

УДК 624.042

## Расчетные сочетания нагрузок для проверки надежности конструкций (обзор)

<sup>1</sup>Перельмутер А.В., д.т.н., <sup>2</sup>Пичугин С.Ф., д.т.н.

<sup>1</sup>ООО НПО SCAD Soft, Украина

<sup>2</sup>Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка,  
Украина

**Анотація.** Розглядається історія становлення і розвитку підходів щодо визначення розрахункових сполучень навантажень для перевірки надійності будівельних конструкцій. Вказано на паралельність досліджень вітчизняних і закордонних фахівців. Надаються відомості про нормування цієї проблеми та про роботи, що стали основою норм проектування.

**Аннотация.** Рассматривается история становления и развития подходов к выбору расчетных сочетаний нагрузок для проверки надежности строительных конструкций. Указывается на параллелизм исследований отечественных и зарубежных ученых. Приводятся данные о нормировании этой проблемы и о работах, ставших основой норм проектирования.

**Abstract.** The history of formation and development of approaches to a choice of settlement combinations of loadings for check of reliability of building designs is considered. Parallelism is underlined in researches of domestic and foreign scientists. Data about rationing of this problem and about the works which have become a basis for norms of designing are cited.

**Ключевые слова:** нагрузка, надежность, расчетная комбинация, нормы проектирования.

**Введение.** В реальных условиях практически не встречаются конструкции, подверженные действию только одной нагрузки, и этот факт обязательно должен быть учтен в любом варианте анализа. Он же порождает проблему выбора расчетного сочетания нагрузок, одну из центральных в проверках надежности сооружений. Так или иначе, эта проблема решалась различными исследователями, и задачей настоящего обзора является рассмотрение этих подходов к решению задачи о выборе расчетной комбинации нагрузок. Именно так, по традиции, проблема рассматривалась и продолжает рассматриваться, хотя более правильно было бы говорить о расчетной комбинации внутренних усилий, напряжений и т. п.

Ведь расчетная комбинация нагрузок или же расчетная комбинация внутренних реакций системы (усилий, напряжений, перемещений) – разные ситуации, их вероятности могут отличаться на несколько порядков. Например, для крановой нагрузки:

- локальное давление в стенке подкрановой балки реализуется от действия одного крана – вероятность равна вероятности реализации максимального давления колеса;
- расчетная нагрузка для поперечного сечения большепролетной подкрановой балки реализуется от действия нескольких кранов, и ее вероятность равна вероятности реализации одновременного возникновения максимальных давлений на колесо у разных кранов в сочетании с вероятностью установки колес крана в невыгодную позицию на линии влияния;
- расчетная нагрузка на колонну – реализация относится к одновременному действию максимальных давлений у четырех кранов, плюс вероятность их установки на линию влияния, плюс вероятность одновременного торможения в одну сторону или одновременного появления боковых сил с совпадающими направлениями действия.

Задача о сочетаниях случайных нагрузок обычно рассматривается, как проблема выброса за заданный уровень суммы случайных процессов в предположении об изменчивости нагрузки, которая реализуется только во времени. Однако для многих нагрузок случайными являются и распределение по поверхности сооружения либо другие пространственные параметры, такие как случайная область воздействия, т. е. их следовало бы рассматривать как пространственно-временные случайные процессы. Так, рассматривая задачу определения невыгодного сочетания внутренних усилий от действия нескольких кранов, нельзя оперировать только вероятностными свойствами суммы случайных процессов. Ведь такие случайные параметры, как величина крановой нагрузки и положение крана на линии влияния, не суммируются.

По-видимому, такая уточненная постановка задачи еще ждет своего исследователя, этот факт следует учитывать, оценивая те или иные подходы к решению рассматриваемой задачи.

Количество работ, освещающих проблему сочетания нагрузок на сооружение, очень велико, и авторы постарались включить в список литературы практически все известные им публикации, хотя далеко не все из них проанализированы в предлагаемом обзоре. Вместе с тем, мы полагаем уместным не исключать их из списка, который в силу отмеченного обстоятельства представлен не в порядке цитирования, а в алфавитном порядке.

И еще одно предварительное замечание. Случилось так, что отечественная школа исследования надежности развивалась независимо от зарубежной, а наши зарубежные коллеги почти ничего не знали о наших достижениях.

Большинство результатов при этом переоткрывалось, а традиция предписывала присваивать их различным авторам; чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть на краткие обзоры, предшествующие многим нашим и зарубежным публикациям. Таким образом, появились, например, такие термины как «характеристика безопасности по Ржаницыну» и «индекс надежности Корнелла», определяющие практически одну и ту же величину, а также ряд других понятий, аналогичных по сути, но называемых различным способом.

В настоящем обзоре мы постарались рассмотреть проблему как общую, в которой различные потоки часто оказывались параллельными, но все же, по возможности, называя точные даты, дающие представление об истинных приоритетах. Это ни в коем случае не должно означать некоторую вторичность тех или иных достижений – скорее, здесь следовало бы говорить о печальном эффекте взаимной неинформированности (и, возможно, незаинтересованности).

### **Первые решения**

Теоретические основы расчета конструкций сформулированы в методах строительной механики, которая оформилась как самостоятельная научная дисциплина к середине 19-го века. С ее появлением открылась возможность установить правила проектирования сооружений. Впервые в строительную науку коэффициент запаса ввел знаменитый французский инженер и ученый Л.М.А. Навье, предложивший в 20-е годы 19-го столетия установить расчетные допустимые напряжения, которые должны быть гораздо меньше разрушающих и при которых конструкция должна работать надежно. Таким образом, начиная с XIX столетия, практиковался метод допускаемых напряжений на основе коэффициента запаса, который использовался в строительных расчетах до 50-х годов XX века.

Само по себе значение коэффициента запаса вырабатывалось эмпирически на основе инженерной интуиции, опыта проектирования и эксплуатации конструкций, главным образом, путем проб и ошибок. И уже тогда инженеры использовали некоторые приемы, позволяющие учесть неравноправность вклада различных нагрузок при определении коэффициента запаса. Так, в течение XIX века колонны неизменно рассчитывались на полную временную нагрузку от всех поддерживаемых ими этажей. После 1900 г., в частности местные строительные нормы Чикаго, уже допускали снижение временной нагрузки, поскольку считалось маловероятным, чтобы одновременно на всех этажах временная нагрузка была максимальной. Нормы предусматривали расчет на максимальную временную нагрузку только конструкций верхнего этажа, на 95 % нагрузки – предпоследнего этажа, на 90 % – еще этажом ниже и

так далее, пока временная нагрузка не снизится до 50 %, которые принимались в расчет для всех нижних этажей. Аналогичные рекомендации были приняты в Лондонских строительных правилах в 1909 г. и до сих пор используются в большинстве строительных норм.

Проблема сочетания нагрузок важна также в связи с учетом ветровой нагрузки. Первые примеры учета ветровой нагрузки были основаны на аналогии с правилами проектирования железнодорожных мостов, которые были приняты после известного обрушения моста Тей. Считалось, что вряд ли мост будет нести максимальную вертикальную временную нагрузку, когда при штормовом ветре возникнут большие горизонтальные нагрузки. Таким образом, возникло правило допускать в случае сочетания вертикальных нагрузок и ветровой нагрузки повышение обычных напряжений на 20 %. Это правило было перенесено в практику проектирования многоэтажных зданий и включено сначала в американские, а затем в английские строительные нормы, хотя его обоснованность оставалась под вопросом.

Позже, например, в отечественных нормах проектирования стальных конструкций, коэффициент запаса зависел от числа и характера нагрузок, на которое рассчитывалась конструкция. До 1942 г. наибольший коэффициент запаса  $k=1,7$  и наименьшее допускаемое напряжение  $[\sigma] = 14 \text{ кН/см}^2$  принимались для массовой строительной стали марки Ст3 при расчетах на нагрузки, действовавшие постоянно или часто совпадавшие, например, постоянные нагрузки и снег (основное расчетное сочетание). При учете большего числа и более случайных нагрузок, таких как ветер ураганной интенсивности или влияние температуры (дополнительное расчетное сочетание), допускаемое напряжение принималось  $[\sigma] = 17 \text{ кН/см}^2$ , а  $k = 1,4$ . В 1942 г. значения допускаемых напряжений были повышены до 16 и 18  $\text{кН/см}^2$ . Коэффициенты запаса принимались соответственно 1,5 и 1,33. Эти коэффициенты запаса и допускаемые напряжения были приняты в НИТУ 1-46, действовавших до 1955 г., до введения НИТУ 121-55, основанных на методе предельных состояний.

#### **Вероятностный подход к оценке надежности**

**Первые шаги.** По-видимому, впервые осознал недостатки эмпирического подхода проф. Качинчи (Будапешт, 1911 г.), который предложил проводить статистическое изучение нагрузок и механических свойств материалов. М. Майер в 1926 году предложил исследовать проблемы безопасности сооружений методами математической статистики и теории вероятности [104].

В 1929 году Н.Ф. Хоциалов, принимая во внимание изменчивость основных параметров, предложил вести проектирование конструкций, исходя из некоторой регламентируемой вероятности аварийного отказа конструкции [56]. Основная идея этой работы сводилась к фундаментальному утверждению, что абсолютная надежность является недостижимой целью, если учитывать имеющиеся неопределенности в данных о прочности. Однако, сформулированная, как лозунг «Проектировать с учетом возможности аварии», – эта идея Н.Ф. Хоциалова встретила сильное сопротивление и была надолго отвергнута.

