

УДК 539.3:622.24

Нелинейное деформирование бурильных колонн в сверхглубоких цилиндрических скважинах

^{1,2}Гуляев В.И., д.т.н., ^{1,2}Худолий С.Н., к.т.н., ¹Андрусенко Е.Н.

¹Национальный транспортный университет, Украина
²ООО «Укринсталькон им. В.Н. Шимановского», Украина

Аннотация. Рассмотрена задача упругого нелинейного изгибного деформирования бурильных колонн в цилиндрических полостях вертикальных сверхглубоких нефтяных и газовых скважин. На основе теории гибких криволинейных стержней с использованием специально выбранной системы отсчёта построены нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие контактное взаимодействие трубы бурильной колонны со стенкой скважины. Предложена методика численного решения разрешающих уравнений. Рассмотрены результаты компьютерного моделирования.

Анотація. Розглянуто задачу пружного нелінійного згинного деформування бурильних колон у циліндричних порожнинах вертикальних надглибоких нафтових і газових свердловин. На основі теорії гнучких криволінійних стрижнів із використанням спеціально обраної системи відліку побудовані нелінійні звичайні диференціальні рівняння, що описують контактну взаємодію труби бурильної колони зі стінкою свердловини. Запропоновано методику чисельного розв'язку розв'язувальних рівнянь. Розглянуті результати комп'ютерного моделювання.

Abstract. The problem about non-linear bending of drill strings in cylindrical cavities of vertical hyper deep oil and gas bore-holes is considered. On the basis of the theory of flexible curvilinear rods with the use of a specially selected reference frame the non-linear ordinary differential equations are constructed, which describe contact interaction of the drill string with the bore-hole wall. The techniques for numerical solution of the constitutive equations are proposed. The results of computer simulation are discussed.

Ключевые слова: бурильная колонна, полость скважины, закритическое деформирование.

Введение. По результатам геологоразведочных исследований ресурсы углеводородных топлив в украинском секторе морских акваторий составляют значительные объёмы, однако проблема их извлечения сопряжена со значительными технологическими трудностями проходки глубоких скважин. Одно из основных препятствий глубокого бурения связано с возможностью появления нештатных ситуаций, вызванных критическими состояниями квазистатического равновесия бурильной колонны (БК), её изгибным выпучиванием, контактным взаимодействием со стенкой скважины и её так называемым «прихватыванием». При этом возникает две проблемы исследования механики упругого изгиба БК. Первая проблема заключается в определении критического состояния

колонны, которая формулируется как задача эйлеровой потери устойчивости длинного вращающегося трубчатого стержня, преднапряжённого переменной по длине продольной силой, вызванной силами гравитации и крутящим моментом. Такая задача сформулирована и решена на основе теории прямолинейных балок в работах [3, 6, 7]. В них показано, что она является сингулярно возмущённой, поскольку коэффициент EI перед старшей (четвёртой) производной в разрешающих уравнениях оказывается намного меньше коэффициентов перед другими слагаемыми. При этом форма бифуркационного выпучивания БК представляет собой трёхмерную спираль с переменным шагом.

Однако не менее существенный интерес вызывают вопросы исследования процесса последующего (закритического) деформирования колонны, когда в результате выпучивания она вступает в контакт со стенкой скважины и продолжает изменять свою форму под действием увеличивающихся продольной силы, распределённой контактной силы и крутящего момента [4, 5, 8]. Моделирование этого процесса может быть выполнено только с помощью нелинейной теории гибких криволинейных стержней. При этом, как показано ниже, весьма важным оказывается вопрос правильного выбора системы отсчёта, в которой рассматривается изгибание колонны. Применение для этих целей сопутствующей системы координат, одна из осей которой ортогональна поверхности скважины, позволило уменьшить число искомых переменных и исключить из рассмотрения неизвестную реакцию давления БК на стенки скважины.

Разрешающие уравнения изгиба колонны в полости скважины. Примем, что при закритическом изгибании буровой колонны постоянного радиуса r_1 она по всей своей длине безотрывно контактирует со стенкой скважины. Осевая линия скважины вертикальная, а стенка – круговая цилиндрическая поверхность радиуса r_2 .

