УДК 539.3

Рациональные параметры нити конечной жесткости, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой

Ленда А.В.

ООО «Укринсталькон им. В.Н. Шимановского», Украина

Аннотация. Проведено исследование гибкой нити и нити конечной жесткости при действии равномерно распределенной нагрузки. Установлены и приведены в виде семейства графиков рациональные относительные параметры нитей, которые отвечают их минимальному объему.

Анотація. Проведено дослідження гнучкої нитки та нитки скінченної жорсткості при дії рівномірно розподіленого навантаження. Встановлено і наведено у вигляді сімейства графіків раціональні відносні параметри ниток, що відповідають їх мінімальному об'єму.

Abstract. Research of flexible tendon and finite rigidity tendon under the action of uniformly distributed load is provided. Set of graphs of rational relative parameters of tendons, which correspond a minimum of their volume are gotten and received.

Ключевые слова: гибкая нить, нить конечной жесткости, высота сечения нити, относительный объем нити.

Введение. В последнее время особый интерес проявляется к висячим системам, получившим широкое распространение в различных отраслях народного хозяйства. При проектировании несущих элементов таких систем актуальной проблемой является выбор рациональных параметров элемента исходя из классических условий оптимального проектирования – обеспечить заданные свойства конструкции при минимальных затратах материала. Поэтому решение данного вопроса при действии на конструкцию наиболее распространенного вида загружения – равномерно распределенной нагрузки – имеет для проектировщиков первостепенное значение.

Постановка задачи. Для начала рассмотрим оптимизационную задачу о поиске геометрических параметров гибкой нити минимального объема.

Дано: l – пролет нити; q – погонная равномерно распределенная нагрузка; $[\sigma]$ – допустимое напряжение для материала нити.

Найти: f – стрелу провеса гибкой нити из условия минимума объема нити.

Гибкая нить. Для решения задачи используем аппроксимацию линии провеса нити дугой окружности.

В связи с этим логично ввести в рассмотрение вспомогательные геометрические параметры: L – длина дуги аппроксимирующей окружности;

R – радиус дуги аппроксимирующей окружности; φ – угол, соответствующий половине дуги аппроксимирующей окружности. При выбранной аппроксимации длина дуги нити выражается через ее радиус и угол φ по формуле

$$L = 2\,\varphi\,R.$$

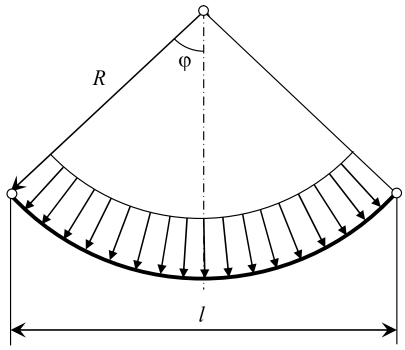

Рис. 1. Общая схема нити

Усилие в нити определяется простой формулой:

$$H = q\,R.$$

Площадь поперечного сечения нити выражается через это усилие формулой

$$A = \frac{H}{[\sigma]},$$

а ее объем

$$V_0 = L\,A.$$

Для избранной аппроксимации более удобно вместо стрелы провеса искать угол φ, через который стрела провеса выражается формулой:

$$f = R(1 - \cos\varphi).$$

Выразим объем нити в функции φ:

$$V_0 = \frac{\varphi q l^2}{2\sin^2\varphi[\sigma]}.$$

Для определения φ, соответствующего минимуму объема нити, продифференцируем объем нити V_0 по искомой переменной φ и приравняем эту производную нулю:

$$\frac{dV_0}{d\varphi}=\frac{2\sin\varphi[\sigma]ql^2}{\left(2\sin^2\varphi[\sigma]\right)^2}(\sin\varphi-2\varphi\cos\varphi)=0.$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$\operatorname{tg}\varphi = 2\,\varphi.$$

Полученное трансцендентное уравнение имеет ненулевое решение

$$\varphi = 1{,}167,$$

что соответствует относительной стреле провеса:

$$\frac{f}{l}=\frac{R(1-\cos\varphi)}{l}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Оптимальное значение относительной стрелы провеса

$$\frac{f}{l}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1{,}166}{2}=0{,}33.$$

Нить конечной жесткости с заданной высотой сечения. Как и в предыдущем случае, будем пользоваться приближенной расчетной схемой, в которой нагрузка действует по нормали к деформированной схеме нити (см. рис. 1). Для придания жесткости нити разовьем ее по высоте. Обозначим через a половину высоты сечения. В случае несимметричного сечения a – расстояние от центра тяжести сечения до нижнего волокна. Будем полагать, что закрепление концов нити близко к шарнирному, и изгибающий момент по всей длине нити постоянен.

