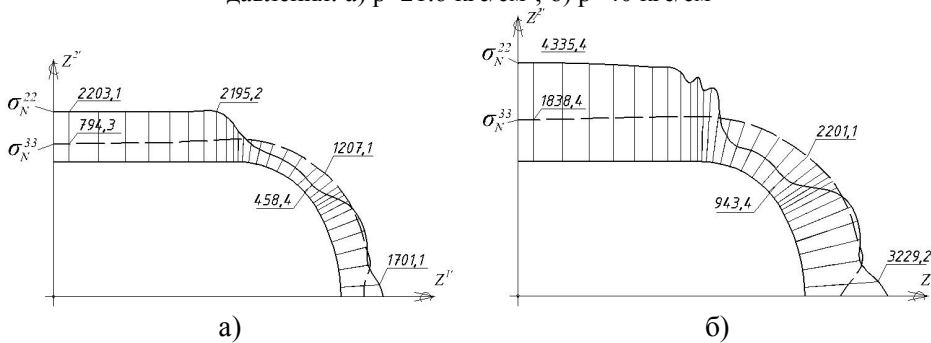


Рис. 3. Эпюры кольцевых и меридиональных ( $\sigma_{(M)}^{22}, \sigma_{(M)}^{33}$ ) мембранных напряжений для цилиндра-овала при воздействии избыточного внутреннего давления: а)  $p=21.6 \text{ кг/см}^2$ ; б)  $p=40 \text{ кг/см}^2$

Наиболее существенные напряжения возникают в торопластинчатом окончании цилиндрической оболочки (рис. 4). На всем участке торовой оболочки эпюра резко переходит в отрицательное значение с тройным амплитудным изменением, т.е. на этом участке наблюдается пластический шарнир.

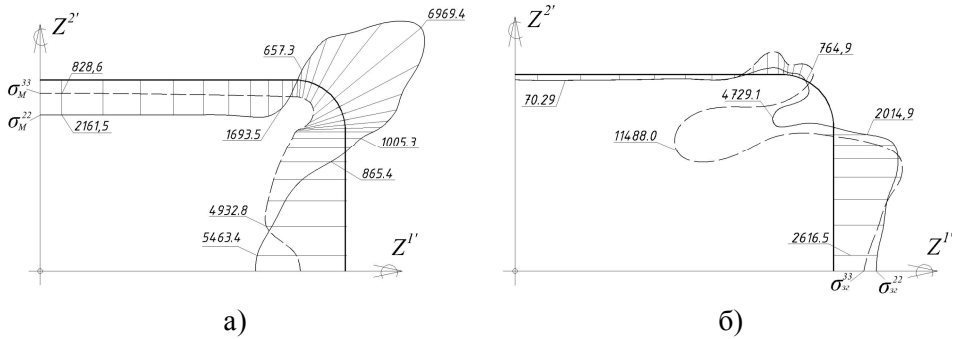


Рис. 4. Эпюры кольцевых и меридиональных напряжений для цилиндроторопластинчатой оболочки при воздействии избыточного внутреннего давления  $p=21.6 \text{ кгс/см}^2$ :

а) мембранные напряжения  $\sigma_{(M)}^{22}, \sigma_{(M)}^{33}$ ; б) изгибные напряжения  $\sigma_{(N)}^{22}, \sigma_{(N)}^{33}$

Эпюры изгибных напряжений имеют характер резко измененной синусоидальной кривой в месте перехода от цилиндра в сферу с резким возрастанием амплитуды напряжений (почти на порядок). В овальном окончании наблюдается тройная синусоида на всем овале, по амплитуде значений напряжений в 2 раза меньше, чем в сфере (при  $p=21,6 \text{ кгс/см}^2$  достигает  $351,6 \text{ кгс/см}^2$ , а при  $p=40 \text{ кгс/см}^2$  –  $2900,8 \text{ кгс/см}^2$ ), но в пределах допустимых максимальных значений напряжений для соответствующей категории прочности. Для цилиндра с плоским дном и торовым закруглением наблюдаются высокие значения локальных изгибных напряжений до  $11488,0 \text{ кгс/см}^2$ , при этом возможно образование локальных пластических шарниров на участке торового закругления.