Будем рассматривать деформирование колонны как движение её осевой линии L по цилиндрической поверхности D радиуса $a = r_2 - r_1$.

Введём неподвижную декартову систему координат $OXYZ$ и систему координатных линий u, v на поверхности D , направленных вдоль образующих и в окружном направлении, соответственно (рис. 1).

Положение кривой L на D определяется равенствами (рис. 2)

$$u = u(s), \quad v = v(s).$$

Здесь s – натуральный параметр, измеряемый длиной линии L от некоторой начальной точки до текущей.

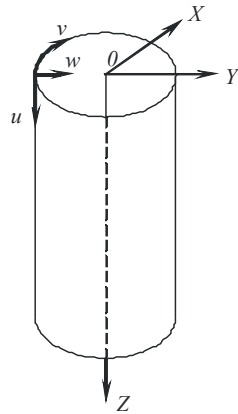


Рис. 1. Схема поверхні скважини

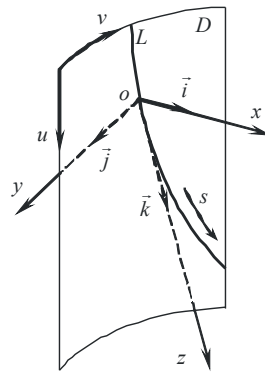


Рис. 2. Положення осевої лінії L на поверхні D

На кривій L введём супутствующую систему координат $OXYZ$ с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Ось OX этой системы направлена вдоль внутренней нормали к поверхности D , ось OZ – вдоль касательной к кривой L , ось OY дополняет эту систему до правой тройки.

При моделировании закритического деформирования БК считаем, что она уже не вращается и центробежные силы инерции равны нулю, влияние потоков промывочной жидкости на изгибание колонны можно не учитывать, однако в результате движения её потоков и лёгких потряхиваний колонны при её малых движениях устраняются силы трения и ими также можно пренебречь. Тогда деформирование БК происходит в упругой стадии, а напряжённо-деформированное состояние определяется главными векторами внутренних сил $\vec{F}(s)$, внутренних моментов $\vec{M}(s)$ и вектором $\vec{f}(s)$ внешних распределённых сил, который складывается из вектора $\vec{f}^{gr}(s)$ сил тяжести и вектора $\vec{f}^c(s)$ контактных сил. Эти силы и моменты подчиняются уравнениям равновесия элемента БК [1]

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = -\vec{f}, \quad \frac{d\vec{M}}{ds} = -\vec{k} \times \vec{F}. \quad (1)$$

Обычно уравнения (1) формулируются в подвижной системе координат, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции поперечных сечений гибкого стержня. В анализируемом случае такая необходимость отпадает, поскольку сечение БК – кольцевое и все его центральные оси являются главными. В то же время рассматриваемая задача связана с другим осложнением, обусловленным наличием связи в

виде жёсткой поверхности скважины, ограничивающей перемещения БК, и появлением дополнительных неизвестных контактных сил $\vec{f}^c(s)$, увеличивающих число искомых функций. Однако, если рассматривать деформирование БК в сопутствующей системе отсчёта $OXYZ$, то тем самым можно не только разделить переменные и исключить неизвестную реакцию связи $\vec{f}^c(s)$, но и уменьшить общее число искомых функций. Такой подход аналогичен использованию обобщённых координат в методе уравнений Лагранжа второго рода по сравнению с применением уравнений Лагранжа первого рода.

С учётом отмеченного придадим абсолютным производным $d\vec{F}/ds$, $d\vec{M}/ds$ в (1) форму

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = \frac{\tilde{d}\vec{F}}{ds} + \vec{\omega} \times \vec{F}, \quad \frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{\tilde{d}\vec{M}}{ds} + \vec{\omega} \times \vec{M}. \quad (2)$$

Здесь $\tilde{d}\dots/ds$ – локальная производная, $\vec{\omega}$ – обобщённый вектор Дарбу, представляющий собой вектор угловой скорости системы $OXYZ$ при движении её с начала вдоль кривой L с единичной скоростью [1]. Вектор $\vec{\omega}$ определяется равенством

$$\vec{\omega} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k}, \quad (3)$$

где k_x – геодезическая кривизна кривой L ; k_y – определяемая по формуле Эйлера нормальная кривизна поверхности D вдоль кривой L ; k_z – кручение кривой L .

