

УДК 539.3

## Влияние кривизны вертикальной стенки цилиндрического резервуара на напряженно-деформированное состояние ограждающей конструкции

<sup>1</sup>Цыхановский В.К., д.т.н., <sup>2</sup>Талах С.М., к.т.н., <sup>1</sup>Кордун А.И.

<sup>1</sup>ООО «Укринсталькон им. В.Н. Шимановского», Украина

<sup>2</sup>Национальный авиационный университет, Украина

**Аннотация.** Рассматривается новая усовершенствованная конструктивная схема вертикального цилиндрического резервуара большой вместимости – 300 тыс. м<sup>3</sup> в объеме при эксплуатации. Предложен способ усовершенствования конструкции за счет введения кривизны вертикальной стенки резервуара. Изложен специальный алгоритм прочностного расчета сильнонелинейной механической системы.

**Анотація.** Розглядається нова вдосконалена конструктивна схема вертикального циліндричного резервуара великої місткості – 300 тис. м<sup>3</sup> в об'ємі при експлуатації. Запропонований спосіб вдосконалення конструкції за рахунок введення кривизни вертикальної стінки резервуара. Викладений спеціальний алгоритм розрахунку міцності сильнонелінійної механічної системи.

**Abstract.** Considered new improved structural scheme of a vertical cylindrical tank of large capacity – 300 thousand m<sup>3</sup> in volume during the operation. Proposed a method of design improving by introducing a curvature of the vertical wall of the tank. Contained a special algorithm for strength calculation of strongly nonlinear mechanical system.

**Ключевые слова:** цилиндрический резервуар, нелинейное деформирование, специальный алгоритм, вариационные методы, упруго-пластические деформации, теория пластического течения.

**Введение.** Для цилиндрических резервуаров повышенной вместимости при больших диаметрах и значительной высоте вертикальной стенки, когда элементы конструкции подвергаются значительному гидростатическому давлению и продольному изгибу от вертикальных реакций покрытия, в местах локальных изменений кривизны оболочки возникают большие концентрации напряжений. В таких условиях локальное сглаживание скачкообразных переходов кривизны оболочечных элементов может дать значительное уменьшение локальных изгибных напряжений [6]. Эта проблема связана с определением оптимальной начальной формы и структуры комбинированной оболочечной конструкции, которая достаточно успешно была определена для рассмотренной конструкции в [1], при этом объемы резервуаров были в пределах 100–250 тыс. м<sup>3</sup>. Для обеспечения максимально большей вместимости резервуара, до 300 тыс. м<sup>3</sup>, необходимо рассмотреть дополнительные меры по улучшению формы и структуры рассматриваемой конструкции резервуара, а также определить специальный алгоритм прочностного расчета.

**Постановка задачі.** Дискретная конечноэлементная модель конструкции резервуара в произвольный момент времени  $t$  в приращениях построена на основе первого выражения принципа виртуальной работы [1,3]

$$\int_V (\hat{\sigma}' + \hat{C}_4^{(e,p)} \cdot \hat{\gamma}) \cdot \delta \hat{\gamma} dV + \int_V \rho \ddot{u} \cdot \delta \ddot{u} dV - \int_V \bar{p} \cdot \delta \ddot{u} dV - \int_S \bar{q} \cdot \delta \ddot{u} dS = 0, \quad (1)$$

где  $\hat{C}_4^{(e,p)}$  – тензор упругостей в запредельном состоянии с учетом развития упруго-пластических деформаций.

Для вариационной задачи (1) параметром возмущения может служить параметр времени  $t$ . Будем считать, что решение задачи зависит только от некоторого безразмерного параметра  $t$ , причем при некотором конкретном значении параметра, например при  $t = 1$ , получено отображение  $F(u^*)$ , а при  $t = 0$  – отображение  $F(u^\circ)$ , которое имеет известное решение вектора перемещений  $\{u^\circ\}$ , то есть вместо одного отображения  $F(u^\circ)$  вводится семейство отображений  $h$ .

