

УДК 624.014:514.7

Математические основы формообразования криволинейных тонкостенных стержней из листовых заготовок

Гордеев В.Н., д.т.н.

ООО «Укринсталкон им. В.Н. Шимановского», Украина

Анотація. У цій статті розглядаються проблеми формоутворення коробчастих криволінійних тонкостінних стрижнів з плоских листових металевих заготовок. Показано, що для опису геометрії криволінійного стрижня зручно використовувати математичний апарат кватерніонів. Основну увагу приділено геометрії деформування плоских листових заготовок з метою надання їм необхідної просторової форми. Показано, як можна досягти розгортваності смуг стрижня, завдяки чому потрібна форма смуг стрижня буде отримуватися лише за рахунок згинання листових заготовок. Для випадку нерозгортваних смуг запропоновано трьохетапну методику попереднього деформування серединної площини листової заготовки.

Аннотация. В настоящей статье рассматриваются проблемы формообразования коробчатых криволинейных тонкостенных стержней из плоских листовых металлических заготовок. Показано, что для описания геометрии криволинейного стержня удобно использовать математический аппарат кватернионов. Основное внимание уделено геометрии деформирования плоских листовых заготовок с целью придания им необходимой пространственной формы. Показано, как можно добиться разворачиваемости полос стержня, благодаря чему нужная форма полос стержня будет получаться лишь за счет изгибания листовых заготовок. Для случая неразворачиваемых полос предложена трехэтапная методика предварительного деформирования срединной плоскости листовой заготовки.

Abstract. This article considers the problems of form-finding of box-type curved thinwall bars made of flat sheet metal blanks. It is shown that to describe geometry of the curved bar it is convenient to use mathematical formalism of quaternions. The focus is made on deformation geometry of flat sheet blanks, in order to give them necessary spatial forms. It is shown, how developable strips of bars can be achieved, allowing the desired shape of the bar faces will be obtained only by bending sheet blanks. For the case of undevelopable strips the three-step methodology of preliminary deformation of the sheet blank middle plane is proposed.

Ключевые слова: Криволинейный стержень, формообразование, листовая заготовка, изгибание поверхностей, кватернион.

Введение. В современной архитектуре получило развитие направление, характеризующееся применением криволинейных очертаний и криволинейных элементов. Наиболее ярким представителем этого направления является Национальный стадион в Пекине, построенный к Олимпийским играм 2008 года, известный под названием «Птичье гнездо» (рис. 1).

Несущие конструкции этого стадиона представляют собой хитросплетение криволинейных металлических стержней коробчатого поперечного сечения.



Рис. 1. Национальный стадион в Пекине

Это направление широко представлено также в работах выдающегося современного архитектора Сантьяго Калатравы. На своей родине в Валенсии Калатрава построил большой комплекс из пяти криволинейных сооружений, названный городом науки и искусств (рис. 2). Архитектор создал также много мостов с криволинейными элементами (рис. 3).



Рис. 2. Город науки и искусств. Оранжерея



Рис. 3. Мост мира. Калгари

Следуя идее Национального стадиона в Пекине, в Макао (Китай) по проекту архитектора Захи Хадид начато сооружение 40-этажного здания отеля, с каркасом из криволинейных стержней (рис. 4). Эта грандиозная стройка планируется к завершению в 2017 году.

В качестве несущих элементов криволинейных сооружений чаще всего выступают криволинейные стержни. Криволинейный стержень в сопротивлении материалов и в теории упругости – это тело, геометрическая форма которого образуется движением в пространстве плоской фигуры (сечения), при этом одна из точек этого сечения (полюс) всегда остаётся

на некоторой гладкой кривой (оси стержня), а плоскость фигуры нормальна этой кривой. По виду оси криволинейный стержень может быть плоским (если его ось – плоская кривая) и пространственным (если его ось – пространственная кривая).



Рис. 4. 40-этажный отель в Макао, Китай.

В зависимости от вида сечения различают криволинейные стержни постоянного и переменного сечения. Разновидностью криволинейного стержня является естественно закрученный криволинейный стержень, отличающийся тем, что плоская фигура поперечного сечения при своём движении по оси криволинейного стержня одновременно вращается вокруг касательной к этой оси.

Подходящим математическим аппаратом для изучения геометрии криволинейных стержней является алгебра кватернионов, которая хорошо описывает положение тел и их движение в трехмерном пространстве [1], [1]. Применение кватернионов для описания криволинейных стержней представлено в работах [5], [6].

Коротко о кватернионах. Кватернион – это упорядоченная четверка действительных чисел:

$$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3], \quad (1)$$

содержащая в себе информацию о скаляре и трехмерном векторе. Жирными прямыми символами будем обозначать кватернионы (\mathbf{q}). Наклонными тонкими символами будем обозначать компоненты кватерниона $[q_0, q_1, q_2, q_3]$. Скалярную часть кватерниона (скаляр) будем обозначать: $\text{scal}\mathbf{q} = q_0$; векторную часть (трехмерный вектор): $\text{vect}\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$. Двойными прямыми скобками будем обозначать норму кватерниона $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$; одиночными прямыми скобками – его модуль $|\mathbf{q}| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$; угловыми скобками – модуль векторной части $\langle \mathbf{q} \rangle = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$; чертой над обозначением – сопряженный кватернион: $\bar{\mathbf{q}} = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3]$.

Для геометрического истолкования векторной части кватерниона надо привязать ее к определенной декартовой координатной системе в трехмерном пространстве. Если в одной формуле используются кватернионы, представленные в разных системах, координатную систему, к которой привязан данный кватернион, будем идентифицировать по левому нижнему индексу рядом с обозначением кватерниона.

Для кватернионов определены операции сложения и вычитания, умножения на кватернион и число, аналитические функции от кватерниона. Кватернионное сложение будем обозначать символом «+», вычитание символом «-», умножение символом « \circ », умножение на число символом « \cdot ». Функциональная зависимость обозначается обычным способом.

Формообразование криволинейных стержней. В предыдущих работах [5], [6] рассмотрена методика построения формы криволинейного стержня с применением кватернионов. Основная идея заключается в том, что заранее заданное поперечное сечение стержня с выбранной на нем базовой точкой мы мысленно перемещаем в пространстве с постоянной скоростью v в направлении, перпендикулярном этому сечению, одновременно поворачивая это сечение. Фигура, ометаемая этим сечением, является построенным криволинейным стержнем. Стержень имеет постоянное по длине поперечное сечение, нормальное к его оси. Базовая точка сечения прочерчивает в пространстве ось стержня (рис. 5).