В системе отсчёта $OXYZ$ уравнения (1) приобретают вид

$$\frac{\tilde{d}\vec{F}}{ds} = -\vec{\omega} \times \vec{F} - \vec{f}, \quad \frac{\tilde{d}\vec{M}}{ds} = -\vec{\omega} \times \vec{M} - \vec{k} \times \vec{F}. \quad (4)$$

Для цилиндрической поверхности D компоненты вектора $\vec{\omega}$ вычисляются по формуле [2]

$$k_x = -a(u''v' - v''u'), \quad k_y = a(v')^2, \quad k_z = u'v'. \quad (5)$$

В этих равенствах штрихом справа сверху обозначается производная по параметру s .

С учётом равенства (3) преобразуем уравнения (4) к скалярному виду отдельно для соотношений силовой группы

$$\begin{aligned}\frac{dF_x}{ds} &= -k_y F_z + k_z F_y - f_x^{gr} - f^c, \\ \frac{dF_y}{ds} &= -k_z F_x + k_x F_z - f_y^{gr}, \\ \frac{dF_z}{ds} &= -k_x F_y + k_y F_x - f_z^{gr}\end{aligned}\tag{6}$$

и моментной группы

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{ds} &= -k_y M_z + k_z M_y + F_y, \\ \frac{dM_y}{ds} &= -k_z M_x + k_x M_z - F_x, \\ \frac{dM_z}{ds} &= -k_x M_y + k_y M_x.\end{aligned}\tag{7}$$

В уравнениях (7) моменты M_x , M_y , M_z вычисляются по формулам

$$M_x = EI k_x, \quad M_y = EI k_y, \quad M_z = GI_0 k_z,\tag{8}$$

где E , G – параметры упругости Ляме материала трубы БК; I – центральный осевой момент инерции площади поперечного сечения трубы; I_0 – полярный момент инерции площади сечения.

С помощью равенств (5) и двух первых уравнений системы (7) можно получить:

$$F_x = -2EIav'v'' - a(M_z - EIU'v')(u''v' - v''u');\tag{9}$$

$$F_y = -EIa \frac{d}{ds}(u''v' - v''u') + a(M_z - EIU'v')(v')^2.\tag{10}$$

Из первых двух равенств системы (8) следует, что правая часть третьего уравнения системы (7) равна нулю, поэтому

$$M_z = const\tag{11}$$

и его значение задаётся в граничных условиях.

Соотношения (5) – (8) позволяют сформулировать систему шести дифференциальных уравнений первого порядка относительно шести искомых

функцій u , v , v' , k_x , F_y , F_z . Для их записи удобно ввести обозначения $q_1 = F_y$, $q_2 = F_z$, $q_3 = k_x$, $q_4 = v$, $q_5 = v'$, $q_6 = u$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{ds} &= 2EIq_3(q_5^2 - a^2q_5^4) - (M_z - EIq_5\sqrt{1-a^2q_5^2})q_3q_5\sqrt{1-a^2q_5^2} + \\ &+ q_2q_3 - f^{gr}aq_5; \\ \frac{dq_2}{ds} &= -q_1q_3 - 2EIaq_5^3q_3\sqrt{1-a^2q_5^2} + a(M_z - EIq_5\sqrt{1-a^2q_5^2})q_3q_5^2 - \\ &- f^{gr}\sqrt{1-a^2q_5^2}; \\ \frac{dq_3}{ds} &= -\frac{aM_z}{EI}q_5^2 + a\sqrt{1-a^2q_5^2}q_5^3 + \frac{1}{EI}q_1; \\ \frac{dq_4}{ds} &= q_5; \\ \frac{dq_5}{ds} &= \frac{1}{a}q_3\sqrt{1-a^2q_5^2}; \\ \frac{dq_6}{ds} &= \sqrt{1-a^2q_5^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение этой системы при заданных граничных условиях и величине M_z даёт возможность с помощью формул (5), (8), (9) найти остальные функции, определяющие напряжённо-деформированное состояние колонны, и по формуле

$$f^c = -k_yF_z + u'v'F_y - f_x - dF_x/ds \quad (13)$$

подсчитать силу контактного взаимодействия БК со стенкой скважины.