Дальнейшим развитием идей М. Майера и Н.Ф. Хоциалова явились выполненные в тридцатых годах XX столетия работы М. Плата, В. Вержбицкого, А.М. Фрейденталя и Н.С. Стрелецкого [45], [82], [109], [135]. В них в качестве случайных величин использовались не только прочностные характеристики материала, но и параметры нагрузок, и при этом речь шла уже о вероятности нарушения некоторых регламентируемых требований прочности (например, превышение некоторого уровня сопротивления), а не о вероятности аварии.

В частности, Н.С. Стрелецкий формулировал задачу обеспечения надежности, как требование, чтобы возможное максимальное значение случайной величины нагрузочного эффекта  $Q_d$  не превышало возможное минимальное значение случайной прочности  $R_d$ . Если упомянутые случайные величины  $\tilde{Q}$  и  $\tilde{R}$  представить своими распределениями (рис. 1, а), то вероятность того, что  $\tilde{Q} \geq Q_d$  или  $\tilde{R} \leq R_d$ , представится площадями  $\omega_Q$  и  $\omega_R$  соответственно. Предполагалось, что произведение этих площадей может характеризовать возможность отказа. Нетрудно видеть (см. рис. 1, б), что при этом неточно учитывается случай одновременного выполнения неравенств  $\tilde{Q} \geq Q_d$  и  $\tilde{R} \leq R_d$  (дважды заштриховано).

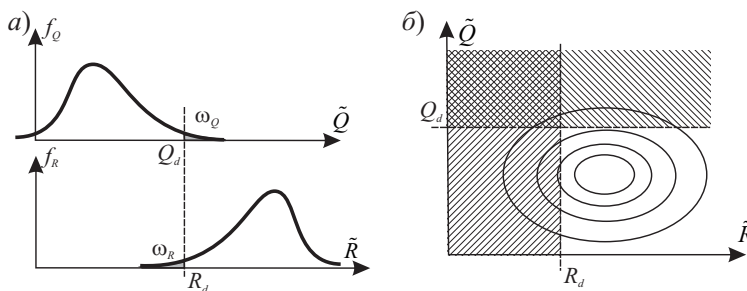


Рис. 1. Распределения случайных величин  $\tilde{Q}$  и  $\tilde{R}$

**Решение в технике случайных величин.** После Второй мировой войны А.М. Фрейденталь [83] – [86] и почти вслед за ним А.Р. Ржаницын [34] – [36] ввели в рассмотрение случайную величину резерва прочности  $\tilde{Z} = \tilde{R} - \tilde{Q}$ , с помощью которой требование надежности выражалось как необходимость того, чтобы величина  $\tilde{Z}$  была неотрицательной с некоторой наперед заданной вероятностью. Само условие  $\tilde{Z} = \tilde{R} - \tilde{Q} \geq 0$  реализуется в области, расположенной под прямой  $\tilde{R} = \tilde{Q}$  и проходящей под углом  $45^\circ$  через начало координат (рис. 2, а).

Если рассматривать двумерную плотность вероятности  $p_{\tilde{Q}, \tilde{R}}$ , то объем тела под поверхностью этой функции, расположенный вне области надежности (рис. 2, б), указывает на вероятность отказа.

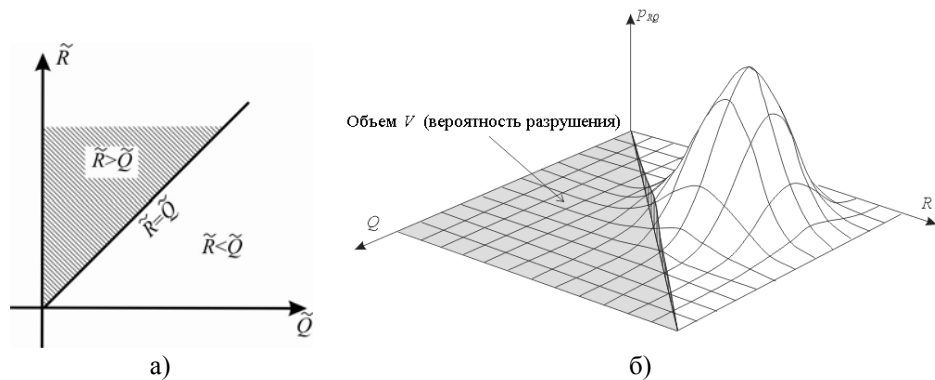


Рис. 2. Случайная величина резерва прочности:

а) область реализации условия резерва прочности; б) вероятность разрушения

Во второй половине XX века были выполнены многочисленные работы, посвященные становлению и совершенствованию вероятностных методов, т. е. по сути, шла работа по подготовке перехода к следующему этапу развития расчетов конструкций – непосредственной расчетной оценке надежности конструкций. И здесь огромную роль сыграли классические работы В.В. Болотина [4] – [6], в которых на основе использования теории случайных процессов была обоснована более строгая концепция вероятностного расчета на надежность. В задачу надежности вошел такой параметр, как время. При этом, в отличие от других отечественных исследований, работы В.В. Болотина становились широко известными за рубежом.

**Метод расчетных предельных состояний.** Существенным этапом в развитии расчета конструкций явился полувероятностный метод расчетных предельных состояний, по сути практический вариант использования некоторых положений вероятностного подхода. Будучи по форме детерминированным, он основан на использовании методов статистического анализа при нахождении коэффициентов надежности, характерных для этого метода. Условная система упомянутых коэффициентов надежности была предложена в 1944 году И.И. Гольденблатом, М.Г. Костюковским и А.Н. Поповым и положена в основу схемы расчета для разработки строительных норм и правил. Эта работа была выполнена комиссией в составе В.А. Балдина, А.А. Гвоздева, И.И. Гольденבלата, Ю.М. Иванова, В.М. Келдыша, Л.И. Онищика, Н.С. Стрелецкого и К.Э. Таля [3]<sup>1</sup>.

Метод расчетных предельных состояний был введен в СССР в качестве руководящего принципа расчетов строительных конструкций с 1 января 1955 года при утверждении первого издания Строительных норм и правил. В дальнейшем расчет по предельным состояниям завоевал широкое признание во всем мире, и в настоящее время он положен в основу большинства международных и национальных стандартов по проектированию, в частности, в стандарте ISO [94] и в системе Еврокодов, где он получил название «метод частных коэффициентов надежности» [78].

Заметим, что внедрение этого метода за рубежом растянулось на десятки лет, и очень трудно объяснить это простым незнанием. Можно предположить, что основную роль здесь сыграло отсутствие в середине 50-х годов необходимого статистического материала для обоснования значений частных коэффициентов надежности (об этом честно говорили авторы метода, которые при этом полагались на будущие исследования, а на первых порах подгоняли результаты под решения, проверенные предшествующим опытом). В западных странах, где не принята командная система внедрения новшеств, это не давало возможности убедить инженерную общественность в срочной необходимости смены подхода к проектированию, тем более, что подгонка под предшествующий опыт не давала заметного экономического эффекта<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Интересно отметить, что Алексей Руфович Ржаницын, чьи исследования, безусловно, оказали большое влияние на принятие решений (см., например, [35]), всегда возражал, когда его называли одним из авторов метода расчетных предельных состояний.

<sup>2</sup> В частности, некоторая экономия была достигнута для конструкций, на которые действуют преимущественно постоянные нагрузки с минимальными коэффициентами перегрузки, а именно – 3...10% экономии для стропильных и подстропильных ферм, в то время как подкрановые балки остались практически неизменными. Колонны производственных зданий или остались без изменений, или даже стали несколько тяжелее.

Так, в США метод был реализован для стальных конструкций зданий лишь в 1978 году под названием LRFD (Load and Resistance Factor Design – Проектирование с коэффициентами нагрузки и сопротивления), при этом в качестве обоснования указывалось на исследования Корнелла [67] и Линда [100].

### **Модели нагрузок**

При решении задачи о выборе сочетания нагрузок необходимо иметь адекватные модели этих нагрузок как случайных величин или случайных процессов, развертывающихся во времени и в пространстве.

**Случайные величины.** Нагрузки, не меняющиеся во времени или такие, что их временной изменчивостью можно пренебречь, определяются лишь своей интенсивностью. При известном пространственном распределении такие нагрузки могут считаться случайными величинами. Если из каких-либо соображений известно максимальное за расчетный период значение переменной нагрузки, то это значение также является случайной величиной и может в таком качестве использоваться в расчетах надежности.

Довольно продолжительное время вероятностные исследования надежности оперировали случайными величинами нагрузок и сопротивлений, при этом практически рассматривалось действие одной нагрузки. Ее значения в различные моменты времени считались отдельными реализациями случайной величины, совокупность которых давала значения таких статистических параметров, как среднее значение, среднеквадратичное отклонение и т. п. Исходя из этих характеристик, были получены расчетные значения нагрузки, которые обеспечивали некоторую заранее заданную вероятность их появления. Если же учитывалась не одна такая нагрузка, то фактически принималась гипотеза об одновременном для различных нагрузок достижении максимума (расчетного значения).