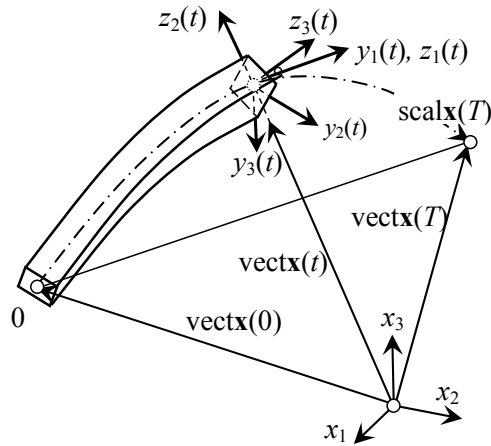


Рис. 5. Формообразование стержня

Будем различать три системы координат. Первая из них – неподвижная – x_1, x_2, x_3 , жестко связанная с землей, вторая – подвижная – $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$, определяющая ось стержня, и третья – подвижная – $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$, определяющая своими осями $z_2(t)$ и $z_3(t)$ координаты точки поперечного сечения стержня и жестко связанная с этим сечением. Координатные системы y и z в задаче формообразования стержней являются функциями времени t .

Стержень характеризуется двумя кватернионами $\mathbf{x}(t)$ и $\boldsymbol{\varphi}(t)$. Кватернион $\mathbf{x}(t)$ определяет ось криволинейного стержня в пространстве, кватернион $\boldsymbol{\varphi}(t)$ – пространственную ориентацию поперечного сечения.

Физический смысл этих кватернионов таков. Для кватерниона $\mathbf{x}(t)$: $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ – пространственные координаты базовой точки поперечного сечения стержня в трехмерной декартовой системе координат; $x_0(t)$ – дуговая координата сечения стержня. Для кватерниона $\boldsymbol{\varphi}(t)$: $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ – компоненты вектора, вокруг которого и на величину которого надо повернуть неподвижную систему координат x_1, x_2, x_3 до положения, когда она совпадет по своей ориентации с подвижной системой $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ ($-\infty \leq \varphi_i \leq \infty, i = 1, 2, 3$), определяющей пространственную ориентацию поперечного сечения стержня. Угол, на величину которого надо повернуть неподвижную систему координат, равен модулю этого вектора, а знак угла определяется по правилу буравчика. $\varphi_0(t)$ – угол, на который надо довернуть поперечное сечение вокруг оси $y_1(t)$ по отношению к подвижной системе координат $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ с тем, чтобы оно заняло свое проектное положение ($-\infty \leq \varphi_0 \leq \infty$).

Напомним, что в процессе построения формы стержня заданное сечение перемещается и поворачивается. Пусть скорости этих перемещений и поворотов в подвижной системе координат \mathbf{y} характеризуются кватернионами \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}(t)$, где ${}_{\mathbf{y}(t)}\mathbf{v} = [v, v, 0, 0]$ – постоянный кватернион линейной скорости, ${}_{\mathbf{y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_0(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)]$ кватернион угловых скоростей, причем $\omega_0(t)$ – дополнительная скорость поворота сечения относительно оси стержня, $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$ – скорости поворотов сечения относительно координат $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ соответственно.

Пусть известны начальные значения кватернионов $\mathbf{x}(0)$ и $\boldsymbol{\varphi}(0)$. Пусть известны также скорость линейного перемещения сечения v , скорости поворотов сечения $\omega_0(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$, в зависимости от времени, изменяющегося в интервале $[0 \leq t \leq T]$. Требуется определить кватернионы $\mathbf{x}(t)$ и $\boldsymbol{\varphi}(t)$ как функции времени в том же интервале.

Компоненты этих кватернионов определяют ось стержня, а также ориентацию поперечного сечения в пространстве в любой момент времени из заданного интервала.

При решении сформулированной задачи вместо кватерниона $\boldsymbol{\varphi}(t)$ будем пользоваться половинным экспоненциальным кватернионом $\mathbf{q}(t)$ [1], связанным с кватернионом $\boldsymbol{\varphi}(t)$ следующими (прямой и обратной) функциональными зависимостями:

$$\mathbf{q} = \exp \frac{\boldsymbol{\varphi}}{2}; \quad \boldsymbol{\varphi} = 2 \cdot \ln \mathbf{q}. \quad (2)$$

Использование этого кватерниона определяется его замечательными свойствами. Наиболее важное из них заключается в том, что с помощью этого кватерниона очень просто записывается формула сложения поворотов. Пусть вначале был выполнен поворот тела, определяемый половинным экспоненциальным кватернионом ${}_x\mathbf{p1}$, а затем поворот, определяемый половинным экспоненциальным кватернионом ${}_x\mathbf{p2}$, представленными в неподвижной системе координат. Половинный экспоненциальный кватернион результирующего поворота в неподвижной системе координат определяется формулой:

$${}_x\mathbf{p} = {}_x\mathbf{p2} \circ {}_x\mathbf{p1}. \quad (3)$$

Второе важное свойство заключается в том, что с помощью половинного экспоненциального кватерниона \mathbf{q} , определяемого формулой (2), можно выполнять преобразование компонентов кватернионов при переходе от подвижной системы координат к неподвижной и наоборот.

Если, например, известны компоненты некоторого кватерниона ${}_y\mathbf{p}$ в подвижной системе координат y_1, y_2, y_3 , связанной с телом, то компоненты этого же кватерниона ${}_x\mathbf{p}$ в неподвижной системе координат x_1, x_2, x_3 можно определить по формуле:

$${}_x\mathbf{p} = \mathbf{q} \circ {}_y\mathbf{p} \circ \mathbf{q}^{-1}. \quad (4)$$

Обратное преобразование может быть выполнено по формуле:

$${}_y\mathbf{p} = \mathbf{q}^{-1} \circ {}_x\mathbf{p} \circ \mathbf{q}. \quad (5)$$

Решение задачи, сформулированной в предыдущем разделе, получается в результате решения системы из двух кватернионных дифференциальных уравнений [1], [5], называемых кинематическими уравнениями движения твердого тела (сечения) в пространстве:

$$\frac{d{}_x\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{q}(t) \circ {}_{y(t)}\mathbf{v} \circ \mathbf{q}^{-1}(t); \quad \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{q}(t) \circ {}_{y(t)}\boldsymbol{\omega}(t). \quad (6)$$

Если принять $v = 1$ м/сек, то параметр t будет численно равен дуговой координате s , измеренной вдоль оси стержня.

Полученная по этой методике форма стержня с заданным поперечным сечением полностью определяется одной кватернионной функцией ${}_{y(t)}\boldsymbol{\omega}(t)$ или четырьмя скалярными функциями $\omega_0(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$, зависящими от одного параметра t .