Подчеркнём ещё раз, что благодаря применению сопутствующей системе отчёта $OXYZ$, общее число разрешающих уравнений системы (12), включающей уравнения равновесия и геометрические уравнения, уменьшен до шести, в то время как порядок разрешающих уравнений общей теории криволинейных стержней равен двенадцати [1]. К тому же, если в рассматриваемой задаче не применять систему $OXYZ$, число уравнений увеличилось бы ещё на единицу в связи с добавлением новой искомой функции $\vec{f}^c(s)$.

Методика решения системы нелинейных уравнений. Для решения сформулированной задачи используем метод продолжения решения по параметру совместно с методом Ньютона [1]. Представим систему (12) в векторной форме:

$$\vec{q}' = \vec{f}(\vec{q}, s, \lambda), \quad (14)$$

где $\vec{q}(s) = [q_1(s), q_2(s), \dots, q_6(s)]^T$ – шестимерный вектор состояния; $\vec{f}(\dots)$ – вектор-функция правых частей системы (12); s – натуральный параметр, измеряемый длиной осевой линии БК; λ – параметр интенсивности возмущения (нагрузки); штрихом обозначена производная по s . Отметим, что вводимый параметр λ может быть как действительным, так и формальным, отражающим какие-либо количественные характеристики.

На краях $s = 0$ и $s = S$ интервала $0 \leq s \leq S$ изменения переменной s заданы по три независимых краевых условия, представленных в векторной форме:

$$\bar{\varphi}[\vec{q}(0), \lambda] = 0, \quad (15)$$

$$\bar{\psi}[\vec{q}(S), \lambda] = 0. \quad (16)$$

Уравнения (14) – (16) составляют зависящую от параметра λ нелинейную двухточечную краевую задачу. Пусть при некотором исходном значении $\lambda = \lambda^{(n)}$ известно решение $\vec{q}^{(n)}(s)$ поставленной задачи. Выбирая это решение в качестве опорного, дадим малое приращение $\delta\lambda^{(n)}$ параметру λ . Тогда соответствующую ему вариацию $\delta\vec{q}^{(n)}(s)$ решения $\vec{q}(s)$ можно найти из линейного уравнения

$$\frac{d\delta\vec{q}^{(n)}}{ds} = \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{q}}\delta\vec{q}^{(n)} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial\lambda}\delta\lambda^{(n)}, \quad (17)$$

полученного линеаризацией уравнения (14) в состоянии $\vec{q}^{(n)}, \lambda^{(n)}$.

Краевые уравнения для функции $\delta\vec{q}^{(n)}$ формируются линеаризацией уравнений (15), (16):

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\vec{q}}\delta\vec{q}^{(n)}(0) + \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\lambda}\delta\lambda^{(n)} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\vec{q}}\delta\vec{q}^{(n)}(S) + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\lambda}\delta\lambda^{(n)} = 0. \quad (19)$$

Здесь матрицы Якоби $\partial\bar{\varphi}/\partial\vec{q}$, $\partial\bar{\psi}/\partial\vec{q}$ и векторы $\partial\bar{\varphi}/\partial\lambda$, $\partial\bar{\psi}/\partial\lambda$ также вычисляются в состоянии $\vec{q}^{(n)}, \lambda^{(n)}$.