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$h(u, t) = 0; \quad t \in [0, 1], \quad (2)$$

полученное в результате дискретизации вариационного уравнения (1). Допустим, что оно имеет решение  $u = u(t)$ , непрерывно зависящее от  $t$ . В таком случае, в результате решения (2) получим непрерывную кривую решений с началом в точке  $\{u^\circ\}$  и концом в  $\{u^*\} = \{u(t=1)\}$ . Таким образом, получим непрерывное отображение

$$h(u(t), t) = 0, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (3)$$

В решении (3) предлагается:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1. \quad (4)$$

Окончательно имеем:

$$h(u, t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Для конечномерного ( $N$ -мерного) подпространства (в евклидовом пространстве  $\varepsilon^3$ )  $\Phi$ , порождаемого базисными функциями компонентных аппроксимаций  $\Phi_g(P)$ , метод Ньютона можно представить отображением:

$$F : M \subset \Phi^N \rightarrow \Phi^N,$$

что соответствует

$$F(u) \in \Phi^N \Rightarrow F(u) = \begin{Bmatrix} f_1(u) \\ \vdots \\ f_n(u) \end{Bmatrix}; \quad (6)$$

$$u^{k+1} = u^k - F'(u^k)^{-1} F(u^k), \quad (7)$$

где  $F'(u)$  – матрица Якоби отображения  $F$ ;  $F(u)$  – система нелинейных уравнений в неявном виде  $F(u) = 0$ .

При нахождении решения  $i$ -го уравнения задачи (5) берется конечное число итераций  $m$  процесса (7) в соответствии с рекуррентной формулой

$$\begin{aligned} u^{i,k+1} &= u^{i,k} - h'(u^{i,k}, t_i)^{-1} h(u^{i,k}, t_i), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ u^{1,0} &= u^0; \quad u^{i+1,0} = u^{i,m}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $h'(u^{i,k}, t_i)^{-1}$  матрица Якоби отображения  $h$ .

Матрицу Якоби система большого порядка при численной реализации, как правило, не вычисляют, а вместо этого предлагается решать систему линейных (линеаризованных) уравнений. При этом рекурсивную формулу (8) для метода Ньютона можно записать в виде:

$$h'(u^{i,k}, t_i) u^{i,k+1} = h'(u^{i,k}, t_i) u^{i,k} - h(u^{i,k}, t_i). \quad (9)$$

Для ограничения числа итераций  $k$  на  $i$ -м шаге продолжения по параметру возмущения  $t$  вводится норма для оценки погрешности на  $k$ -й итерации по Ньютону – скалярное произведение «вектора невязки» – правой части уравнения (9):

$$(\bar{r}^{i,k}, \bar{r}^{i,k}) \leq \varepsilon, \quad (10)$$

где

$$\{\bar{r}^{i,k}\} = \{h'(u^{i,k}, t_i) u^{i,k} - h(u^{i,k}, t_i)\}, \quad (11)$$

$\varepsilon$  – заданная величина малости нормы вектора невязки системы нелинейных уравнений.

Существенное сокращение числа итераций вычислительного процесса (9) по Ньютону достигается с использованием теоремы Канторовича о модификации метода Ньютона [3]. Согласно теореме, в вычислительном процессе (9) вместо матрицы Якоби используется матрица отображения  $h(u, t)$  на начальной итерации каждого  $i$ -го шага продолжения по параметру возмущения  $t$ , а именно:

$$h'(u^{i,0}, t_i)u^{i,k+1} - h(u^{i,k}, t_i) = r^{i,k}. \quad (12)$$

где матрица  $h'(u^{i,0}, t_i)$  остается постоянной для всех итераций по Ньютону  $i$ -го шага продолжения по параметру  $t$ . Итерационный процесс (12) носит название метода Ньютона-Канторовича [1, 2, 3].