Если стержень, из которого сделана нить, растянут силой H и искривлен по дуге с радиусом R, то напряжение в нижнем волокне составит:

$$\sigma=\frac{H}{A}+\frac{Ea}{R}, \qquad (1)$$

где A – площадь поперечного сечения нити; E – модуль упругости материала нити.

Действительно, по формуле сопротивления материалов

$$\sigma=\frac{H}{A}+\frac{M}{I}a. \qquad (2)$$

В то же время, $M=\frac{EI}{R}$ или $\frac{M}{I}=\frac{E}{R}$. Если в формулу (2) подставить это выражение, то получим формулу (1).

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу.

Даны:

— пролет нити l;
— погонная нагрузка q;
— полувысота сечения a;
— допускаемое напряжение $[\sigma]$.

Требуется найти угол φ, при котором объем нити будет минимальным.

Объем нити выражается формулой

$$V = 2R\varphi A. \tag{3}$$

Заметим, что

$$l = 2R\sin\varphi, \tag{4}$$

$$H = qR. \tag{5}$$

Из формул (2), (4), (5) найдем R и A:

$$R = \frac{l}{\sin\varphi} \text{ и } A = \frac{ql}{2\sin\varphi\sigma - Eal}.$$

С учетом этого

$$V = \frac{\varphi}{\sin\varphi}\frac{ql^2}{2\sin\varphi(\sigma - \frac{a}{l}2E\sin\varphi)}. \tag{6}$$

Необходимым условием минимума объема V является равенство нулю производной $\dfrac{dV}{d\varphi}$ при условии, что σ равняется допускаемому напряжению $[\sigma]$

$$\frac{dV}{d\varphi} = \frac{l^2q\left(\frac{[\sigma]}{E}\sin\varphi - 2\frac{a}{l}\sin^2\varphi - 2\varphi\frac{[\sigma]}{E}\cos\varphi + 6\frac{a}{l}\varphi\cos\varphi\sin\varphi\right)}{2\sin^3\varphi E\left(\frac{[\sigma]}{E} - 2\frac{a}{l}\sin^2\varphi\right)^2} = 0. \tag{7}$$

Это равенство эквивалентно следующему:

$$\frac{[\sigma]}{E}\sin\varphi - 2\frac{a}{l}\sin^2\varphi - 2\varphi\frac{[\sigma]}{E}\cos\varphi + 6\frac{a}{l}\varphi\cos\varphi\sin\varphi = 0,$$

которое можно записать так:

$$\frac{[\sigma]}{E}(1-2\varphi ctg\varphi)+2\frac{a}{l}(\sin\varphi+3\varphi\cos\varphi)=0\,. \qquad (8)$$

Как видно из этого уравнения, значение φ не зависит от нагрузки на нить, а зависит только от двух безразмерных параметров: $\frac{[\sigma]}{E}$ и $\frac{a}{l}$. Это обстоятельство значительно облегчает анализ поставленной задачи.

Уравнение (8) будем решать численным методом при различных значениях безразмерных параметров. Будем полагать, что $\frac{[\sigma]}{E}$ изменяется в диапазоне [0,001; 0,003], $\frac{a}{l}$ – в диапазоне [10^{-5}; 10^{-2}], что соответствует реальным пределам изменения этих параметров.

Результаты решения представлены в графическом виде, наглядно отображающем характер изменения данного результата для более жестких нитей.

Результаты являются функциями безразмерных параметров. Значения безразмерного параметра $\frac{a}{l}$ отложены по оси абсцисс, а значения $\frac{[\sigma]}{E}$ указаны в виде чисел рядом с соответствующей кривой.

На рис. 2 показаны оптимальные значения угла φ. Максимальное значение этого угла равно 1,167, что соответствует оптимальному значению угла для гибкой нити. С увеличением относительной высоты сечения нити оптимальные значения угла φ уменьшаются.

На рис. 3 показаны оптимальные отношения стрелы прогиба нити

$$f=R(1-\cos\varphi)$$

к ее пролету l. Наибольшее значение этого отношения 0,33 наблюдается для нити с исчезающе малым отношением высоты сечения к пролету нити. С увеличением относительной высоты сечения нити эти отношения уменьшаются. Естественно, для более прочного материала оптимальные стрелы провеса нити имеют большие значения.