**Случайные процессы.** Более реалистичным является рассмотрение нагрузок в виде случайных функций времени (случайных процессов). Наиболее важным свойством случайного процесса является зависимость или независимость его свойств от начала отсчета времени. В соответствии с этим различают нестационарные и стационарные случайные процессы. Математическое ожидание, дисперсия и стандарт стационарного случайного процесса могут быть постоянными, а корреляционная функция зависит лишь от разности значений аргументов  $\tau = t_i - t_j$ :  $K(t_i, t_j) = K(\tau)$ .

При вероятностном описании нагрузки в технике стационарных случайных процессов характеристикой их частотной структуры является эффективная частота (или частота процесса по нулям) которая определяется как



$$\omega = \sqrt{-\dot{K}(0) / K(0)} = \hat{x} / \dot{\hat{x}}, \quad (1)$$

где  $\hat{x}, \dot{\hat{x}}$  – стандарты процесса и его первой производной;  $K(0)$  – корреляционная функция случайного процесса  $\tilde{x}(t)$  при  $\tau = 0$ .

Помимо стационарных и нестационарных случайных процессов, в инженерных приложениях рассматривают еще один класс процессов – так называемые квазистационарные случайные процессы. Это такие процессы, вероятностные характеристики которых меняются во времени медленно по сравнению с изменением самих случайных процессов. Большая часть реальных нагрузок, например, снеговых и ветровых, оказывается именно квазистационарными случайными нагрузками.

В зависимости от особенностей поведения, а также с целью упрощения анализа используются различные модели случайных процессов.

Первыми исследования, в которых нагрузка была представлена в виде некоторой случайной функции времени, естественным образом относились к воздействиям, быстро меняющимся во времени, таким как сейсмическое и воздействие морского волнения. В работе Дж. Хоузнера [92] ускорение грунта при землетрясении было описано как последовательность некоррелированных импульсов. Представление нагрузки и напряжений в конструкции в виде непрерывных случайных процессов было использовано, по-видимому, впервые в судостроении. Еще в 1953 году о такой возможности упоминали Льюис и Сцебехелли в дискуссии по работе Дениса и Пирсона [121]. Более детально эта идея была представлена в работах Льюиса [99] и В.В. Екимова [15].

Однако широкое и строгое изучение поведения несущих конструкций под нагрузкой как случайных процессов, последовательное рассмотрение фактора времени в проблеме надежности конструкций, в первую очередь, связано с упомянутыми выше работами В.В. Болотина. Им впервые (1959 г.) задача надежности была сформулирована как задача о пересечении случайным процессом некоторого детерминированного или случайного уровня (рис. 3). Несколько позже к такой же методике обратился М. Шинозука [117].

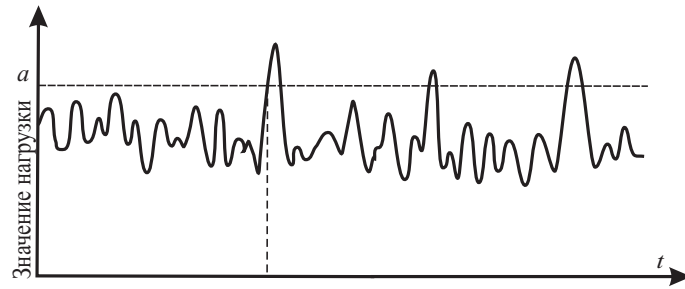


Рис. 3. Пересічення випадковим процесом певного детермінованого рівня

Важним при цьому являється визначення  $v_+(\gamma)$  – математичного очікування числа позитивних пересічень випадковим процесом нормованого рівня  $\gamma = (x - \bar{x})/\hat{x}$  в одиницю часу. В частині випадку, якщо при довільному розподілі ординати стаціонарного випадкового процесу його перша похідна підпорядковується розподілу Гауса, величина  $v_+(\gamma)$  може бути визначена за формулою [6], [60], [64]:

$$v_+(\gamma) = \omega f(\gamma) / \sqrt{2\pi}, \quad (2)$$

де  $\omega$  – ефективна частота випадкового процесу навантаження;  $f(\gamma)$  – нормована густина розподілу ординати випадкового процесу.

Використання опису змінних навантажень у вигляді неперервних випадкових процесів при постановці задачі про комбінації навантажень було розглянуто, по-видимому, також вперше в роботі В.В. Болотина [7]. При цьому середнє (за часом  $t$ ) число викидів стаціонарного випадкового процесу за заданий рівень  $\gamma$  визначалося як

$$Q(\gamma, t) \approx N_+(\gamma | 0 \leq \tau \leq t) = v_+(\gamma)t. \quad (3)$$

Це вираження використовувалося В.В. Болотиним як наближена оцінка ймовірності відмови конструкції. Далі таким підходом користувалися й розвивали багато інших дослідників (див., наприклад, [1], [16], [27], [52], [95], [136]).

Для будівельних конструкцій, надійність яких повинна бути достатньо високою, практичне значення мають викиди, які можна вважати рідкими подіями, для яких число викидів за часом  $t$  підпорядковується закону Пуассона. Тоді ймовірність того, що за часом  $t$  не відбудеться жодного викиду, визначається формулою:

$$P(t) = \exp[-v_+(\gamma)t]. \quad (4)$$

Большинство нагрузок в отдельные довольно малые промежутки времени увеличивают свою интенсивность, создавая пики, которые и определяют отказ конструкции. В связи с этим при вероятностном описании внешних воздействий можно рассматривать не полностью случайный процесс, а только его пиковые значения. В.В. Болотиним на основе модели нормального стационарного случайного процесса была разработана модель абсолютных максимумов нагрузок [28]. Распределение абсолютных максимумов определяется хвостовой частью распределений выбросов случайного процесса, которая расположена выше уровня характеристического максимума  $\gamma_0$ , для которого число выбросов случайного процесса за время  $t$  равно единице:

$$N_+(\gamma_0 | 0 \leq \tau \leq t) = 1. \quad (5)$$

Данная модель позволяет вместо всего случайного процесса рассматривать только его максимумы, принимая их за случайные величины, а частотно-временной характер учитывать значением характеристического максимума.

Имеются работы, в которых меняющиеся во времени нагрузки представлены в виде Марковских случайных процессов (см., например, [54], [60]).

**Дискретизация воздействий.** Весьма перспективным выявилось представление нагрузок в виде случайных последовательностей различного вида. Одним из первых таких представлений, по-видимому, была намеченная в 1947 г. [45] и сформулированная в 1966 г. вероятностная модель Н.С. Стрелецкого в виде временного ряда изменчивости нагрузок [46]. Такой ряд может быть натуральным, соответствующим фактической последовательности нагрузок, либо отсортированным, в котором силовые воздействия откладываются в возрастающем порядке.

В предложенной еще в 1968 году FBC модели Ферри Борджеса-Кастанеты [80] история изменения нагрузки  $Q(t)$  представлена последовательностью прямоугольных импульсов с постоянной длительностью  $\tau$  и случайными величинами ординат  $\tilde{Q}$ . Эти ординаты выбираются так, чтобы охватывать фактический ход процесса нагружения (рис. 4, а). Если интервал времени  $\tau$  выбран таким, что на его протяжении корреляционная функция затухает, то можно полагать последовательность случайных величин статистически независимой.

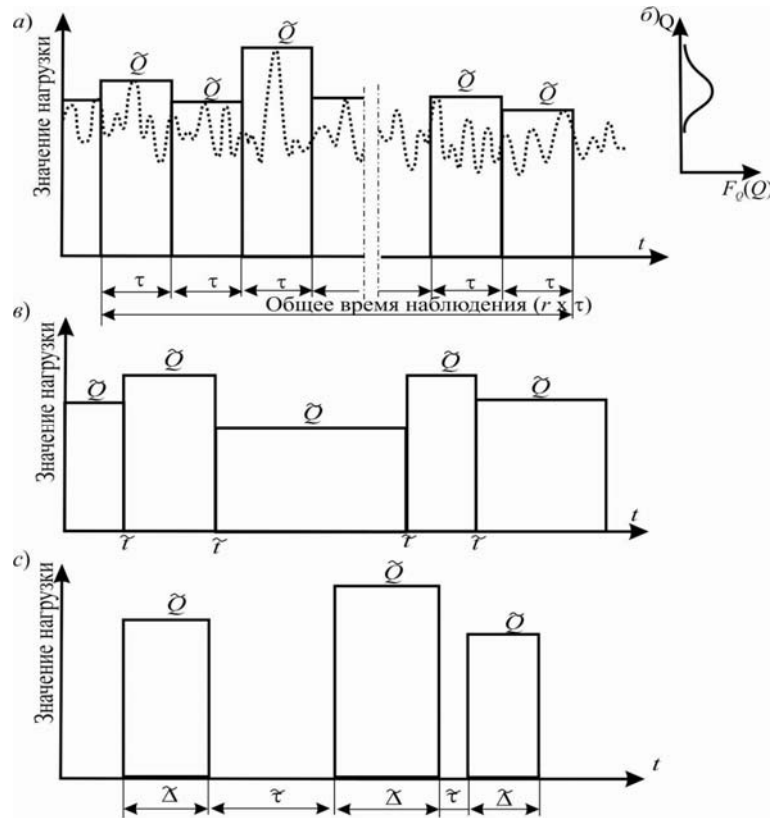


Рис. 4. Моделирование процесса прямоугольными импульсами

В этой модели случайные свойства процесса нагружения представляются только случайными величинами  $\tilde{Q}$  с функцией распределения  $F_Q(Q)$  (рис. 4, b). Предполагается, что воздействия покрывают достаточно большой период наблюдения (например, предполагаемый срок службы конструкции), который может быть разделен на  $r$  равных временных интервалов  $\tau$ , названных единичными периодами наблюдения. По  $r$  наблюдениям может быть определена (например, с использованием порядковой статистики) функция распределения вероятности максимумов нагрузки:

$$F_{max_Q}(Q) = \{1 - p[1 - F_Q(Q)]\}^r, \quad (6)$$

где  $p$  – вероятность нахождения нагрузки в интервале  $\tau$ .