**Основная часть.** Рассматриваемая конструкция вертикального цилиндрического резервуара имеет сложную форму и конфигурацию, описанную в [1]. Описание геометрии ограничивающих поверхностей оболочки осуществляется на основании аналитических методов с использованием набора канонических уравнений сферы, торовой поверхности и плиты, представленных в глобальной системе координат. В [1] для описания общей геометрической модели конструкции предлагается пять отдельных канонических поверхностей: сферическая линза – фрагмент F1 (покрытие); верхний четверть тор – фрагмент F2 (трубобетонный контур); цилиндрическая поверхность – фрагмент F3; нижний четверть тор-фрагмент F4 (элемент тонкой оболочки); круглая плита – фрагмент F5 (днище резервуара). В рассматриваемом варианте резервуара объемом 300 тис. м<sup>3</sup> геометрическая модель отличается только фрагментом F3 – вместо цилиндра моделируется фрагмент тора, опирающегося на дугу с углом  $2\alpha$  и радиусом кривизны

$$R_{0,3} = \frac{f^2 + \frac{1}{4}l'^2 + 2r_2f}{2f}; \quad l' = H - r_2 - r_4, \quad (13)$$

где  $f$  – стрела бокового прогиба в центре вертикальной стенки резервуара;  $r_2$  – радиус верхнего четвертьтора;  $l'$  – высота вертикальной стенки резервуара.

Половинный угол створа торовой дуги боковой стенки резервуара определяется по формуле

$$\alpha = \arctg \frac{l'}{2(R_{0,3} - f - r_2)}. \quad (14)$$

Сеточная область конечноэлементной модели рассматриваемого варианта конструкции резервуара имеет следующие размеры –  $M1 \times M2 \times M3$ ,  $M1 = 2$ ,  $M2 = 46$ ,  $M3 = 50$ . Число узлов  $KЭ$  модели составляет  $NUX = M1 \times M2 \times M3 = 2 \times 46 \times 50 = 4600$ , а число уравнений системы разрешающих уравнений составляет:  $K = 3 \times NUX = 3 \times 4600 = 13800$  без учета накладываемых связей с учетом граничных условий. Разрешающая система нелинейных уравнений большого порядка решается с помощью метода продолжения по параметру возмущения  $t$ , представлено форму-

лами (2)–(12). При численній реалізації рішення системи нелінійних рівнянь по параметру возмущення  $t = 150$  шагов, на кожному шаге  $t$  розраховується система нелінійних рівнянь відносно приращень переміщень по методу Ньютона-Канторовича або методу Ньютона (з урахуванням розвитку пластических деформацій).

Комбінації зовнішніх впливів прийняті за аналогії з [1]. Виконано порівняльний аналіз результатів численного розрахунку по переміщенням і внутрішнім зусиллям основних елементів каркаса, в яких спостерігається концентрація внутрішніх зусиль.

Результати рішення по переміщенням і внутрішнім зусиллям в основному радіальному перерізі в площині  $OZ^1\bar{Z}^2$  для трьох форм вертикальної стінки сведені в таблиці 1–3 по переміщенням і в таблицю 4 по згинаючим моментам і продольним силам. Порівняльний аналіз показав, що комбінована механічна система має суттєву гнучкість, про що свідчать епюри переміщень, наведені на рис. 1, а також вирішальне вплив продольного згину на елемент вертикальної стінки резервуара. Так максимальне вертикальне переміщення кільця покриття резервуара досягає  $u_1^1 = -107,89$  см, а максимальний боковий прогин в середньому перерізі по висоті стінки резервуара дорівнює  $u_{45}^{2'} = 14,075$  см (див. табл. 3). Внутрішні зусилля в ребра-стійках циліндричного резервуара при початковій формі, коли стріла бокового прогину дорівнює  $f = 10,0$  см (в межах переміщень від максимальних навантажень для вертикальної форми стінки резервуара) дорівнює величинам, які були отримані в [1]. При початковій криволінійній формі стінки резервуара під впливом максимальних критических навантажень внутрішні зусилля суттєво збільшуються пропорційно величині початкового провиса, так:

– при  $f = 1,0$  м згинаючі моменти і максимальні продольні сили дорівнюють  $M_{2265}^{22} = -477,35$  тсм,  $N_{2265}^{22} = -2168,34$  тс, внутрішні зусилля збільшуються порівняно з вертикальною стінкою ( $f = 0$ ) відповідно на 6,6 % і 6,7 %;

– при  $f = 2,0$  м згинаючі моменти і максимальні продольні сили дорівнюють  $M_{2265}^{22} = -527,82$  тсм,  $N_{2265}^{22} = -2396,58$  тс, внутрішні зусилля збільшуються порівняно з вертикальною стінкою ( $f = 0$ ) відповідно на 17,8 % і 17,9 %.