Примеры криволинейных стержней. Если функции $\omega_0(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$ являются константами, ось стержня представляет собой винтовую линию. На рис. 6 показаны криволинейные стержни квадратного поперечного сечения. Все они построены для линейной скорости передвижения вдоль оси стержня $v = 1$ м/с. Начало оси стержня соответствует сечению, от которого стержень опускается вертикально вниз. Кватернионы угловых скоростей приведены в формулах (7). Здесь и далее размерность угловых скоростей рад/сек.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_a &= \left[0, -\frac{1}{25}, \frac{1}{2}, 0 \right]; \quad \boldsymbol{\omega}_b = \left[0, \frac{1}{25}, \frac{1}{2}, 0 \right]; \\ \boldsymbol{\omega}_c &= \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{2}, 0 \right]; \quad \boldsymbol{\omega}_d = \left[0, \frac{1}{25}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что любая упорядоченная четверка чисел (с номерами 0, 1, 2, 3), истолкованная как кватернион угловых скоростей, определяет примитивный криволинейный стержень. Компонент 1 характеризует кручение оси

стержня. Положительный компонент означает, что ось стержня представляет собой правый винт (рис. 6 б, в, з), отрицательный – соответствует левому винту (рис. 6 а). Компоненты 2 и 3 характеризуют искривление оси.

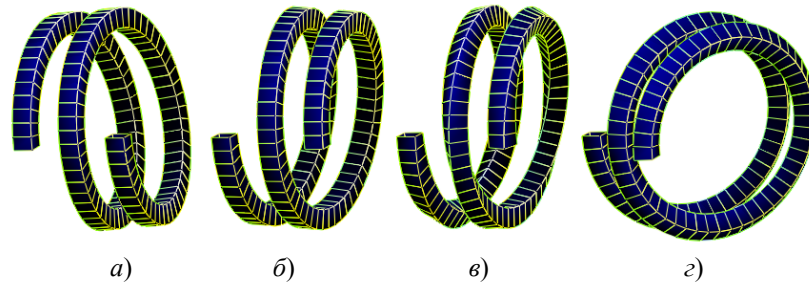


Рис. 6. Стержни с осью в виде винтовой линии:
а) – левый винт; б) – правый винт; в) – с дополнительным кручением;
з) – с кривизной в двух направлениях.

Пользуясь идеей Мебиуса, можно создать целую гамму скрученных стержней. На рис. 7 показаны примеры кольцевых стержней квадратного сечения, скрученных по-разному. Кватернионы угловых скоростей для каждого примера приведены в формулах (8).

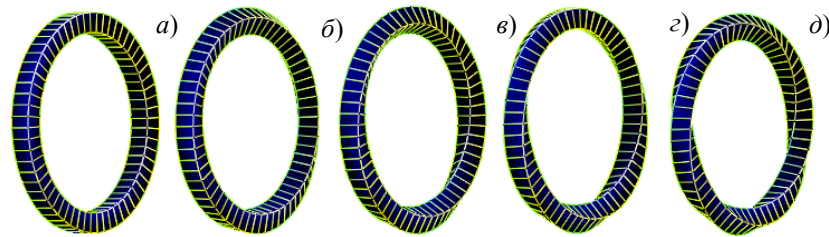


Рис. 7. Кольцевые скрученные стержни квадратного сечения

$$\begin{aligned} \omega_a &= \left[0, 0, \frac{1}{2}, 0 \right]; \quad \omega_b = \left[\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{2}, 0 \right]; \quad \omega_c = \left[\frac{2}{8}, 0, \frac{1}{2}, 0 \right]; \\ \omega_d &= \left[\frac{3}{8}, 0, \frac{1}{2}, 0 \right]; \quad \omega_e = \left[\frac{4}{8}, 0, \frac{1}{2}, 0 \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Целый класс криволинейных стержней можно создать с использованием периодических функций. На рис. 8 приведены примеры плоских криволинейных стержней с использованием периодических функций. Кватернионы угловых скоростей для каждого примера приведены в формулах (9).

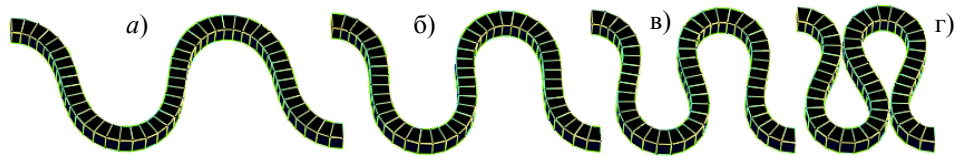


Рис. 8. Криволинейные стержни с использованием периодических функций

$$\begin{aligned} \omega_a &= [0, 0, 0, 1.4 \cdot \cos t]; & \omega_b &= [0, 0, 0, 1.6 \cdot \cos t]; \\ \omega_c &= [0, 0, 0, 1.8 \cdot \cos t]; & \omega_d &= [0, 0, 0, 2 \cdot \cos t]. \end{aligned} \quad (9)$$

Из рисунка видно, как сжимаются зигзаги оси стержня при увеличении коэффициента при периодической функции $\cos t$.

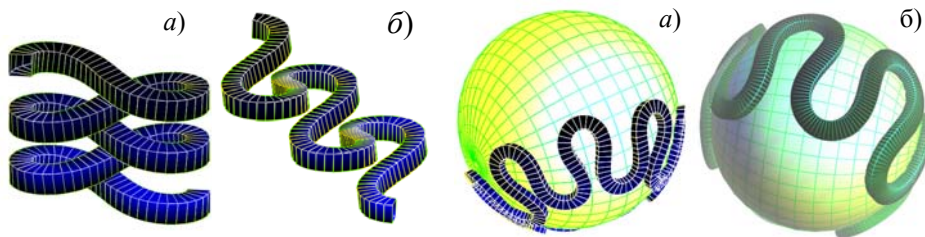


Рис. 9. Пространственные криволинейные стержни: пандусы и серпантины

Рис. 10. Стержни с осью, лежащей на поверхности сферы

Представляя компоненты кватерниона угловых скоростей периодическими функциями, можно образовать различные виды криволинейных стержней. На рис. 9 приведены примеры таких стержней. Кватернионы угловых скоростей для этих примеров:

$$\begin{aligned} \omega_a &= [0, 0.3 \cdot \text{sign}(\cos t), 0, 2.4 \cdot \cos t]; \\ \omega_b &= [0, 0.3 \cdot \cos t, 0, 2.1 \cdot \cos t]. \end{aligned}$$

Если в кватернионе ω задать $\omega_1 = 0$; $\omega_2 = v/R$, то ось стержня будет лежать на сфере радиуса R . Форма этого стержня определится компонентами ω_0 и ω_3 . Примеры таких стержней приведены на рис. 10. Кватернионы угловых скоростей для этих примеров:

$$\begin{aligned} \omega_a &= [0, 0, 0.2, 1.2 \cdot \sin(0.692 \cdot t) + 0.05]; \\ \omega_b &= [0, 0, 0.2, 1.2 \cdot \sin(0.692 \cdot t)]. \end{aligned}$$

Тонкостенные стержни из листовых заготовок. Общий случай. Будем условно полагать, что исходным материалом для изготовления тонкостенных стержней является металлический лист. Криволинейные стержни проще всего изготавливать из заготовок, выкраивая их из плоского листа, искривляя и соединя между собой продольными швами. Почти все примеры, приведенные выше, представляют собой стержни такого типа.