Раквиц и Фисслер [115], [116] распространили эту модель на общий случай уравнения предельного состояния.

В отличие от ФВС-процесса, характеризуемого одной случайной величиной, часто рассматривается двухпараметрический процесс, в котором интенсивность нагрузки  $\tilde{Q}$ , являющаяся случайной величиной, скачком меняется в случайные моменты времени  $\tilde{t}$  (рис. 4, в). Законы распределения  $F_Q(Q)$  и  $F_t(t)$  случайных величин  $\tilde{Q}$  и  $\tilde{t}$  полагаются известными, а такой процесс называется пуассоновским. Функция распределения максимальной нагрузки для такой последовательности определяется как [33]:

$$F_{\max Q} = \exp[-\lambda \cdot t \cdot p(Q)], \quad (7)$$

где  $\lambda$  – интенсивность возникновения нагрузки  $Q$ ;  $p(Q)$  – вероятность отказа, определяемого нагрузкой  $Q$ .

Несколько более общую трехпараметрическую модель, названную дискретным представлением нагрузок, детально исследовал А.Р. Ржаницын [39], [40], не определяя, впрочем, способ назначения величин  $\tilde{Q}$ , которые были названы им перегрузками. При этом полагалась, что случайное значение перегрузки  $\tilde{Q}$  имеет случайную продолжительность действия  $\tilde{\Delta}$ , которая зависит от уровня  $a$ , и соответствующий всплеск нагрузки происходит через случайные моменты времени  $\tilde{t}$  (рис. 4, с). Вероятность превышения уровня  $a$  по данной модели определяется по формуле:

$$Q(t) = 1 - \left(1 - \frac{\bar{\Delta}}{\bar{t}}\right)^{n_H}, \quad (8)$$

где  $\bar{\Delta}$  и  $\bar{t}$  – математические ожидания продолжительности перегрузки и временного интервала между ними;  $n_H$  – количество импульсов со значениями  $Q > a$  за время  $t$ .

Представление нагрузки в стиле ФВС-процесса, но с учетом возможной корреляции между элементами последовательности случайных значений  $\tilde{Q}$ , использовал в своих работах А. Кудзис в виде метода обобщенной ковариации [19]. Суть его заключается в том, что случайный процесс  $\tilde{x}(t)$  заменяется случайной последовательностью, между сечениями которой учитываются парные коэффициенты корреляции  $\rho_{k,l}$ , по которым вычисляются усредненный  $\rho_m$  и обобщенный  $\rho$  коэффициенты корреляции. По данной модели вероятность непревышения нагрузкой детерминированного уровня  $a$  за время  $t$  определяется приближенно как:

$$P(t) \approx \rho \cdot P_{\min} + (1 - \rho) \prod_{k=1}^r P_k, \quad (9)$$

где  $P_k$  – вероятность неперевышения уровня  $a$  в  $k$ -ом сечении случайной последовательности;  $r$  – число расчетных сечений случайной последовательности.

#### Расчетные сочетания – концептуальные положения

**Сумма случайных величин.** Если не рассматривать изменение нагрузок во времени и полагать значения расчетных нагрузок случайными величинами, то одним из первых исследований, посвященных сочетаниям представленных таким образом случайных нагрузок, была серия работ А.Р. Ржаницына, опубликованных в 1949 году.

В них, по сути, была решена задача о суммарном действии нескольких независимых нагрузок, каждая из которых являлась случайной величиной с гауссовым распределением. В результате для коэффициента сочетаний было получено следующее выражение:

$$\psi = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{1 + \gamma_i V_i} + \gamma_n \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{C_i V_i}{1 + \gamma_i V_i} \right)^2 + 2 \sum_{i \neq j} \frac{C_i C_j V_i V_j r_{ij}}{(1 + \gamma_i V_i)(1 + \gamma_j V_j)}}, \quad (10)$$

где  $V_i$  – коэффициент вариации  $i$ -й нагрузки;  $\gamma_i$  и  $\gamma_n$  – нормированные отклонения  $i$ -й и суммарной расчетных нагрузок;  $C_i$  – число влияния (доля)  $i$ -й нагрузки;  $r_{ij}$  – коэффициент корреляции  $i$ -й и  $j$ -й нагрузок.

При независимости сочетаемых нагрузок второе слагаемое под радикалом отсутствует.

Представленные в СНиП значения этого коэффициента, с учетом предложений А.Р. Ржаницына, определялись как:

$$\psi = \left[ \sum_{i=1}^n q_i^n + \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i^n)^2 (\gamma_{fi} - 1)^2} \right] / \sum_{i=1}^n q_i^n \gamma_{fi}, \quad (11)$$

где  $q_i^n$ ,  $\gamma_{fi}$  – нормативное значение и коэффициент надежности (перегрузки)  $i$ -й нагрузки.

Определенный таким образом коэффициент сочетаний, в частности, для постоянной нагрузки от многослойных утепленных кровель может составлять  $\psi = 0,90 \dots 0,95$ .

В работах [34], [35] среди прочих рассматривалась проблема совместного и одновременного действия полезных нагрузок на различных этажах многоэтажного здания

Более глубокий подход к вопросу сочетаний нагрузок основывается на анализе надежности конструкций. Такую возможность открывает рассмотрение случайного резерва прочности конструкции  $\tilde{Z}$ , приведенного выше, и параметра  $\beta$ , называемого *характеристикой безопасности* (А.Р. Ржаницын [40]) или *индексом безопасности* (С.А Корнелл [67]), который определяет вероятность отказа (безотказной работы) в зависимости от вида распределения  $Z$ :

$$\beta = \bar{Z} / \hat{Z} = (\bar{R} - \bar{Q}) / \sqrt{\hat{R}^2 + \hat{Q}^2}. \quad (12)$$

Здесь  $\bar{Z}, \bar{R}, \bar{Q}$  – математические ожидания, соответственно, резерва прочности, случайной прочности и нагрузочного эффекта;  $\hat{Z}, \hat{R}, \hat{Q}$  – стандарты тех же параметров.

Коэффициент сочетаний  $\psi$  определяется как отношение нагрузки  $Q_1^P$ , соответствующей характеристике безопасности  $\beta$  и расчетной нагрузки  $Q^P$ :

$$\psi = \frac{Q_1^P}{Q^P} = \frac{1 + V_Q \gamma_{Q1}}{1 + V_Q \gamma_Q}, \quad (13)$$

где  $\gamma_Q$  – нормированное отклонение, принятое в нормах проектирования для обоснования расчетной нагрузки;  $\gamma_{Q1}$  – нормированное отклонение, соответствующее значению  $\beta$ ,  $V_Q$  – коэффициент вариации нагрузки.

Хасофер и Н.С. Линд [91] в развитие концепции Корнелла А.М. предложили выбирать индекс безопасности как кратчайшее расстояние между началом координат и поверхностью состояния в пространстве стандартизованных параметров. При более общей постановке задачи надежности и сочетаний нагрузок следует учитывать, что граница области допустимых состояний представляет собой гиперповерхность и описывается функциями более двух переменных. Ряд исследователей, в частности Корнелл [68], предложил линеаризовать эти функции в окрестности математического ожидания, что существенно упрощает решение задачи, которая состоит в нахождении на граничной поверхности точки, расстояние которой до начала координат, равно характеристике

безопасности  $\beta$ , будет минимальным. Решение задачи в общем случае может быть получено методом итераций с заменой распределений основных переменных эквивалентным нормальным. Следует выделить здесь разработку Б.И. Снарским последовательного итерационного алгоритма решения данной задачи [42], [43]. О. Дитлевсен [70] ввел понятие *обобщенного индекса безопасности* для случаев, когда при неизвестных функциях распределения базисных переменных определены их первые два момента. Перечисленные подходы, формирующие теорию надежности 1-го порядка, подробно описываются в монографиях Г. Шпете [60], Г. Аугусти, А. Баратта и Ф. Кашиати [64] и др.

**Учет фактора времени.** Случай учета переменности нагрузок во времени строго и, по-видимому, впервые исследовал В.В. Болотин, который в 1962 году рассмотрел задачу о суммировании эффектов действия нескольких, вообще говоря, коррелированных, случайных гауссовых процессов [7]. В основу рассуждений был положен анализ вероятности выброса суммарного случайного процесса за некоторый уровень, который не должен зависеть от числа учитываемых составляющих суммарного процесса. Так же, как и для отдельных нагрузок, частотный состав случайного воздействия, вызванного действием сочетания нагрузок, представленных в форме стационарных случайных процессов, определяется эффективной частотой. Для ее определения используется общее решение В.В. Болотина [28]:

$$\omega_q = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \omega_{ik}^2 \cdot \alpha_i \cdot \alpha_k \cdot K_{ik}}{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \cdot \alpha_k \cdot K_{ik}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

Для совместного действия  $n$  независимых стационарных нагрузок данная формула приобретает следующий вид:

$$\omega_q = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \cdot \hat{X}_i^2 \cdot \omega_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \cdot \hat{X}_i^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

где  $\omega_q, \omega_i$  – эффективные частоты соответственно суммарной и  $i$ -й нагрузки;  $\hat{X}_i$  – стандарт  $i$ -й нагрузки;  $\alpha_i$  – число влияния  $i$ -й нагрузки.