Таблиця 1

**Перемещения в диаметральной сечении резервуара при  $f = 0,1$  м  
(цилиндрическая форма)**

№ точки $S_2$	№ узла	$u'_N$ , см	$u''_N$ , см	№ точки $S_2$	№ узла	$u'_N$ , см	$u''_N$ , см
1	1	-101,432	1,115	17	33	-1,893	-1,034
2	3	-101,336	1,105	18	35	-1,503	-0,646
3	5	-101,480	1,115	19	37	-1,346	-0,113
4	7	-101,406	1,226	20	39	-1,252	3,477
5	9	-99,858	1,460	21	41	-1,133	6,941
6	11	-97,496	1,860	22	43	-0,980	9,797
7	13	-93,950	2,207	23	45	-0,784	11,438
8	15	-89,447	2,501	24	47	-0,617	11,544
9	17	-83,388	2,689	25	49	-0,461	10,573
10	19	-74,840	2,712	26	51	-0,330	8,771
11	21	-64,052	2,522	27	53	-0,230	6,549
12	23	-47,788	1,867	28	55	-0,244	4,674
13	25	-27,939	0,766	29	57	-0,153	4,204
14	27	-12,071	-0,415	30	59	0	3,912
15	29	-2,923	-1,148	31	61	0	3,830
16	31	-2,419	-1,180	32	63	0	3,840

Таблиця 2

**Перемещения в диаметральной сечении резервуара при  $f = 1,0$  м  
(тороидальная поверхность)**

№ точки $S_2$	№ узла	$u'_N$ , см	$u''_N$ , см	№ точки $S_2$	№ узла	$u'_N$ , см	$u''_N$ , см
1	1	-104,069	1,062	17	33	-4,343	-1,155
2	3	-103,973	1,052	18	35	-3,936	-0,817
3	5	-104,115	1,062	19	37	-3,710	-0,332
4	7	-104,035	1,172	20	39	-2,974	3,635
5	9	-102,474	1,405	21	41	-2,393	7,521
6	11	-100,107	1,802	22	43	-1,998	10,706
7	13	-96,566	2,147	23	45	-1,736	12,471
8	15	-92,077	2,440	24	47	-1,545	12,488
9	17	-86,034	2,624	25	49	-1,298	11,265
10	19	-77,513	2,647	26	51	-0,959	9,125
11	21	-66,739	2,456	27	53	-0,526	6,592
12	23	-50,500	1,800	28	55	-0,226	4,559
13	25	-30,646	0,697	29	57	-0,155	4,175
14	27	-14,718	-0,491	30	59	0	3,883
15	29	-5,403	-1,244	31	61	0	3,788
16	31	-4,854	-1,279	32	63	0	3,798

Таблиця 3

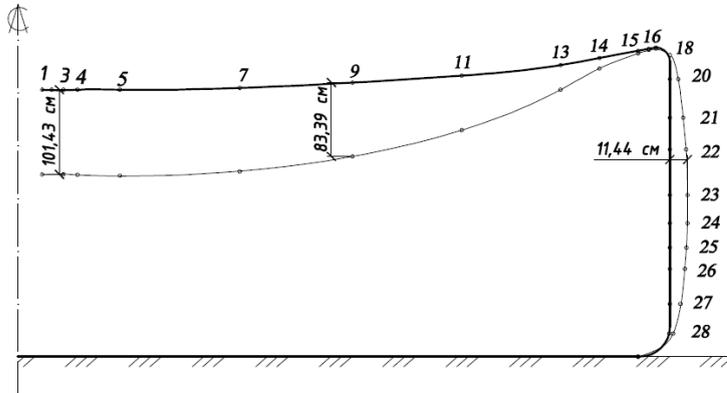
**Перемещения в диаметральном сечении резервуара при  $f = 2,0$  м  
(тороидальная поверхность)**