Для построения $\delta\bar{q}^{(n)}(s)$ выберем среди составляющих $\delta q_i^{(n)}(s)$ ($i=1,2,\dots,6$) такие три компоненты $\delta q_j^{(n)}(s)$, любые значения которых $\delta q_i^{(n)}(0)$ не нарушат систему (18). Перенумеровав неизвестные $\delta q_i^{(n)}$ ($i=1,2,\dots,6$) так, чтобы индекс j принимал значения $j=1,2,3$, решение задачи (17) – (19) представим в виде

$$\delta\bar{q}^{(n)}(s) = \bar{y}_\lambda \delta\lambda^{(n)} + Y(s)\delta c^{(n)}, \quad (20)$$

где \bar{y}_λ – решение задачи Коши для системы

$$\frac{d\bar{y}_\lambda}{ds} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} \bar{y}_\lambda + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} \quad (21)$$

при нулевых начальных условиях; $Y(s)$ – матрица размера 6×3 решений системы

$$\frac{d\bar{y}}{ds} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} \bar{y} \quad (22)$$

с начальными условиями $y_j(0) = (\delta_1^j, \delta_2^j, \dots, \delta_6^j)$ ($j=1,2,3$) для независимо варьируемых условий и начальными условиями, подбираемыми из уравнений (18) для остальных переменных $y_i(0)$ ($i=4,5,6$). Здесь δ_k^i – символ Кронекера. Вектор $\delta c^{(n)} = [\delta c_1^{(n)}, \delta c_2^{(n)}, \delta c_3^{(n)}]^T$ подбирается так, чтобы удовлетворялось уравнение (19), т.е.:

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{q}} Y(S)\delta c^{(n)} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{q}} \bar{y}_\lambda(S)\delta\lambda^{(n)} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \lambda} \delta\lambda^{(n)} \quad (23)$$

Состояния, в которых

$$\left| \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{q}} Y(S) \right| = 0, \quad (24)$$

являются бифуркационными. В них система теряет устойчивость.

Так как вектор $\delta\bar{q}^{(n)}(s)$ найден с использованием линеаризованных уравнений (17)–(19), решения $\bar{q}^{(n+1)}(s) = \bar{q}^{(n)}(s) + \delta\bar{q}^{(n)}(s)$, $\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} + \delta\lambda^{(n)}$ будет удовлетворять нелинейным краевым уравнениям (18), (19) приближённо с невязками

$$\vec{r}_\varphi^{(n+1)} = \bar{\varphi}[\bar{q}^{(n+1)}(0), \lambda^{(n+1)}], \quad \vec{r}_\psi^{(n+1)} = \bar{\psi}[\bar{q}^{(n+1)}(S), \lambda^{(n+1)}]. \quad (25)$$

Поэтому на следующем шаге варьирования параметра λ невязки $\vec{r}_\varphi^{(n+1)}$, $\vec{r}_\psi^{(n+1)}$ добавляются в правые части соответствующих линеаризованных граничных условий (18), (19) с обратными знаками.

Для поставленной задачи уравнения (17), соответствующие системе (12), имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta q'_1 &= q_3 \delta q_2 + \left[3EIq_5^2(1-a^2q_5^2) - M_z q_5 \sqrt{1-a^2q_5^2} + q_2 \right] \delta q_3 + \\ &+ \left[6EIq_3q_5(1-2a^2q_5^2) - M_z \frac{q_3(1-2a^2q_5^2)}{\sqrt{1-a^2q_5^2}} - af^{gr} \right] \delta q_5 + \\ &+ (-q_3q_5\sqrt{1-a^2q_5^2}) \delta M_z; \\ \delta q'_2 &= -q_3 \delta q_1 + (-3EIaq_5^3\sqrt{1-a^2q_5^2} + M_z a q_5^2 - q_1) \delta q_3 + \\ &+ \left[\frac{EIaq_3q_5^2}{\sqrt{1-a^2q_5^2}} (-9+12a^2q_5^2) + 2M_z a q_3 q_5 + \frac{f^{gr} a^2 q_5^2}{\sqrt{1-a^2q_5^2}} \right] \delta q_5 + \\ &+ a q_3 q_5^2 \delta M_z; \\ \delta q'_3 &= \frac{1}{EI} \delta q_1 + \left[-\frac{2a}{EI} M_z q_5 + a q_5^2 \frac{(3-4a^2q_5^2)}{\sqrt{1-a^2q_5^2}} \right] \delta q_5 - \frac{a}{EI} q_5^2 \delta M_z; \\ \delta q'_4 &= \delta q_5; \\ \delta q'_5 &= \frac{1}{a} \sqrt{1-a^2q_5^2} \delta q_3 - \frac{a q_3 q_5}{\sqrt{1-a^2q_5^2}} \delta q_5; \\ \delta q'_6 &= -\frac{a^2 q_5}{\sqrt{1-a^2q_5^2}} \delta q_5. \end{aligned} \quad (26)$$