Использование выражения (14) позволяет исключить вычисление, аппроксимацию и сложение корреляционных функций, поскольку эффективные частоты могут определяться численным дифференцированием реализации или вычисляться по известному соотношению:

$$\omega = \sqrt{-\rho''(\tau = 0)}, \quad (16)$$

где  $\rho(\tau)$  – нормированная корреляционная функция нагрузки.

Позже исследования В.В. Болотина были продолжены рядом других ученых. Среди отечественных исследователей следует назвать С.Ф. Пичугина [28], углубившего частотный анализ случайных нагрузок и их сочетаний. Отметим здесь, что формула (14) сложения эффективных частот относится к узкополосным случайным процессам, спектральная плотность  $S(\omega)$  которых сосредоточена в узком интервале вблизи несущей частоты  $\omega_0$ , практически совпадающей с эффективной частотой. Между тем случайные процессы нагрузок не являются узкополосными и имеют различные частотные характеристики. Так, СП снеговой нагрузки имеет эффективную частоту  $\omega_s = 0,073 \dots 0,141$  1/сут., ветровой нагрузки –  $\omega_w = 5,16 \dots 6,58$  1/сут., крановой нагрузки –  $\omega_{cr} = 71 \dots 215$  1/час.

Поэтому случайные процессы, которые получаются в результате сложения нагрузок разной частоты, получаются многочастотными, имеющими сложную частотную структуру. Вследствие этого выявилась необходимость частотного анализа как отдельных процессов, так и их сочетаний. Для этого был использован введенный В.В. Болотиным [8] коэффициент широкполосности случайного процесса:

$$\beta_\omega = \sqrt{\int_0^\infty S_X(\omega) \omega^4 d\omega \int_0^\infty S_X(\omega) d\omega} / \int_0^\infty S_X(\omega) \omega^2 d\omega. \quad (17)$$

Здесь  $S_X(\omega)$  – односторонняя спектральная плотность отдельного случайного процесса или суммы нескольких СП.

Для придания наглядности громоздкому выражению (17) укажем, что оба коэффициента выражаются через следующие наглядные соотношения:

$$\beta_\omega = K_c = \frac{\omega_e}{\omega_s} = \frac{v_{\max}(-\infty)}{v_+(0)}, \quad (18)$$

где  $\omega_e$  – эффективная частота СП (называемая также средней частотой СП по нулям [86]);  $\omega_s$  – средняя частота СП по экстремумам;  $v_+(0)$  – среднее число положительных пересечений нулевого уровня;  $v_{\max}(-\infty)$  – общее число максимумов СП.

Анализ показал, что атмосферные и крановые нагрузки представляют собой случайные процессы с достаточно выраженной широкополосностью:  $\beta_\omega \approx 3$ .

Для суммы двух СП получено лаконичное выражение для коэффициент широкополосности  $\beta_{12}$ :

$$\beta_{12} = \frac{\beta_\omega \sqrt{(1 + \theta^4 K^2)(1 + K^2)}}{1 + \theta^2 K^2}, \quad (19)$$

где  $\theta = \omega_2/\omega_1$ ;  $K = \hat{X}_2/\hat{X}_1$ ;  $\beta_\omega \geq 1$  – коэффициент широкополосности отдельных СП.

Поскольку частоты суммы СП различного частотного состава являются средними частотами СП по максимумам  $\omega_s$ , при их использовании в формулах выбросов СП, базирующихся на эффективной (средней по нулям) частоте  $\omega_e$ , должна учитываться степень широкополосности рассматриваемого СП посредством коэффициента  $\beta_\omega$ .

В.П. Чирков [58] рассмотрел вопрос о сочетании случайных нагрузок, действующих на систему со случайными параметрами. На примерах он продемонстрировал, что коэффициенты сочетаний не являются универсальными, а зависят не только от свойств нагрузок, но и от свойств конструкции, принятой расчетной схемы, нормативных показателей надежности и установленного срока службы сооружения.

Ларраби и Корнелл [98], а также Мадсен [102] развивали метод пересечений случайным процессом заданного уровня применительно к линейной комбинации стационарных и независимых пуассоновских процессов нагружения.

**Дискретная последовательность.** А.Р. Ржаницын [39], [40] в рамках дискретного представления нагрузок предложил для решения поставленной задачи следующее простое выражение для средней длительности сочетания нагрузок (случай 2-х нагрузок):

$$\bar{\Delta}_{12}^{-1} = \bar{\Delta}_1^{-1} + \bar{\Delta}_2^{-2}. \quad (20)$$

Отмечая простоту данной формулы, подчеркнем, что ее справедливо критикует ряд специалистов, прежде всего за неопределенность уровней нагрузок, на которых происходит их суммирование. Этот недостаток компенсирует «вероятностно-взвешенный» вариант вышеприведенной формулы, отвечающий опытным данным:

$$\bar{\Delta}_{12}(R) = \frac{\sum_1^k f_1(Q_1) f_2(Q_2')}{\sum_1^k [f_1(Q_1) f_2(Q_2') (\bar{\Delta}_1^{-1} + \bar{\Delta}_2^{-1})]}. \quad (21)$$

При этом соблюдается условие:

$$C\alpha_1 Q_1 + (1-C)\alpha_2 Q_2' = R. \quad (22)$$

Здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – коэффициенты влияния нагрузки;  $C$  и  $1-C$  – соответственно доли 1-й и 2-й нагрузок в общем напряжении (усилии), которые определяют соотношение слагаемых распределений;  $R$  – уровень, для которого определяется  $\bar{\Delta}_{12}$ ;  $k$  – число пар значений нагрузок, удовлетворяющих условию формулы (22).

Предложенный в [7] и в других работах дискретного направления строгий подход к решению задачи о вероятности совпадения различных нагрузок и о статистических свойствах эффекта их суммарного действия требует достаточно тонкого и детального анализа свойств тех случайных процессов, которыми описывается поведение каждой из нагрузок. И, по-видимому, правы авторы [64], когда утверждают, что «...главным в этой проблеме является поиск сравнительно простых решений для принятых моделей в виде случайных процессов и представление этих решений по возможности в виде операций над случайными величинами».

Именно такой была мотивация работы Туркстры [128], [129], где была сделана попытка обосновать соответствующие правила комбинирования случайных нагрузок, меняющихся во времени. В основу рассуждений была положена ГВС-модель Ферри Борджеса-Кастанеты, в которой история изменения нагрузки  $Q(t)$  представлена последовательностью прямоугольных импульсов.

Если рассматривать случай объединения двух воздействий  $Q_1(t)$  и  $Q_2(t)$  и предположить, что  $Q_1$  является доминирующим, то логично предположить, что расчетной ситуацией будет такая, в которой  $Q_1$  принимает максимальное на интервале наблюдений  $T = \tau_1 r$  (см. рис. 1) значение  $Q_{1\max}$ . Для ГВС-модели это значение имеет функцию распределения вероятности  $F_Q(Q)$  и полагается действующим на интервале времени  $\tau_1$ . Для  $Q_2$

вводимое в комбинацию значение  $Q_{2c}$  равно ожидаемому в интервале  $\tau_1$  комбинационному значению  $F_{Q_{2c}}$ , имеющему заданную вероятность. Оно вычисляется на основании функции распределения:

$$F_{Q_{2c}}(Q) = [F_{Q_2}(Q)]^{\tau_2/\tau_1}. \quad (23)$$

Приближенно получающиеся эффекты могли быть вычислены как максимум следующих двух комбинаций (правило Туркстры):

$S\{Q_{1max}, Q_{2c}\}$ , если  $Q_1$  рассматривают как доминирующее действие;

$S\{Q_{2max}, Q_{1c}\}$ , если  $Q_2$  рассматривают как доминирующее действие.

Это записывается как формула:

$$S_{max} = \{S(Q_{1max}, Q_{2c}); S(Q_{1c}, Q_{2max})\}. \quad (24)$$

Правило Туркстры подтверждается опытом и наблюдением, поскольку случаи отказа большей частью возникают в тех случаях, когда одна из нагрузок достигает экстремального значения, и очень редко, когда действует комбинация экстремумов нескольких различных нагрузок, изменяющихся во времени. Однако указанное решение не является строго консервативным, поскольку в принципе не исключена возможность того, что различные процессы нагружения могли бы одновременно достигнуть максимальных значений [60].

Правило Туркстры обычно принимается, чтобы оценить комбинацию нескольких стохастических грузов из-за ее простоты, но оно игнорирует возможность краткосрочного выброса нагрузки внутри интервала  $\tau$  и корреляцию нагрузок. Ю-Квей Вен предложил метод оценки вероятности сочетания нагрузок, основанный на модели процесса Пуассона [131], который затем существенно развили Ясухио Мори и Такахио Като [136].

В соответствии с [66] вероятность отказа за время  $T$  определяется как:

$$P(T) = 1 - \exp \left[ -T \cdot \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \lambda_{ij} p_{ij} + \dots \right) \right], \quad (25)$$

где  $n$  – общее количество нагрузок каждая из которых определяется индексами  $i$  и  $j$ ;  $\lambda_i$  – интенсивность возникновения  $i$ -й нагрузки;  $p_i$  – вероятность отказа, определяемого только  $i$ -й нагрузкой;  $\lambda_{ij}$  – интенсивность одновременных возникновений нагрузки  $i$  и  $j$ ;  $p_{ij}$  = вероятность отказа, при одновременном действии нагрузок  $i$  и  $j$ .