№ точки $S_2$	№ узла	$u'_N$ , см	$u''_N$ , см	№ точки $S_2$	№ узла	$u'_N$ , см	$u''_N$ , см
1	1	-107,886	0,975	17	33	-7,930	-1,333
2	3	-107,789	0,965	18	35	-7,509	-1,050
3	5	-107,928	0,975	19	37	-7,218	-0,624
4	7	-107,838	1,084	20	39	-5,573	3,809
5	9	-106,258	1,314	21	41	-4,322	8,303
6	11	-103,880	1,707	22	43	-3,572	12,039
7	13	-100,343	2,048	23	45	-3,210	14,075
8	15	-95,876	2,337	24	47	-2,968	13,981
9	17	-89,853	2,519	25	49	-2,556	12,349
10	19	-81,373	2,540	26	51	-1,870	9,658
11	21	-70,623	2,347	27	53	-0,920	6,645
12	23	-54,436	1,691	28	55	-0,197	4,388
13	25	-34,593	0,584	29	57	-0,160	4,096
14	27	-18,592	-0,613	30	59	0	3,801
15	29	-9,039	-1,394	31	61	0	3,690
16	31	-8,425	-1,435	32	63	0	3,970

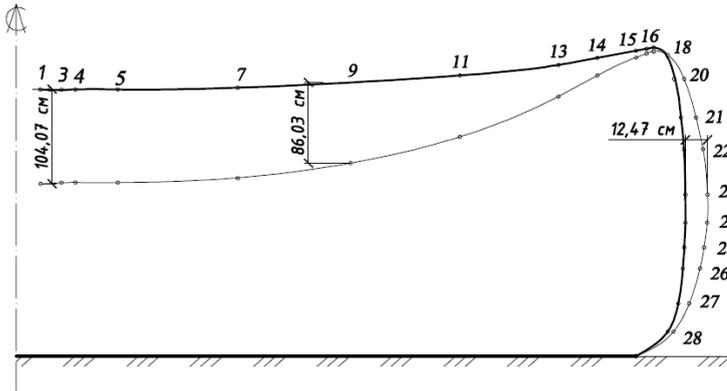
Таблиця 4

**Изгибающие моменты и продольные силы (максимальные) в ребрах-стойках  
резервуара в сечении пл.  $OZ^1Z^3$  при  $f = 1,0$  м (тороидальная поверхность)**

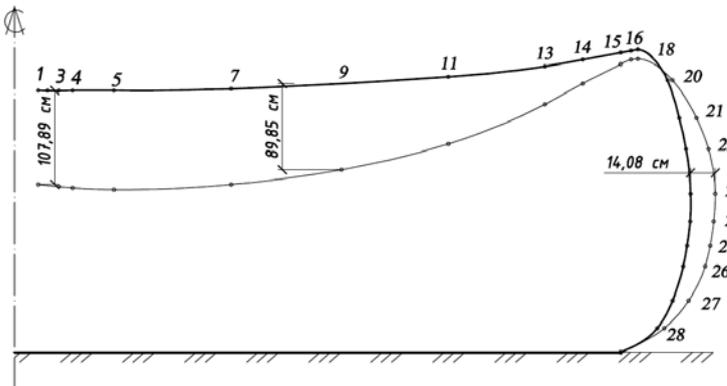
№ с.к. $Is 3$	№ с.к. $Is 2$	№ узла КЭ- мод.	Погонные усилия		Общие усилия в сечении	
			$M_N^{22}$ , кг·см/см	$N_N^{22}$ , кг/см	$M_N^{22} \cdot b_N$ , т·м	$N_N^{22}$ , т
25	19	2245	$-0,25851 \cdot 10^5$	-1522,6	-26,32	-155,0
	20	2247	$0,40282 \cdot 10^5$	-1134,0	41,01	-115,44
	21	2249	$1,218 \cdot 10^5$	-263,22	124,0	-26,80
	22	2251	$2,043 \cdot 10^5$	795,53	207,98	80,98
	23	2253	$2,3749 \cdot 10^5$	1304,6	241,76	132,81
	24	2255	$1,8181 \cdot 10^5$	1775,3	185,08	180,73
25	25	2257	$1,0533 \cdot 10^5$	-54,263	107,22	0,06
	26	2259	$-0,22859 \cdot 10^5$	-4501,8	-23,27	-458,28
	27	2261	$-2,421 \cdot 10^5$	-12608,0	-246,46	-1283,49
	28	2263	$-3,6574 \cdot 10^5$	-17754	-372,32	-1807,36
	29	2265	$-4,6891 \cdot 10^5$	-21300,0	-477,35	-2168,34
	30	2267	$-3,6591 \cdot 10^5$	-11808,0	-372,50	-1202,05
	31	2269	$-0,81175 \cdot 10^5$	-2395,0	-82,64	-243,87