На рис. 4 показаны отношения объема нити конечной жесткости к объему гибкой нити V_0. Из графиков видно, что при увеличении жесткости нити эти отношения резко растут. Таким образом, за увеличение жесткости элемента приходится расплачиваться зачастую десятикратным расходом материала.

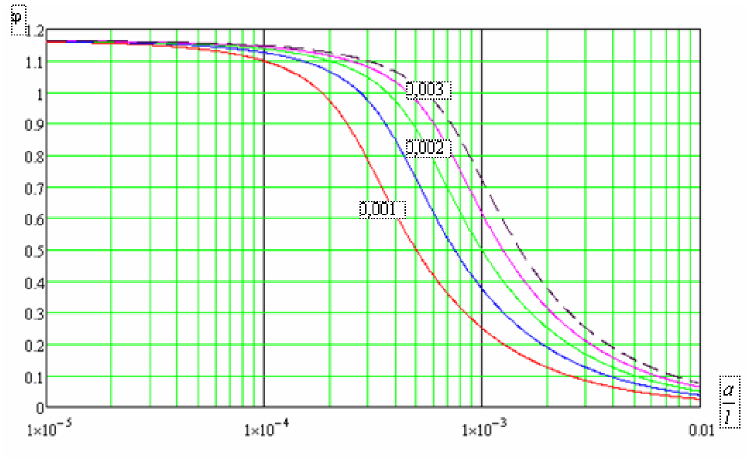

Рис. 2. Рациональные значения угла φ

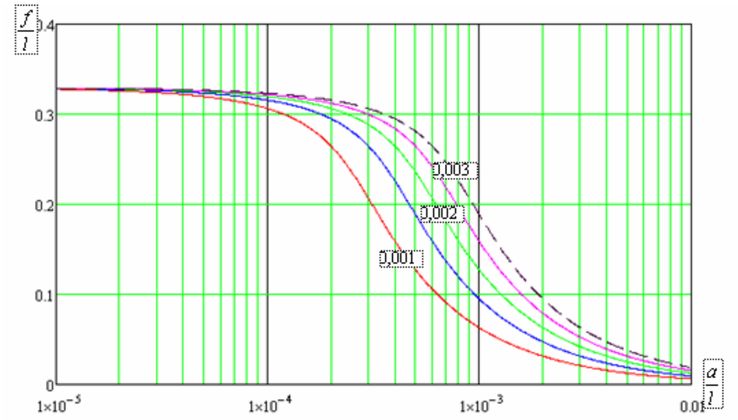

Рис. 3. Рациональные относительные стрелы провеса

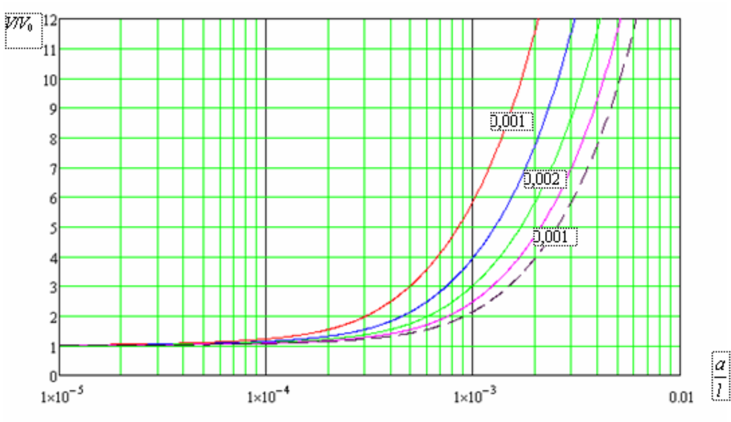

Рис. 4. Относительные объемы нити

Выводы

Таким образом, на основании аппроксимации формы прогибов нити установлены рациональные относительные параметры гибкой нити и нитей конечной жесткости, соответствующие минимуму объема нити. Оказалось, что эти параметры не зависят от пролета нити и нагрузки на нее. Это позволяет все результаты исследований изобразить в виде семейства графиков.

Литература

[1] Качурин В.К. Гибкие нити с малыми стрелками. – Гостехтеориздат, 1956. – 224 с.

[2] Качурин В.К. Статический расчет вантовых систем. – Л.: Стройиздат, 1969. – 141 с.

Надійшла до редколегії 20.05.2012 р.