Конкретные зависимости для краевых уравнений (15), (16) выбираются в зависимости от условий опирания БК на краях $s=0$ и $s=S$. Они выражаются через вертикальную силу давления R долота на дно скважины, крутящий момент M_z , изгибающий момент M_x и перемещения u и v . Каждая из этих величин может быть задана в качестве ведущего параметра λ . Интегрирование уравнений (26) при

построении матрицы $Y(s)$ и системы (12), а также вычисления невязок (25) осуществляется методом Рунге-Кутты совместно с методом ортогонализации по Годунову.

Результаты численных исследований. С помощью предложенной методики выполнено компьютерное моделирование упругого закритического деформирования БК внутри цилиндрической вертикальной скважины. Принято, что своим нижним концом БК упирается в дно скважины, поэтому на него действует сжимающая сила реакции $F_z(S) = -R$. Величина R изменялась, и по мере её увеличения происходило закритическое деформирование БК. На верхний конец БК действует сила $F_z(0) = G - R$, где G сила тяжести всей БК, подсчитанная с учётом действия гидростатической выталкивающей силы от промывочной жидкости.

Расчёты выполнены при следующих значениях исходных данных: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $L = 500$ м, $r_1 = 0,3$ м, $r_2 = 0,28$ м, $a = 0,05$ м, $G = 53598$ Н. Величина $M_z = 1000$ Нм считалась неизменной.

Вычисления показали, что как и для большинства задач механики бурильных колонн, из-за малого отношения $2r_1/L$ данная задача также оказалась сингулярно возмущённой, поэтому для обеспечения сходимости расчётов пришлось шаг интегрирования уменьшить до величины $\Delta s = L/5000$ и использовать 2000 точек ортогонализации. В качестве параметра λ была выбрана величина углового смещения $\nu(S)$ нижнего конца БК. Величина его приращения задавалась равной $\Delta \nu(S) = 2\pi/16000$.

На рис. 3 представлена форма изогнутой оси бурильной колонны при $R = 12238$ Н. Она соответствует спиральной кривой с одним витком. Угол наклона спирали изменяется, причём наибольшее значение имеет место на нижнем конце $s = S$ и наименьшее – на верхнем конце $s = 0$.