a)



б)



в)

Рис. 1. Эпюры перемещений:  
1 – при стреле бокового провиса вертикальной стенки  $f = 0,1$  м;  
2 – при стреле  $f = 1,0$  м; 3 – при стреле  $f = 2,0$  м

По этим данным можно сделать вывод, что использование двояко криволинейной поверхности оболочечной системы по высоте цилиндра не дает механического эффекта в условиях значительных сжимающих усилий (реакций), которые передаются от внешнего контура покрытия на цилиндрическую стенку резервуара. Для нейтрализации влияния продольного изгиба от сжимающих нагрузок покрытия при использовании криволинейных вертикальных стенок необходимо одновременно вводить в каркас вертикальные колонны в окружном направлении по схеме, представленной на рис. 2.

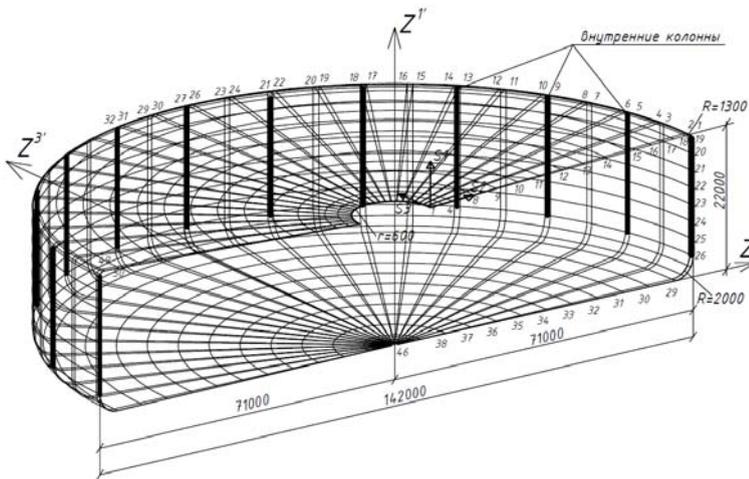


Рис. 2. Расчетная схема и дискретная модель конструкции резервуара

Численные исследования по напряженно-деформированному состоянию при введении внутренних колон (с учетом поперечных связей с соответствующими ребрами-стойками) показывают, что механический эффект от использования оболочки двоякой кривизны по сравнению с цилиндрическими поверхностями, когда мембранные напряжения уменьшаются в два раза [6], полностью подтверждается.

Результаты численных расчетов по перемещениям рассматриваемого резервуара с учетом устройства внутренних колон, на которые опирается внешний упруго-податливый контур покрытия, сведены в таблицу 5.

По таблице 5 можно сделать выводы, что максимальные перемещения в центре покрытия при стреле начального бокового провиса  $f=2,0$  уменьшились до  $u'_N = -101,46$  см, т.е. на 6,3 %, а в центре вертикальной стенки боковой прогиб уменьшился до  $u''_N = 4,643$  см (для сравнения см. рис. 3).