Прежде чем соединить между собой заготовки, им надо придать криволинейную форму. Будем считать, что нам очень повезло, если нужную форму удастся получить только за счет изгиба листовых заготовок. При этом срединная поверхность не испытывает растяжений, сжатий или перекосов. В общем же случае листовую заготовку надо не только изгибать, но и скручивать. Это невозможно сделать без деформации срединной поверхности заготовки, поскольку срединная поверхность при скручивании полосы деформируется.

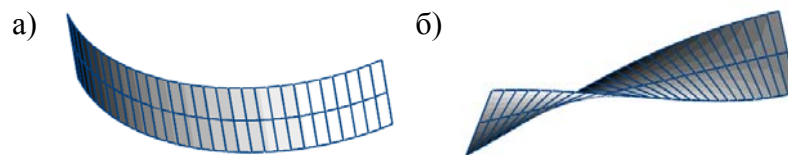


Рис. 11. Деформация прямолинейной заготовки:
а) изгибанием; б) скручиванием

На рис. 11 показаны два вида деформации прямолинейной плоской заготовки. Вид а) соответствует изгибанию, когда прямолинейная полоса приобретает цилиндрическую форму. Вид б) соответствует скручиванию полосы. Из рисунка видно, что в этом случае продольные волокна по краям полосы длиннее, чем в ее середине.

Для того, чтобы разобраться в том, когда мы имеем дело с чистым изгибом, а когда со скручиванием полосы, обратимся к дифференциальной геометрии [4], которая изучает проблему изгиба поверхностей, и рассмотрим более подробно одну из полос тонкостенного стержня (рис. 12).

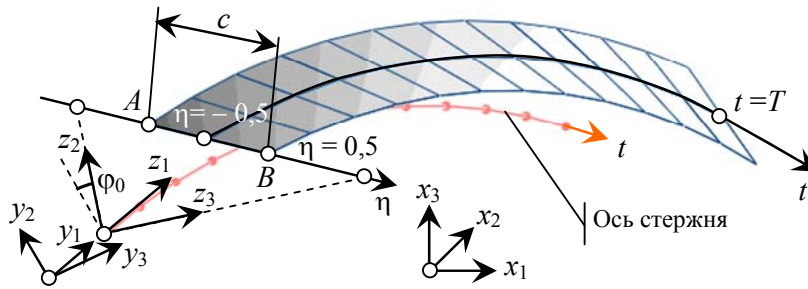


Рис. 12. Геометрия одной из граней тонкостенного стержня

Ее можно считать следом от движения ориентированного отрезка прямой, жестко связанного с подвижной системой координат z_1, z_2, z_3 и лежащего в координатной плоскости z_2, z_3 . Будем полагать, что отрезок задан параметрически с использованием безразмерного параметра η , который меняется в пределах $[-0,5; 0,5]$. Координаты начала этого отрезка, обозначенного на рисунке буквой A , $z_1 = 0; z_2 = a_2, z_3 = a_3$, а координаты его конца, обозначенного на рисунке буквой B , $z_1 = 0; z_2 = b_2, z_3 = b_3$. Координаты произвольной точки этого отрезка в зависимости от значения параметра η могут быть вычислены по формулам:

$$z_1 = 0; \quad z_2 = a_2 + (b_2 - a_2) \cdot \eta; \quad z_3 = a_3 + (b_3 - a_3) \cdot \eta. \quad (10)$$

Легко сообразить, что ширина рассматриваемой полосы в сечении, нормальном оси стержня, равна длине этого отрезка

$$c = \sqrt{(b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \quad (11)$$

Рассмотрим еще одну декартову систему координат u_1, u_2, u_3 (рис. 13). Эта система координат связана с рассматриваемой полосой тонкостенного стержня. Ось u_1 направлена вдоль оси стержня и совпадает с осью z_1 . Ось u_3 направлена параллельно отрезку, образующему полосу стержня, в сторону увеличения параметра η . Ось u_2 , образует с осями u_1 и u_3 правую тройку.

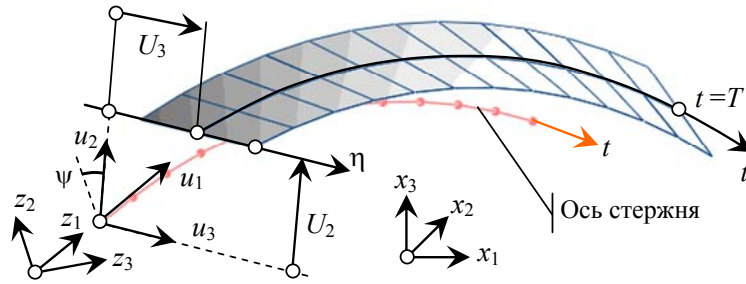


Рис. 13. Введение координатной системы u_1, u_2, u_3

Система координат u_1, u_2, u_3 по отношению к системе координат z_1, z_2, z_3 повернута на угол ψ вокруг оси z_1 , а по отношению к системе координат y_1, y_2, y_3 на угол $\ln \|\mathbf{q}\| + \psi$ вокруг оси y_1 . $\ln \|\mathbf{q}\| = \varphi_0$, как следует из формул (2). Из геометрических соображений вытекает:

$$\cos \psi = \frac{b_3 - a_3}{c}; \quad \sin \psi = -\frac{b_2 - a_2}{c}. \quad (12)$$

Угловые скорости в этой системе координат выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \omega_0 &= \mathbf{y} \omega_0; & \mathbf{u} \omega_1 &= \mathbf{y} \omega_1; \\ \mathbf{u} \omega_2 &= \mathbf{y} \omega_2 \cdot \cos(\ln \|\mathbf{q}\| + \psi) + \mathbf{y} \omega_3 \cdot \sin(\ln \|\mathbf{q}\| + \psi); \\ \mathbf{u} \omega_3 &= -\mathbf{y} \omega_2 \cdot \sin(\ln \|\mathbf{q}\| + \psi) + \mathbf{y} \omega_3 \cdot \cos(\ln \|\mathbf{q}\| + \psi). \end{aligned} \quad (13)$$

Раскрывая две последние зависимости (13) с использованием формул (12), получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \omega_2 &= \left(\mathbf{y} \omega_2 \cdot \frac{b_3 - a_3}{c} - \mathbf{y} \omega_3 \cdot \frac{b_2 - a_2}{c} \right) \cdot \cos \ln \|\mathbf{q}\| + \\ &+ \left(\mathbf{y} \omega_2 \cdot \frac{b_2 - a_2}{c} + \mathbf{y} \omega_3 \cdot \frac{b_3 - a_3}{c} \right) \cdot \sin \ln \|\mathbf{q}\|; \\ \mathbf{u} \omega_3 &= -\left(\mathbf{y} \omega_2 \cdot \frac{b_3 - a_3}{c} + \mathbf{y} \omega_3 \cdot \frac{b_2 - a_2}{c} \right) \cdot \sin \ln \|\mathbf{q}\| + \\ &+ \left(\mathbf{y} \omega_2 \cdot \frac{b_2 - a_2}{c} + \mathbf{y} \omega_3 \cdot \frac{b_3 - a_3}{c} \right) \cdot \cos \ln \|\mathbf{q}\|. \end{aligned} \quad (14)$$