**Эксплуатационное состояние.** Все сказанное выше относилось к проблеме выбора расчетных сочетаний нагрузки для первой группы предельных состояний, которые напрямую связаны с проблемами безопасности. Применительно ко второй группе предельных состояний (по эксплуатационной пригодности) долгое время исследования почти не проводились. Предполагалось, что правила выбора должны оставаться прежними, только вместо расчетных значений нагрузки следует использовать нормативные (характеристические) значения.

Однако это не совсем так. Дело в том, что критерий эксплуатационной пригодности:

- не всегда четко определен и зачастую зависит от требований, имеющих субъективный характер (зыбкость перекрытий, ощущение нависания при больших прогибах и т. п.);
- может не укладываться в концепцию выброса нагрузки за некоторый критический уровень (например, если речь идет о неприемлемых частотах вибраций).

Кроме того, в отличие от первой группы предельных состояний, здесь может существовать ситуация «обратимого предельного состояния», когда эффекты нагружения, приводящие к нарушению контролируемых условий, исчезают после удаления соответствующей нагрузки.

В связи со сказанным для состояния эксплуатационной пригодности возникает проблема выбора расчетных сочетаний, например, применительно к длительной части переменных нагрузок (пониженные значения в терминологии СНиП 2.01.07-85). Использование таких комбинаций мало отличается от методики проверок по первой группе предельных состояний.

Нормы проектирования Украины ДБН В.1.2-2:2006 ввели в рассмотрение специальные *эксплуатационные расчетные значения* нагрузок, под действием которых допускалось нарушение требований второго предельного состояния в течение некоторой части  $\eta$  ( $0 < \eta < 1$ ) установленного срока службы конструкции, и *квазипостоянные расчетные значения* нагрузок. Естественно, что эксплуатационное значение нагрузки применяется только для обратимых предельных состояний.

В Еврокоде введены следующие типы комбинаций для предельного состояния по эксплуатационной пригодности:

- *характеристические*, которые применяются для необратимых предельных состояний;
- *часто встречающиеся*, с помощью которых проверяются обратимые предельные состояния;
- *квазипостоянные*, применяемые для учета длительных реологических процессов, таких как ползучесть.

### **Исследования конкретных вариантов сочетания нагрузок**

Большое число работ было посвящено исследованию возможных сочетаний для нагрузок определенного вида. Среди них можно выделить некоторые обширные классы нагрузок, например, такие как климатические воздействия на здания и сооружения или нагрузки от мостовых кранов в производственных зданиях. Обычно исследования такого рода предпринимались с целью нахождения определенных коэффициентов сочетания, которые следовало включить в нормы проектирования.

**Исследования ЦНИИСК.** В 60 – 80-е годы прошлого столетия ЦНИИСК (Москва) активно разрабатывал проблему надежности конструкций, в том числе, описание нагрузок и задачу их сочетаний. Опытные статистические данные по снеговой, ветровой и крановой нагрузкам были использованы в работе В.Г. Писчикова [27], который показал, что коэффициенты сочетания, определенные по заданной вероятности отказа, зависят от долей нагрузок в суммарном усилии в конструкции. В частности, коэффициент сочетания снеговой и ветровой нагрузок может снижаться до 0,77.

Отметим также работу А.Я. Дривинга [14], который использовал представление атмосферных нагрузок в виде схемы независимых испытаний при оценке надежности сооружений с чисто экономической ответственностью.

В работе Е.И. Федорова [52] была решена задача оценки надежности конструкции при совместном действии на нее снеговой и ветровой нагрузок, представленных в форме марковских случайных процессов с дискретными состояниями. В дальнейшем тот же автор рассмотрел нагрузки в виде нормальных стационарных случайных процессов, описав затем их максимумы двойным экспоненциальным распределением [53]. Это позволило по результатам многолетних измерений снеговой нагрузки и ветрового напора для Москвы получить значения коэффициента сочетания этих нагрузок в пределах 0,77–0,92 в зависимости от соотношения нагрузок.

Достаточно простой метод вычисления коэффициента сочетания атмосферных нагрузок был разработан К.С. Лосицкой [21], [54]. При этом ветровая нагрузка описывалась законом Вейбулла, снеговая – марковской

последовательностью. В основе метода закладывалось сравнение уровней надежности конструкций, испытывающих действие различного числа нагрузок, с эталонным значением показателя надежности. Полученный коэффициент сочетания был описан вогнутой кривой с минимумом, равным 0,75–0,78. Ю.Д. Суховым предложен метод учета сочетания постоянной и временных нагрузок [47], использование которого показало, что коэффициент сочетания уменьшается с ростом числа нагрузок и их коэффициентов вариации.

**Работы испытательной станции МИСИ.** Московский инженерно-строительный институт (МИСИ) в 70–90-е годы XX века провел масштабные исследования надежности зданий и сооружений, в том числе, изучение нагрузок и их сочетаний. Разработку этих вопросов начал Б.Н. Кошутин, разработавший общую процедуру сочетания нагрузок различной частоты на основе схемы независимых испытаний [17]. Обоснование коэффициентов сочетания для нагрузок мостовых кранов в 1973–75 гг. выполнил А.Т. Яковенко на основе натуральных экспериментальных исследований, проведенных в действующих цехах [12], [61]. Статистические данные были получены для вертикальных нагрузок 17 кранов, которые работали в 5 пролетах складов готовой продукции и станом пролете прокатных цехов, а также в двух пролетах (печном и разливочном) электросталеплавильного цеха двух металлургических заводов. В качестве основной задачи работы исследовались коэффициенты сочетаний для усилий в подкрановых балках и колоннах крайних рядов, учитывающие совместную работу кранов в изученных пролетах. Фактические коэффициенты сочетаний крановых нагрузок определялись по следующей формуле, пригодной для любых случайных нагрузок:

$$\psi = [S_{\Sigma}] / \sum_{i=1}^n [S_i], \quad (26)$$

где  $\sum_{i=1}^n [S_i]$  – сумма нагрузок (усилий) при невыгодном загрузении линии влияния сближенными вплотную кранами при условии, что давления катков каждого крана могут быть превышены с вероятностью  $Q(t)$ ;  $[S_{\Sigma}]$  – расчетная нагрузка (усилие) при учете фактического случайного процесса кранового загрузения, определяемая из условия той же вероятности превышения  $Q(t)$  за срок эксплуатации  $t$ :

$$[S_{\Sigma}] = \bar{S} + \hat{S}\gamma = \bar{S} + \hat{S} \sqrt{2 \ln \frac{t\omega}{2\pi Q(t)}}. \quad (27)$$

Здесь  $\gamma$  – нормированное отклонение расчетной крановой нагрузки  $[S_{\Sigma}]$ ;  $\omega, \bar{S}, \hat{S}$  – эффективная частота, математическое ожидание и стандарт стационарного нормального случайного процесса крановой нагрузки.

Из полученных таким образом коэффициентов сочетаний наибольшими оказались экспериментальные значения для кранов групп режимов 8К ( $\psi = 0,75...0,85$ ), которые регулярно поднимают грузы, близкие к номинальным, и имеют большие скорости передвижения. Несколько меньшими, в пределах  $\psi = 0,58...0,73$ , получены коэффициенты сочетаний для кранов групп режимов 7К. Наименьшие значения  $\psi = 0,38...0,40$  отмечены у кранов групп режимов 4К...6К. Эти краны относительно мало загружены, очень редко поднимают грузы, близкие к номинальным, сближаются относительно редко. Эти рекомендации были частично учтены в нормах СНиП, начиная с 1976 г., и перешли во все последующие издания СНиП «Нагрузки и воздействия».

В рамках диссертации С.А. Нищеты, выполненной в МИСИ в 1979–83 гг. под руководством Б.Н. Кошутина, выполнялись исследования коэффициентов сочетаний усилий от вертикальных крановых нагрузок для подкрановых балок и колонн крайних и средних рядов методом статистического моделирования [17]. Исследования производились для складских пролетов прокатных цехов. Примененное математическое моделирование позволило, в отличие от трудоемких экспериментальных методов, провести анализ влияния на крановые нагрузки ряда случайных и детерминированных факторов. Изменяемыми детерминированными параметрами при моделировании являлись шаг колонн, база мостовых кранов, расстояние от рольганга до исследуемой колонны и протяженность условной рабочей зоны. С.А. Нищета определял коэффициенты сочетаний вертикальных крановых воздействий на колонны от двух мостовых кранов, расположенных на одном крановом пути, и четырех кранов – на разных путях, по формуле:

$$\psi = S / (\gamma_f S_i^n), \quad (28)$$

где  $S$  – уровень вертикальных воздействий на колонну от двух или четырех мостовых кранов, соответствующий вероятности реализации  $P = 0,95$  за время  $T = 40$  лет;  $\gamma_f S_i^n$  – сумма произведений воздействий от каждого из «к» колес кранов при невыгодном загрузении линии влияния опорных усилий подкрановых балок на колонну на соответствующие значения (для каждого из пролетов) коэффициентов надежности  $\gamma_f$ .