Таблиця 5

**Перемещения в радиальном сечении резервуара при  $f=1,0$  м и  $f=2,0$  м при  
устройстве внутренних колонн резервуара**

N точки с.к. S2	N узла	$f = 1,0$ м		$f = 2,0$ м	
		$u_N^1$ , см	$u_N^2$ , см	$u_N^1$ , см	$u_N^2$ , см
1	1	-100,352	1,553	-101,463	1,707
2	3	-100,255	1,5432	-101,366	1,698
3	5	-100,401	1,553	-101,508	1,707
4	7	-100,327	1,663	-101,437	1,817
5	9	-98,746	1,90	-99,841	2,050
6	11	-96,29	2,293	-97,357	2,445
7	13	-92,579	2,636	-93,600	2,785
8	15	-87,843	2,920	-88,810	3,066
9	17	-81,432	3,091	-82,300	3,232
10	19	-72,420	3,090	-73,186	3,220
11	21	-60,920	2,850	-61,470	2,970
12	23	-43,776	2,120	-44,130	2,219
13	25	-22,430	0,832	-22,198	0,934
14	27	-6,448	-0,323	-6,032	-0,305
15	29	0,055	-0,742	0,13	-0,691
16	31	0	-0,728	0	-0,672
17	33	-0,335	-0,77	-0,355	-0,716
18	35	-0,48	-0,867	-0,536	-0,819
19	37	-0,586	-1,025	-0,678	-0,983
20	39	-0,884	-1,192	-1,205	-1,718
21	41	-0,875	0,435	-1,155	-0,618
22	43	-0,758	3,080	-0,903	1,851
23	45	-0,659	5,688	-0,756	4,643
24	47	-0,606	7,100	-0,751	6,365
25	49	-0,544	7,597	-0,756	7,203
26	51	-0,426	7,198	-0,653	7,109
27	53	-0,236	6,171	-0,364	6,321
28	55	-0,094	5,150	-0,0765	5,450
29	57	-0,064	4,945	-0,0607	5,312
30	59	0	4,799	0	5,174
31	61	0	4,757	0	5,127
32	63	0	4,766	0	5,134

При наличии колонн наблюдается резкое уменьшение максимальных изгибных моментов и продольных сил в среднем в два раза.

## **Выводы**

1. Дополнительная оптимизация формы боковой вертикальной стенки резервуара при оптимальном боковом провисе  $f=2,0$  м и обособленном введении вертикальных колонн для опирания трубобетонного контура обеспечила резкое снижение концентрации напряжений в местах закруглений резервуара.
2. При использовании криволинейной по высоте вертикальной стенки цилиндрического резервуара обязательно включение в конструкцию внутренних опорных колонн с последующим расчетом на устойчивость при максимальных усилиях. Максимальные усилия определяются при численном расчете в наложенных вертикальных связях.

## **Литература**

- [1] Шимановский А.В. Оптимизация комбинированных пространственных систем / А. В. Шимановский, В. К. Цыхановский, С. М. Талах – К: Изд-во «Сталь», 2012. – 462 с.
- [2] Цыхановський В.К. Розрахунок на міцність великопрогонових залізобетонних оболонок із зовнішнім листовим армуванням методом скінченних елементів / В.К. Цыхановський, О.І. Кордун // Зб. наук. праць УкрНДІпроектстальконструкція ім. В. М. Шимановського. – К.: Сталь, 2010 – Вип. 5. – С. 262–269.
- [3] Баженов В.А. Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок / Баженов В.А., Цыхановський В.К., Кислоокий В.М. – К.: КНУБА, 2000. – 386 с.
- [4] Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений с многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболт. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
- [5] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости / Лурье А.И. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
- [6] Цыхановський В.К. Влияние формы окончаний цилиндрической оболочки на развитие нелинейно-упругих и упруго-пластических деформаций / В.К. Цыхановський, С.М. Талах, А.И. Кордун // Зб. наук. праць Укрінсталькон ім. В.М. Шимановського. – К.: Сталь, 2011 – Вип. 8. – С. 43–59.

*Надійшла до редколегії 06.08.2012 р.*