Координаты середины отрезка, образующего полосу, в системе координат u_1, u_2, u_3 таковы:

$$\begin{aligned} U_2 &= a_2 \cdot \cos \psi + a_3 \cdot \sin \psi = \frac{a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2}{c}; \\ U_3 &= -a_2 \cdot \sin \psi + a_3 \cdot \cos \psi = \frac{b_2^2 - a_2^2 + b_3^2 - a_3^2}{2 \cdot c}. \end{aligned} \quad (15)$$

Выполняя соответствующие алгебраические преобразования, получим коэффициенты первой квадратичной формы поверхности.

$$\begin{aligned} E(t, \eta) &= [U_2^2 + (U_3 + c \cdot \eta)^2] \cdot [\omega_0(t) + \omega_1(t)]^2 + \\ &+ [v(t) + (U_3 + c \cdot \eta) \cdot \omega_2(t) - U_2 \cdot \omega_3(t)]^2; \\ F(t) &= c \cdot U_2 \cdot [\omega_0(t) + \omega_1(t)]; \quad G = c^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Гауссову кривизну поверхности полосы через коэффициенты первой квадратичной формы и их первые и вторые производные [4] можно вычислить по формуле Brioschi:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \cdot \partial \eta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial t} & E & F \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial \eta} & F & G \end{vmatrix}}{(E \cdot G - F^2)^2} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial \eta} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial t} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial \eta} & E & F \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial t} & F & G \end{vmatrix} \quad (17)$$

Для нашего конкретного случая формула (17) упрощается:

$$K = \frac{1}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} \cdot \left[\frac{G}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} \right]. \quad (18)$$

При этом

$$E \cdot G - F^2 = c^2 \cdot \left\{ (U_3 + c \cdot \eta)^2 \cdot [\omega_0(t) + \omega_1(t)]^2 + \right. \\ \left. + [v(t) + (U_3 + c \cdot \eta) \cdot \omega_2(t) - U_2 \cdot \omega_3(t)]^2 \right\}. \quad (19)$$

Выражения для производных коэффициента E выглядят так:

$$\frac{\partial E(t, \eta)}{\partial \eta} = 2 \cdot c \cdot \left\{ (U_3 + c \cdot \eta) \cdot [\omega_0(t) + \omega_1(t)]^2 + \right. \\ \left. + \omega_2(t) \cdot [v(t) + (U_3 + c \cdot \eta) \cdot \omega_2(t) - U_2 \cdot \omega_3(t)] \right\}; \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 E(t, \eta)}{\partial \eta^2} = 2 \cdot c^2 \cdot \left\{ \left[\omega_0(t) + \omega_1(t) \right]^2 + \omega_2^2(t) \right\}. \quad (21)$$

По значению гауссовой кривизны K , вычисляемому для рассматриваемой полосы по формуле (18), можно узнать, развертывается ли на плоскость эта полоса. Если $K = 0$ во всех точках этой полосы ($0 \leq t \leq T$; $-0,5 \leq \eta \leq 0,5$), полоса разворачивается на плоскость, в противном случае – нет.

Тонкостенные стержни с разворачиваемыми гранями. Рассмотрим частный случай криволинейного стержня, когда соблюдается равенство:

$$\omega_0(t) + \omega_1(t) = 0. \quad (22)$$

Анализируя формулу (18), можно убедиться в том, что при соблюдении равенства (22) гауссова кривизна в любой точке полосы, входящей в состав стержня, будет равна нулю. Это означает, что все полосы такого криволинейного стержня можно получить из плоских листовых заготовок путем их изгибания.

Напомним, что форма оси стержня зависит от линейной скорости $v(t)$ и от компонентов векторной части кватерниона угловых скоростей $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$. Эти четыре функции времени полностью определяют форму оси стержня. Скалярная часть кватерниона угловых скоростей $\omega_0(t)$ на форму оси стержня не влияет и ею можно распоряжаться произвольно. Принимая

$$\omega_0(t) = -\omega_1(t), \quad (23)$$

получим криволинейный стержень с выбранной заранее формой оси и разворачиваемыми на плоскость полосами. Это важная практическая рекомендация для формообразования криволинейных тонкостенных стержней.

Построение разверток. Рассмотрим, как можно развернуть на плоскость полосу тонкостенного стержня. Как было указано выше, эта задача выполнима лишь для частного случая, описанного в предыдущем разделе. Приблизительно это можно выполнить для общего случая. При этом понятно, что чем уже полоса тонкостенного стержня, тем меньше надо деформировать срединную поверхность этой полосы для того, чтобы распрямить и выложить на плоскость. Будем полагать, что бесконечно узкая криволинейная полоса может быть развернута на плоскость без деформирования срединной поверхности.

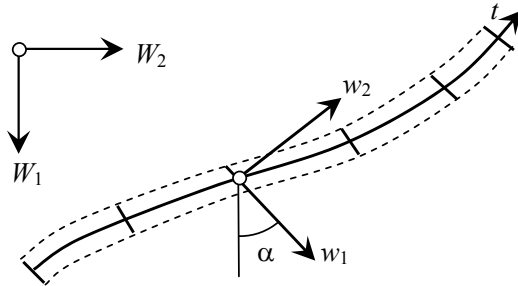


Рис. 14. Развертка узкой криволинейной полоски

На плоскости развертки введем в рассмотрение две декартовы координатные системы (рис. 14): неподвижную W_1, W_2 , и подвижную w_1, w_2 , являющуюся функцией параметра t . Подвижная система связана с разворачиваемой полосой так, что ось w_1 направлена вдоль прямой образующей с координатой η , а ось w_2 перпендикулярно ей в сторону увеличения координаты t . Угол, на который повернута подвижная система относительно неподвижной (положительное направление – против часовой стрелки) обозначим α . Он является функцией t . Связь между координатными системами выражается формулами:

$$W_1 = w_1 \cdot \cos \alpha - w_2 \cdot \sin \alpha; \quad W_2 = w_1 \cdot \sin \alpha + w_2 \cdot \cos \alpha. \quad (24)$$

Будем полагать, что, кроме этого, известны:

- $v\alpha(t)$ – скорость изменения угла α ;
- $vw_1(t)$ – скорость изменения координаты w_1 в подвижной системе координат;
- $vw_2(t)$ – скорость изменения координаты w_2 в подвижной системе координат.

Развертка полоски будет полностью определена, если для каждого значения параметра t будут известны координаты W_1, W_2 , центральной линии развертки и угол α , на который повернута подвижная система координат относительно неподвижной. Запишем дифференциальные уравнения для этих переменных.