Было выявлено, что коэффициенты сочетаний существенно зависят от длины линии влияния, соответствующего усилия и отношения пролета крана к его базе (табл. 1), их значения ниже соответствующих коэффициентов норм проектирования.

Таблица 1

Отношение пролета крана к его базе	При учете двух кранов		При учете четырех кранов	
	$\leq 4,5$	$> 4,5$	$\leq 4,5$	$> 4,5$
Длина линии влияния, м				
12	0,8	0,85	0,6	0,75
24		0,95	0,7	
36	0,85		0,8	0,85

Поэтому имелась (и по-прежнему имеется) возможность дифференциации и дальнейшего снижения коэффициентов сочетаний крановых нагрузок.

В работе, выполненной П.Д. Окуловым и Б.Ю. Уваровым в 1982–84 гг., была решена задача о совместном учете нагрузки от подвесных кранов со снеговой нагрузкой [50]. По разработанной методике вычислены коэффициенты сочетания для типовых стропильных ферм и предложено простое аналитическое выражение, аппроксимирующее зависимость коэффициента сочетания от величины нормативной снеговой нагрузки. Для проектирования рекомендованы следующие значения коэффициентов сочетания вертикальных нагрузок подвесных кранов:  $\psi_{K2} = 0,8$  – при учете нагрузок от двух кранов;  $\psi_{K4} = 0,6$  – при учете нагрузок от четырех кранов.

**Работы ПолтНТУ.** В Полтавском национальном техническом университете имени Юрия Кондратюка (ПолтНТУ) в течение ряда лет разрабатывалась проблема вероятностного описания нагрузок и их сочетаний. С.Ф. Пичугиным и В.А. Пашинским разработана рабочая методика вычисления коэффициентов сочетаний усилий от атмосферных и крановых нагрузок, представленных в виде квазистационарных случайных процессов [31], при постоянной и случайной прочности элементов. Для построения распределений усилий от совместного действия указанных нагрузок использовались выведенные формулы композиции 3-х различных распределений. Были выполнены расчеты для всех возможных комбинаций снеговых и ветровых районов Украины и характеристик мостовых кранов, при этом была установлена возможность применить для аппроксимации коэффициента сочетаний дробно-линейную функцию, предложенную В.А. Пашинским [24]:

$$\psi = \sum_{k=1}^3 \frac{C_k}{C_k(1-\beta_k) + \beta_k}, \quad (29)$$

где  $C_k$  – доля нагрузок в общем усилии, причем  $C_1$  – доля снеговой нагрузки,  $C_2$  – доля ветровой нагрузки,  $C_3$  – доля крановой нагрузки,  
 $\sum_{k=1}^3 C_k = 1$ .

В работах С.Ф. Пичугина и А.В. Махинько [32] на основе вероятностной модели абсолютных максимумов случайных процессов нагрузок была получена уточненная оценка коэффициентов сочетания  $\psi$  для наиболее распространенных нагрузок. В частности, для снеговой (доля влияния  $C_1$ ), ветровой (доля влияния  $C_2$ ) и крановой (доля влияния  $C_3$ ) нагрузок были получены формулы:

$$\begin{aligned} \psi_{13} &= \frac{C_1}{0.60 + 0.40C_1} + \frac{C_3}{2.36 - 1.36C_3}, \\ \psi_{23} &= \frac{C_2}{0.575 + 0.425C_2} + \frac{C_3}{3.30 - 2.30C_3}, \\ \psi_{12} &= \frac{C_1}{1.60 - 0.60C_1} + \frac{C_2}{1.64 - 0.64C_2}. \end{aligned} \quad (30)$$

При сочетании трех случайных нагрузок (крановой, ветровой и снеговой) зависимость коэффициента сочетания от долей влияния нагрузок имеет более сложный характер в виде вогнутой поверхности, изображённой на рис. 5.

**Другие исследования.** Задача сочетания нагрузок рассматривалась также в работах других исследователей. Так, в работе А.М. Айзена и Д.М. Ротштейна [1] изучен вопрос о сочетании ветровой и снеговой нагрузки, при этом методика Болотина [7] обобщена на тот случай, когда один из суммируемых случайных процессов (снеговая нагрузка) является нестационарным. В работе С.А. Тимашева и В.А. Штерензона [49] рассматривается вопрос о сочетании нагрузок, представленных в форме марковских процессов. Для снеговой, ветровой нагрузок на примере анализа метеоусловий Свердловска, а для крановой нагрузки – по замерам, выполненным А.Т. Яковенко [61] на складе готовой продукции листопрокатного цеха № 1 Карагандинского металлургического комбината, определены параметры соответствующих марковских

процессов размножения и гибели. Представляет определенный интерес рассмотрение вертикальной крановой нагрузки как трехмерного случайного процесса с такими переменными, как положение моста крана относительно расчетного поперечника, положение крановой тележки на мосту крана и вес поднимаемого груза. Показано, что оценки надежности, найденные с помощью предлагаемой методики, являются консервативными. Вместе с тем следует отметить, что сформулированный в этой работе подход к определению надежности при действии сочетаний случайных нагрузок не нашел себе сколь ни будь реального применения.

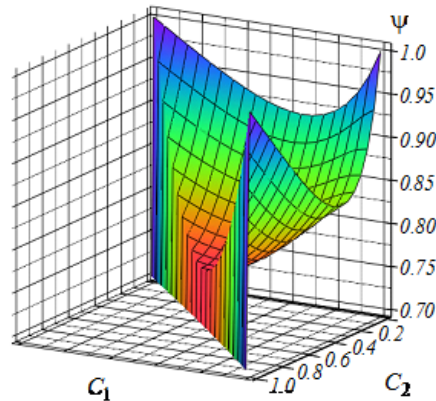


Рис. 5. Зависимость коэффициента сочетания от долей влияния нагрузок

### **Рекомендации норм проектирования**

Тот факт, что появление расчетного значения нагрузки является редким событием, был осознан инженерами давно, равно как и соображение о весьма малой вероятности совпадения во времени расчетных значений различных нагрузок. В связи с этим в нормы проектирования включается правило для определения эффекта различных одновременно действующих нагрузок.

Правило сочетаний представляет собой нормативное предписание, следуя которому по расчетным значениям многих кратковременных нагрузок можно найти расчетное значение комбинации, при этом оно не должно быть слишком сложным с тем, чтобы не затруднять расчеты. Такое правило в предельном случае, когда все кратковременные нагрузки, кроме одной, стремятся к нулю, должно позволять получать расчетное значение именно этой нагрузки, как результирующую величину комбинации. Кроме того, оно должно удовлетворять условию, чтобы спроектированная с его помощью конструкция имела примерно равную надежность для всех возможных сочетаний нагрузок.

**Использование единого коэффициента сочетаний.** Предположение о снижении нагрузки при многих составляющих учитывалось еще в методе допускаемых напряжений. Там сочетания нагрузок подразделялись на главные, дополнительные и особые нагрузки, которым соответствовали разные уровни допускаемых напряжений. Такой подход по сути своей нелогичен, поскольку эффект, который однозначно относится к свойствам нагрузки, оказался отнесен к свойствам материала. Кроме того, этот подход мало пригоден, поскольку введение разных уровней допускаемых напряжений влияет на совокупность всех нагрузок, включая и постоянно действующие нагрузки.

В методе расчетных предельных состояний было предложено ввести понижающий коэффициент сочетаний к эффекту совместного действия различных нагрузок. Наиболее простая возможность такого рода заключается в том, чтобы установить единый коэффициент для всех участвующих в сочетании нагрузок. Этот коэффициент зависит от числа  $m$  нагрузок, образующих комбинацию, и обозначается  $\psi_m$ . Для случая упругой работы конструкции с линейной зависимостью между нагрузками и напряжениями применительно к основному сочетанию это правило можно записать следующим образом:

$$C_m = P_d + \psi_m \sum_{i=1}^m P_i, \quad (31)$$

где через  $P_d$  обозначены постоянные нагрузки, а через  $P_i$  – временные (длительные и кратковременные) нагрузки.

Это или аналогичное ему правило использовалось в странах, входивших в СЭВ, в канадских нормах и в нормах Американского института бетона. В СНиП 2.01.07-85\* до 2010 года единый коэффициент сочетаний, зависящий от числа  $m$  временных нагрузок, принимается следующим:

$$\psi_m = \begin{cases} 1,00 & \text{при } m = 1, \\ 0,95 & \text{при } m \geq 2 \text{ для длительных нагрузок,} \\ 0,90 & \text{при } m \geq 4 \text{ для кратковременных нагрузок.} \end{cases} \quad (32)$$

По мнению Ю.Д. Сухова [47], коэффициенты сочетаний должна иметь каждая из трех групп исходных величин (1 – нагрузки, 2 – прочностные характеристики и 3 – геометрические характеристики) с тем, чтобы учет нескольких исходных величин одной группы был эквивалентен учету только одной такой величины. Поскольку в действующих нормах эта идея не реализована, то в качестве первого шага предлагается распространить

нормируемый коэффициент сочетаний  $\psi_s$  кратковременных нагрузок  $S_i$  и на длительные нагрузки  $Q_j$ , а также ввести коэффициент сочетаний  $\psi_g$  постоянной нагрузки  $G$  с суммой временных. Тогда предельное неравенство будет иметь вид:

$$\psi_g \left[ G + \psi_s \left( \sum_i S_i + \sum_j Q_j \right) \right] \leq R. \quad (33)$$

**Дифференцированные коэффициенты сочетаний.** Позже в актуализированной версии СНиП 2.01.07-85\* (СП 20.13330.2011) для постоянных  $P_d$ , временных длительных  $P_l$  и временных кратковременных  $P_t$  нагрузок было введено правило:

$$C_m = P_d + (\psi_{l1}P_{l1} + \psi_{l2}P_{l2} + \psi_{l3}P_{l3} + \dots) + (\psi_{t1}P_{t1} + \psi_{t2}P_{t2} + \psi_{t3}P_{t3} + \dots), \quad (34)$$

где коэффициенты сочетаний принимались такими:

$$\begin{aligned} \psi_{l1} &= 1,00; \psi_{l2} = \psi_{l3} = \dots = 0,95; \\ \psi_{t1} &= 1,00; \psi_{t2} = 0,90; \psi_{t3} = \psi_{t4} = \dots = 0,70. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь  $P_{l1}, P_{t1}$  – соответственно основная по степени влияния длительная и кратковременная нагрузки, а  $P_{l2}$  – вторая по степени влияния кратковременная нагрузка.