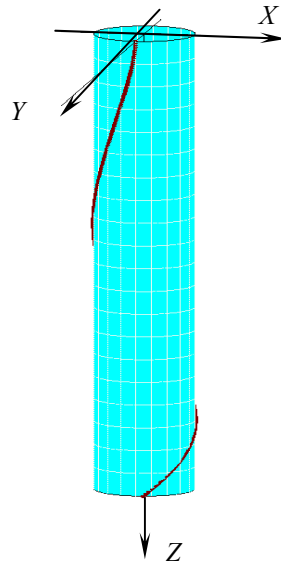


Рис. 3. Форма изогнутой оси
бурильной колонны

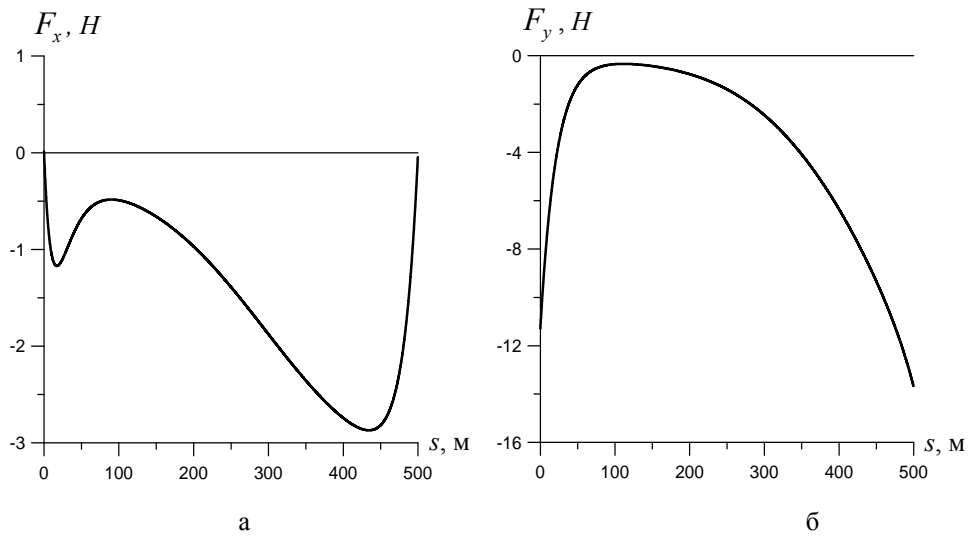


Рис. 4. Графики изменения перерезывающих сил F_x (а) и F_y (б)

Интересно отметить, что даже при $M_z = 1000 \text{ Нм}$, $R = 12238 \text{ Н}$ максимальные значения этих функций сравнительно малы.

Выводы

В данной работе поставлена задача об упругом закритическом изгибании протяжённых бурильных колонн в цилиндрических полостях вертикальных нефтяных и газовых скважин.

На основе теории гибких криволинейных стержней построены существенно нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие контактное взаимодействие трубы бурильной колонны со стенкой скважины. Показано, что использование специально выбранной подвижной системы координат в качестве сопутствующей системы отсчёта позволяет не только в два раза понизить общий порядок разрешающих уравнений, но и существенно упростить их.

Выполнено компьютерное моделирование процесса упругого деформирования бурильной колонны в цилиндрической полости под действием крутящего момента, распределённых осевых сил тяжести, вертикальной реакции взаимодействия колонны с дном скважины и искомых распределённых сил давления стенки скважины на колонну. Исследовано её напряжённо-деформированное состояние.

Показано, что изгибание колонны происходит по форме трёхмерной спирали с переменным шагом. При этом значения внутренних перерезывающих сил и моментов сравнительно невелики.

Работа выполнена в рамках проекта № 0112U000137.

Литература

- [1] Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Кошкин В.Л. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – К.: Наукова думка, 1992. – 344 с.
- [2] Гуляев В.И., Горбунович І.В., Гловач Л.В. Елементи теорії поверхонь. – К.: Видавництво РВВ НТУ, 2011. – 239 с.
- [3] Гуляев В.И., Луговой П.З., Гайдайчук В.В., Соловьёв И.Л., Горбунович И.В. Анализ влияния длины вращающейся бурильной колонны на устойчивость её квазистатического равновесия // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 83 – 92.
- [4] Brett J.F., Beckett A.D., Holt C.A., Smith D.L. Uses and limitations of drill string tension and torque models for monitoring hole conditions // SPE Drilling Engineering. – 1989. – № 4. – P. 223 – 229.

- [5] Choe J., Schubert J.J., Juvkam-Wold H. C. Well-control analyses on extended-reach and multilateral trajectories // SPE Drilling and Completion. – 2005. – № 3. – P. 101 – 108.
- [6] Gulyayev V.I., Borshch E.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2011. – V. 78. – P. 759 – 764.
- [7] Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V. The buckling of elongated rotating drill strings // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2009. –V. 46, № 2. – P. 140 – 148.
- [8] Mohiuddin M. A., Khan K., Abdurraheem A., Al-Majed A., Awall M.R. Analysis of wellbore instability in vertical, directional and horizontal wells using field data // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2006. – V. 55. – P. 83 – 92.

Надійшла до редколегії 22.05.2012 р.