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha(t)}{dt} &= v\alpha(t); & \frac{dW_1(t)}{dt} &= vw_1(t) \cdot \cos \alpha(t) - vw_2(t) \cdot \sin \alpha(t); \\ \frac{dW_2(t)}{dt} &= vw_1(t) \cdot \sin \alpha(t) + vw_2(t) \cdot \cos \alpha(t). \end{aligned} \quad (25)$$

Для полоски, находящейся в окрестности срединной линии рассматриваемой грани, можно записать формулы для скоростей изменения искомых переменных, пользуясь рис. 13:

$$\begin{aligned}v\alpha(t) &= \mathbf{u}\omega_2(t); \quad v\omega_1(t) = U_2 \cdot [\mathbf{u}\omega_0(t) + \mathbf{u}\omega_1(t)]; \\v\omega_2(t) &= v(t) + U_3 \cdot \mathbf{u}\omega_2(t) - U_2 \cdot \mathbf{u}\omega_3(t).\end{aligned}\tag{26}$$

При этом компоненты кватерниона $\mathbf{u}\omega(t)$ вычисляются по формулам (14).

Если задать начальные значения $\alpha(0)$, $W_1(0)$ и $W_2(0)$, можно будет проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (25) по методу Рунге – Кутты и по найденным функциям $W_1(t)$, $W_2(t)$ построить центральную линию полоски. Угол $\alpha(t)$ позволяет сделать эту полосу двухмерной, добавив вторую координату η . В результате получим параметрическое представление полоски, развернутой на плоскости W_1 , W_2 .

$$W_1(t, \eta) = W_1(t) + c \cdot \eta \cdot \cos \alpha; \quad W_2(t, \eta) = W_2(t) + c \cdot \eta \cdot \sin \alpha.\tag{27}$$

Будем полагать, что параметр η изменяется в пределах $-\varepsilon < \eta < \varepsilon$, где ε – малая величина.

Заметим, что в частном случае, когда выполняется формула (22), то есть, когда полоса стержня развертывается, при помощи системы дифференциальных уравнений (25) можно построить развертку всей полосы стержня. При этом боковые линии развертки получаются при значениях $\eta = \pm 0,5$. Торцевые линии развертки получаются при $t = 0$ и $t = T$. Линиямигиба являются координатные линии $t = \text{const}$. Эти линии перпендикулярны срединной линии и боковым линиям развертки.

Изгибание скрученной полосы на поверхность катеноида. В том случае, когда полоса не может быть развернута на плоскость, она может быть выложена на некоторую криволинейную поверхность с плотным прилеганием к ней. Это свойство не только любопытно, но в отдельных случаях имеет практическое значение.

Рассмотрим полосу тонкостенного стержня, получающуюся при $\mathbf{u}\omega_1 = \mathbf{u}\omega_2 = \mathbf{u}\omega_3 = U_1 = U_2 = 0$ (рис. 14 а). Будем полагать, $\omega_0(t) = \text{const}$, $v(t) = \text{const}$. В результате мы получим прямолинейную скрученную полосу, уравнение которой, записанное через параметры t и η , выглядит так:

$$x_1(t, \eta) = c \cdot \eta \cdot \sin(\omega_0 \cdot t); \quad x_2(t) = v \cdot t; \quad x_3(t, \eta) = c \cdot \eta \cdot \cos(\omega_0 \cdot t),\tag{28}$$

где c – ширина полосы, а η – безразмерный параметр, изменяющийся в пределах $-0,5 \leq \eta \leq 0,5$. Коэффициенты первой квадратичной формы для этой поверхности, полученные как частный случай формул (16), таковы:

$$E(\eta) = v^2 + (\omega_0 \cdot c \cdot \eta)^2; \quad F = 0; \quad G = c^2. \quad (29)$$

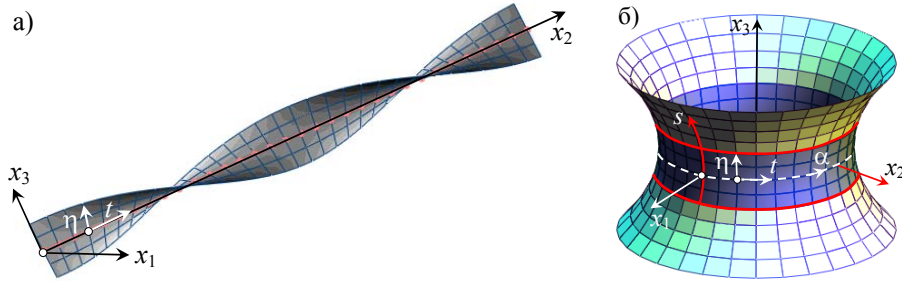


Рис. 15. Укладка скрученной полосы на поверхность катеноида

Длину полосы l выберем такой, чтобы поперечное сечение этой полосы (прямолинейный отрезок длиной c) совершало на этой длине один полный поворот. Это случится, если временной параметр t будет изменяться в пределах $0 \leq t \leq T$, причем

$$T = 2 \cdot \pi / \omega_0. \quad (30)$$

Длина полосы окажется при этом равной

$$l = 2 \cdot \pi \cdot v / \omega_0. \quad (31)$$

Поверхность, форму которой имеет скрученная полоса, называется геликоидом. Эта поверхность относится к классу минимальных, то есть, ее площадь является минимальной среди всех поверхностей, натянутых на данный контур. Кстати, это единственная минимальная поверхность, имеющая прямолинейные образующие. Физической реализацией минимальной поверхности является мыльная пленка.

Покажем, что скрученная полоса укладывается на поверхности катеноида в виде пояса шириной c (по криволинейной образующей). Катеноид – это поверхность, образованная вращением цепной линии вокруг ее оси абсцисс (рис. 14 б). Уравнение катеноида в параметрическом виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x_1(\alpha, s) &= a \cdot \sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}} \cdot \cos \alpha; & x_2(\alpha, s) &= a \cdot \sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}} \cdot \sin \alpha; \\
 x_3(s) &= a \cdot \operatorname{Arsh} \frac{s}{a},
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

где α – угол, отсчитываемый вдоль экватора от оси x_1 в направлении оси x_2 ; s – дуговая координата, отсчитываемая от экватора вдоль меридиана в направлении увеличения координаты x_3 ; a – произвольная постоянная с размерностью длины.