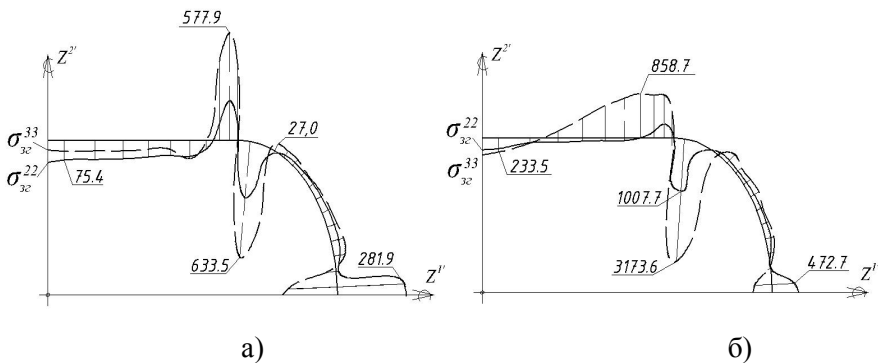


Рис. 5. Эпюры кольцевых и меридиональных ( $\sigma_{(N)}^{22}, \sigma_{(N)}^{33}$ ) изгибных напряжений для цилиндро-эллипсоида при воздействии избыточного внутреннего давления: а)  $p=21.6 \text{ кгс/см}^2$ ; б)  $p=40 \text{ кгс/см}^2$

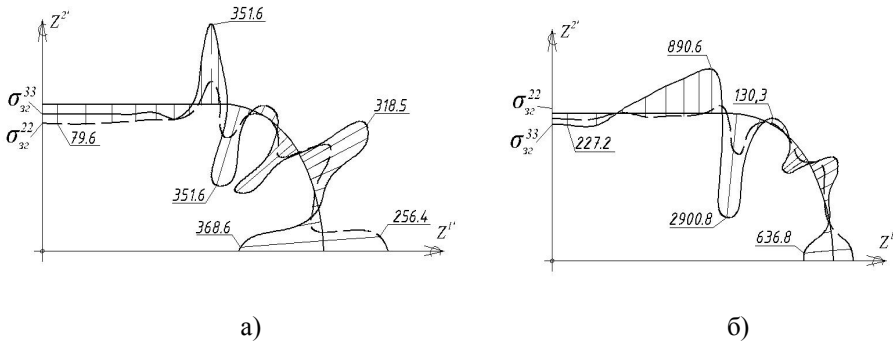


Рис. 6. Эпюры кольцевых и меридиональных ( $\sigma_{(N)}^{22}, \sigma_{(N)}^{33}$ ) изгибных напряжений для цилиндра-овала при воздействии избыточного внутреннего давления:  
а)  $p=21.6$  кгс/см<sup>2</sup>; б)  $p=40$  кгс/см<sup>2</sup>

Полученные механические эффекты на примерах деформирования гибких оболочек сплошной конфигурации иллюстрируют возможности численной реализации специального алгоритма исследования НДС сильнонелинейных систем и свидетельствуют об эффективности разработанной численно-аналитической методологии.

## Литература

- [1] Хог Э. Прикладное оптимальное проектирование. Механические системы и конструкции / Э Хог, Я. Арора. – М. : Мир, 1983. – 478 с.
- [2] Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Джон Оден. – М. : Мир, 1976. – 464 с.
- [3] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М. : Мир, 1967. – 452 с.
- [4] Баженов В. А. Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок / В. А. Баженов, В. К. Цыхановський, В. М. Кислюкий. – К. : КНУБА, 2000. – 386 с.
- [5] В. К. Цыхановский. Расчет тонких плит на упругом основании методом конечных элементов / В. К. Цыхановский, С. М. Козловец, А. С. Коряк – К. : Изд-во «Сталь», 2008. – 234 с.
- [6] Цыхановский В. К. Несущая способность комбинированных оболочечных конструкций с учетом развития пластических деформаций / В. К. Цыхановский, С. М. Козловец, Н. А. Костыра // Промислове будівництво та інженерні споруди. – 2008. – № 3. – С. 17–21.
- [7] Хилл Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИПЛ, 1956. – 402 с.



- [8]** Лурье А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
- [9]** Прагер В. Теория идеально-пластических тел / В. Прагер, Ф. Ходж. – М. : ИЛ, 1956. - 398 с.

*Надійшла до редколегії 05.08.2011 р.*