Для решения нашей задачи надо перейти от параметров α, s к параметрам t, η и определить произвольную постоянную a . Для этого годятся зависимости:

$$\alpha = \omega_0 \cdot t; \quad s = c \cdot \eta; \quad a = v / \omega_0. \tag{33}$$

Если ввести обозначение:

$$\sigma = \omega_0 \cdot c / v, \tag{34}$$

уравнение катеноида в новых параметрах будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}
 x_1(t, \eta) &= \frac{v}{\omega_0} \cdot \sqrt{1 + (\sigma \cdot \eta)^2} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t); \\
 x_2(t, \eta) &= \frac{v}{\omega_0} \cdot \sqrt{1 + (\sigma \cdot \eta)^2} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t); & x_3(t, \eta) &= \frac{v}{\omega_0} \cdot \operatorname{Arsh}(\sigma \cdot \eta).
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Дифференцируя равенства (35) по t и по η , получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_1(t, \eta)}{\partial t} &= -v \cdot \sqrt{1 + (\sigma \cdot \eta)^2} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t); & \frac{\partial x_1(t, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{c \cdot \sigma \cdot \eta}{\sqrt{1 + (\sigma \cdot \eta)^2}} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t); \\
 \frac{\partial x_2(t, \eta)}{\partial t} &= v \cdot \sqrt{1 + (\sigma \cdot \eta)^2} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t); & \frac{\partial x_2(t, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{c \cdot \sigma \cdot \eta}{\sqrt{1 + (\sigma \cdot \eta)^2}} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t); \\
 \frac{\partial x_3(t, \eta)}{\partial t} &= 0. & \frac{\partial x_3(t, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{c}{\sqrt{1 + (\sigma \cdot \eta)^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

Пользуясь этими зависимостями, вычислим коэффициенты первой квадратичной формы:

$$E(t, \eta) = v^2 \cdot [1 + (\sigma \cdot \eta)^2] = v^2 + (\omega_0 \cdot c \cdot \eta)^2; \quad F(t, \eta) = 0; \quad G(t, \eta) = c^2. \tag{37}$$

Сравнивая формулы (29) с формулами (37), замечаем, что коэффициенты первых квадратичных форм для обеих поверхностей совпадают. Таким образом, эти поверхности могут быть совмещены путем изгиба.

Изгибание криволинейной полосы на поверхность гиперболоида вращения. Рассмотрим частный случай криволинейного стержня, для которого $\omega_0 = 0$; а $\nu, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ – константы. Такие стержни являются стержнями без дополнительного кручения. Их ось представляет собой винтовую линию. Примеры таких стержней показаны на рис. 6 а), б), г). Покажем, что любой полосе такого стержня можно придать форму поверхности вращения путем ее изгиба.

Пусть положение рассматриваемой полосы определено так, как это сделано на рис. 13. Коэффициенты первой квадратичной формы для этой полосы в этом случае в соответствии с формулами (16) будут иметь вид:

$$E(\eta) = [U_2^2 + L_3^2(\eta)] \cdot \omega_1^2 + [\nu + L_3(\eta) \cdot \omega_2 - U_2 \cdot \omega_3]^2; \quad (38)$$
$$F = c \cdot U_2 \cdot \omega_1; G = c^2,$$

где

$$L_3(\eta) = U_3 + c \cdot \eta. \quad (39)$$

Поверхность вращения будем искать в координатной системе x_1, x_2, x_3 в зависимости от параметров t и η рассматриваемой полосы в следующем виде:

$$x_1(t, \eta) = f_1(\eta) \cdot \cos(\beta \cdot t) - f_2(\eta) \cdot \sin(\beta \cdot t); x_2(t, \eta) =$$
$$= f_1(\eta) \cdot \sin(\beta \cdot t) + f_2(\eta) \cdot \cos(\beta \cdot t); x_3(\eta) = f_3(\eta); \quad (40)$$

где $f_1(\eta), f_2(\eta), f_3(\eta)$ – неизвестные функции параметра η ; β – неизвестная константа.

Коэффициенты первой квадратичной формы для этой поверхности выражаются формулами:

$$E(\eta) = \beta^2 \cdot [f_1^2(\eta) + f_2^2(\eta)];$$
$$F(\eta) = \beta \cdot [f_1(\eta) \cdot f_2'(\eta) - f_2(\eta) \cdot f_1'(\eta)]; \quad (41)$$
$$G(\eta) = f_1'^2(\eta) + f_2'^2(\eta) + f_3'^2(\eta).$$

Приравнивая коэффициенты первой квадратичной формы для полосы криволинейного стержня и полосы поверхности вращения, получим систему уравнений для определения функций $f_1(\eta), f_2(\eta), f_3(\eta)$, содержащую одно алгебраическое уравнение и два дифференциальных уравнения первого порядка.

$$\begin{aligned} \beta^2 \cdot [f_1^2(\eta) + f_2^2(\eta)] &= [U_2^2 + L_3^2(\eta)] \cdot \omega_1^2 + [v + L_3(\eta) \cdot \omega_2 - U_2 \cdot \omega_3]^2; \\ \beta \cdot [f_1(\eta) \cdot f_2'(\eta) - f_2(\eta) \cdot f_1'(\eta)] &= c \cdot U_2 \cdot \omega_1; \\ f_1'^2(\eta) + f_2'^2(\eta) + f_3'^2(\eta) &= c^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Константа β может быть выбрана произвольно. Это означает, что полосу можно свернуть в рулон, причем диаметр этого рулона может плавно варьироваться (в определенных пределах). Каждому значению β будет соответствовать некоторая поверхность вращения. К сожалению, записать уравнение этой поверхности в замкнутом виде для произвольного β не удастся. Однако если взять конкретное значение

$$\beta = \beta_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \gamma^2}; \quad \gamma = \frac{v}{U_2} - \omega_3, \quad (43)$$

то одно из частных решений системы уравнений (42) можно будет записать в следующем виде:

$$f_1 = \frac{\omega_1 \cdot U_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}; \quad f_2(\eta) = \frac{L(\eta) \cdot \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\beta_0}; \quad f_3(\eta) = \frac{L(\eta) \cdot \gamma}{\beta_0}, \quad (44)$$

где

$$L(\eta) = L_3(\eta) + \frac{\gamma \cdot \omega_2 \cdot U_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} = U_3 + c \cdot \eta + \frac{(v - U_2 \cdot \omega_3) \cdot \omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \quad (45)$$

Подставляя зависимости (43) в формулы (40), получим уравнения поверхности вращения, выраженные в параметрической форме через параметры t и η . Нетрудно заметить, что эта поверхность представляет собой однополостный гиперболоид вращения, показанный на рис. 16. Эта поверхность имеет прямолинейные образующие. При этом координатные линии $t = \text{const}$ расположены на этих образующих. Образующая $t = 0$ определяется уравнениями:

$$x_1 = \frac{\omega_1 \cdot U_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}; \quad x_2(\eta) = \frac{L(\eta) \cdot \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\beta_0}; \quad x_3(\eta) = \frac{L(\eta) \cdot \gamma}{\beta_0}. \quad (46)$$

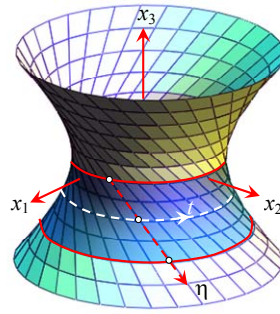


Рис. 16. Изгибание полосы на поверхность однополостного гиперboloида вращения

Горловина этого однополостного гиперboloида вращения имеет радиус:

$$r_{\min} = \frac{u \omega_1 \cdot U_2}{\sqrt{u \omega_1^2 + u \omega_2^2}}. \quad (47)$$

Квадрат радиуса окружности, соответствующей значению параметра η :

$$r^2(\eta) = \frac{u \omega_1^2 \cdot U_2^2}{u \omega_1^2 + u \omega_2^2} + \frac{L^2(\eta) \cdot (u \omega_1^2 + u \omega_2^2)}{\beta_0}. \quad (48)$$

Один виток полосы на поверхности гиперboloида соответствует изменению параметра t на величину:

$$\Delta t = 2 \cdot \pi / \beta_0. \quad (49)$$

Следует отметить, что для полос, расположенных близко к оси стержня ($U_2 \rightarrow 0$), принцип изгибания полосы криволинейного стержня на поверхность однополостного гиперboloида вращения утрачивает практическое значение, поскольку гиперboloид становится узким и радиусы изгибания полосы становятся сравнимыми с ее толщиной.

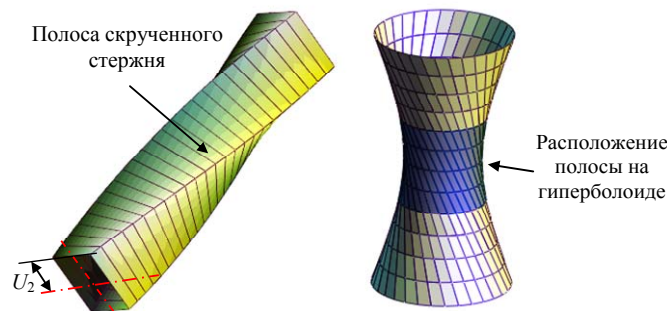


Рис. 17. Изгибание полосы скрученного стержня в частном случае

Частный случай. Полоса скрученного прямолинейного стержня при произвольных c , v , U_2 , ${}_u\omega_1$ и нулевых U_3 , ${}_u\omega_2$, ${}_u\omega_3$. путем ее изгибания укладывается на поверхность однополостного гиперboloида вращения с радиусом горловины $r_{\min} = U_2$ (рис. 17). Прямолинейная образующая этого гиперboloида определяется уравнениями:

$$x_1 = U_2; \quad x_2(\eta) = \frac{c \cdot \eta \cdot {}_u\omega_1 \cdot U_2}{\sqrt{v^2 + {}_u\omega_1^2 \cdot U_2^2}}; \quad x_3(\eta) = \frac{c \cdot \eta \cdot v}{\sqrt{v^2 + {}_u\omega_1^2 \cdot U_2^2}}. \quad (50)$$

Один виток полосы на поверхности гиперboloида соответствует изменению параметра t на величину:

$$\Delta t = \frac{2 \cdot \pi \cdot U_2}{\sqrt{v^2 + {}_u\omega_1^2 \cdot U_2^2}}. \quad (51)$$

Рассмотренные выше задачи об изгибании криволинейной полосы на поверхность вращения имеют следующий практический смысл. Придать полосе, вырезанной из плоского листа, вид скрученного листа довольно сложно. Однако возможен следующий трехэтапный процесс достижения этой цели. Вначале полосу листового материала путем изгибания превращают в жолоб. Затем этот жолоб вальцуют с получением поверхности вращения. И уже после этого поверхность вращения путем изгибания превращают в скрученный лист, готовый для сборки тонкостенного стержня.

Выводы

1. Для описания геометрии криволинейного стержня достаточно одной кватернионной функции $\omega(t)$ от параметра t . Компоненты кватерниона $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ определяют ось стержня, компонент $\omega_0(t)$ – ориентацию сечения относительно оси.
2. Если кватернионная функция $\omega(t)$ – константа, ось стержня имеет форму спирали. Если при этом $\omega_1 = 0$, спираль вырождается в окружность.
3. Если для кватернионной функции $\omega(t)$ задать $\omega_1 = 0$; $\omega_2 = 1/R$, ось стержня будет лежать на сфере радиуса R . Форма этого стержня определится компонентами $\omega_0(t)$ и $\omega_3(t)$.
4. Тонкостенные элементы (полосы) криволинейного стержня в общем случае являются неразворачиваемыми, то есть не выкладываются на плоскость путем изгибания. Однако они выкладываются на поверхность отрицательной гауссовой кривизны. Прямолинейная скрученная полоса выкладывается на поверхность катеноида. Полоса прямолинейного скрученного стержня выкладывается на поверхность однополостного гиперboloида вращения.

5. Существует класс криволинейных стержней со всеми разворачиваемыми полосами. Признаком этого класса является равенство: $\omega_0(t) + \omega_1(t) = 0$.
6. Любой криволинейный стержень с неразворачиваемыми полосами может быть превращен в стержень с разворачиваемыми полосами путем замены нулевого компонента кватерниона $\omega(t)$ в соответствии с формулой: $\omega_0(t) = -\omega_1(t)$. При этом изменяется только ориентация сечений относительно оси стержня, а сама ось сохраняется.
7. Для изготовления стержней с неразворачиваемыми полосами может быть применен трехэтапный процесс. Вначале полоса листового материала путем изгибания превращается в жолоб. Затем этот жолоб вальцуют с получением поверхности, на которую полоса может быть выложена без деформации срединной поверхности. После этого полоса, имеющая форму поверхности отрицательной гауссовой кривизны, путем изгибания превращается в скрученную полосу, готовую для сборки тонкостенного стержня.

Литература

- [1] Бранец В. Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. – Москва : Наука, 1973. – 320 с.
- [2] Гордеев В. Н. Кватернионы и трехмерная геометрия / В. Н. Гордеев. – Электрон. данные. – Киев, 2012. – 60 с. – Режим доступа : <http://www.techlibrary.ru> ; <http://karataev.nm.ru/vgordeev/quatvgordeev.pdf>. – Загл. с экрана.
- [3] Готман А. Ш. Проектирование обводов судов с разворачивающейся обшивкой / А. Ш. Готман – Ленинград : Судостроение, 1979. – 192 с.
- [4] Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. – Москва-Ленинград : Гостехтеориздат, 1950. – 428 с.
- [5] Гордеев В. Формоутворення стержнів з просторовою криволінійною віссю / В. Гордеев, І. Годзинський // Современные строительные конструкции из металла и древесины : сборник научных трудов / Одесская государственная академия строительства и архитектуры. – 2010. – № 14, ч. 2. – С. 80–85.
- [6] Godzinskyi I. The application of quaternions to problems of morphology of curvilinear bars / I. Godzinskyi, V. Gordeiev // 7-th International Conference on Computational Mechanics for Spatial Structures : book of abstracts. – Sarajevo, 2012. – P. 116–119.

Надійшла до редколегії 13.10.2014 р.