Рекомендации такого рода основывались на инженерном опыте, который лишь в некоторых случаях был подкреплен натурными наблюдениями (см., например, [29]). При этом не принимались во внимание различия в законах изменения нагрузок во времени и в весьма малой степени учитывались различия в протяженности действия тех или иных нагрузок.

Более подходящим и теоретически обоснованным является подход, который представлен в стандарте ISO и в Еврокоде на основе правил Туркстры. В этом случае экстремальное значение одной нагрузки комбинируется со значениями всех остальных для произвольного момента времени. При  $m$  временных нагрузках возникают  $m$  сочетаний такого рода, и определяющим является наибольшее значение из таких комбинаций.

Если экстремальную величину одной нагрузки (условно имеющей первый номер) представить зафиксированным в нормах расчетным значением, а величины других нагрузок в виде расчетных значений, умноженных на коэффициент сочетаний, то для  $m$  переменных нагрузок можно сформулировать следующее правило сочетаний:

$$C_m = P_d + P_1 + \sum_{i=2}^m \psi_i P_i. \quad (36)$$

В этом подходе имеется столько коэффициентов сочетаний, сколько есть случаев нагружений, и коэффициенты сочетаний можно представить в форме вектора  $\Psi = (\psi_1 \psi_2 \dots \psi_m)^T$ . Существенно, что в этом правиле коэффициент  $\psi_i$  зависит только от нагрузки, но при этом приходится рассматривать и учитывать одну за другой все переменные нагрузки в качестве «базисной нагрузки», уменьшая все другие нагрузки с помощью коэффициентов сочетаний. И правило выбора расчетного сочетания нагрузок записывается как

$$C_m = P_d + \max_k \left\{ P_k + \sum_{i=1, i \neq k}^m \psi_i P_i \right\}. \quad (37)$$

Упомянутая схема формирования расчетных сочетаний представлена в стандарте ISO и в Еврокоде.

Если коэффициенты сочетаний  $\psi_i$  зависят не только от нагрузки, к которой они относятся, но и от базисной нагрузки, а в связи с этим и от вида сочетания, то возможно дальнейшее уточнение правила сочетаний

$$C_m = P_d + \max_k \left\{ \sum_{i=1}^m \psi_{ik} P_i \right\}. \quad (38)$$

Совокупность коэффициентов сочетаний нагрузок можно представить в виде матрицы  $\Psi = [\psi_{ij}]$ . В симметричном случае, когда  $\psi_{ij} = \psi_{ji}$  на главной диагонали матрицы  $\psi_{ii} = 1$ , и такие значения могут быть интерпретированы как коэффициенты сочетаний некоторой нагрузки самой с собой. В случае с несимметричной матрицей реализуется правило сочетаний, рекомендуемое в работе [76] на основе теоретических исследований проблемы надежности.

**Специальные коэффициенты сочетаний.** Следует подчеркнуть, что для отдельных нагрузок, имеющих сложную природу и структуру, могут учитываться сочетания их составляющих и вводиться отдельные коэффициенты сочетаний. Такой нагрузкой, в частности, является нагрузка от мостовых кранов, для которой отечественные нормы регламентируют следующую процедуру:

— при учете двух кранов нагрузки от них необходимо умножать на коэффициент сочетаний:

$$\psi = 0,85 \text{ – для групп режимов работы кранов 1К – 6К;}$$

$$\psi = 0,95 \text{ – для групп режимов работы кранов 7К, 8К;}$$

— при учете четырех кранов нагрузки от них необходимо умножать на коэффициент сочетаний:

$$\psi = 0,7 \text{– для групп режимов работы кранов 1К – 6К;}$$

$$\psi = 0,8 \text{ – для групп режимов работы кранов 7К, 8К;}$$

— при учете одного крана вертикальные и горизонтальные нагрузки от него необходимо принимать без снижения.

Нормы Канады и США ([107], [63], [101]) еще более дифференцированно предписывают учитывать в расчетах различные коэффициенты сочетаний, учитывающие количество кранов и составляющие крановых нагрузок (табл. 2).

Указанные в табл. 2 сочетания крановой нагрузки по приведенному выше алгоритму (формула (37)) учитываются в общих сочетаниях нагрузок (7 вариантов), из которых укажем основные:

— сочетание, в котором крановая нагрузка считается основной (первой):

$$C_m = 1,25P_d + 1,5C_{cr} + 0,5P_s \text{ (или } 0,5P_w \text{ или } 0,5P_l);$$

— сочетание, в котором крановая нагрузка не является основной:

$$C_m = 1,25P_d + 1,5P_s \text{ (или } 1,4P_w \text{ или } 1,5P_l) + (0,5 \text{ или } 1,0)C_{cr}.$$

Здесь  $P_s, P_w, P_l$  – соответственно снеговая, ветровая и временная полезная нагрузки;  $C_{cr}$  – сочетание крановых нагрузок из табл. 2.

**Логика сочетаний.** Взаимосвязь между компонентами крановых воздействий такова, что между ними существуют логические связи типа «если ..., то...» и «или ..., или...». Действительно, тормозная сила колеса крана не может существовать, если отсутствует нормальное давление на этом колесе, или, например, нормы говорят, что нельзя одновременно учитывать продольное и поперечное торможение.

Таблиця 2

**Сочетания крановых нагрузок по нормам Канады и США**

Тип сочетания	Формула сочетания	Особенности применения
C1	$P_{vs} + 0,5P_{ss}$	Расчет на усталость
C2	$P_{vs} + P_{is} + P_{ss} + P_{ls}$	Один кран в каждом пролете
C3	$P_{vm} + P_{ss} + P_{ls}$	Любое количество кранов в одном или нескольких пролетах
C4	$P_{vm} + 0,5P_{sm} + 0,9P_{lm}$	Два сближенных крана только в одном пролете
C5	$P_{vm} + 0,5P_{sm} + C_{im} + 0,5P_{lm}$	По одному крану в каждом смежном пролете
C6	$P_{vm} + 0,5P_{sm}$	Максимум два крана в каждом смежном пролете, боковые силы от двух кранов только в одном пролете
C7	$P_{vs} + P_{is} + P_{bs}$	Удар крана о тупиковый упор
<p>Обозначения в таблице:</p> <p>Первые индексы: <i>v</i> – вертикальная нагрузка; <i>s</i> – горизонтальная нагрузка (боковая сила); <i>i</i> – динамическое воздействие; <i>l</i> – продольное торможение; <i>b</i> – нагрузка от удара крана о тупиковый упор.</p> <p>Вторые индексы: <i>s</i> – один кран; <i>m</i> – несколько кранов</p>		

Логические соотношения такого типа могут существовать и между другими нагрузками на конструкцию. Они определяются их физическим смыслом, и требованиями, регламентируемые различными нормативными документами. Среди соотношений между вариантами загрузки можно выделить четыре типа логических связей:

- независимые (например, собственный вес и полезная нагрузка);
- взаимоисключающие (например, ветер слева и ветер справа или же сейсмическое воздействие вдоль разных осей координат);
- сопутствующие (например, тормозные, требующие обязательного присутствия вертикальных крановых нагрузок);
- одновременно действующие (например, ветровой напор и отсос, заданные в различных загрузках).

Кроме того, загрузка может характеризоваться как знакопеременная, т. е. по физическому смыслу все его компоненты могут быть заменены на противоположно направленные. Типичным примером являются меняющиеся во времени сейсмические нагрузки, для которых по сути указывается амплитудное значение, а направление их действия может меняться на противоположное.



Логические соотношения между вариантами загружений было предложено отображать в виде ориентированного графа [2], [13]. Другие способы их описания и основы алгоритма их учета подробно представлены в монографии [26].

### **Перспективные направления исследований**

В заключение отметим, что в целом проблема сочетаний нагрузок не является полностью разрешенной и требует дальнейших исследований, в частности, в следующих направлениях:

- разработка корреляционных связей случайных сочетаемых нагрузок, поскольку в большинстве имеющихся работ нагрузки считаются независимыми, что не всегда отвечает действительности;
- учет в сочетаниях фактических, в ряде случаев достаточно сложных, распределений случайных нагрузок, в отличие от часто и не всегда обоснованно используемого нормального закона;
- детальный учет специфических особенностей ряда нагрузок, имеющих сложный характер изменения во времени, тесно связанных с технологией производства, особенностями эксплуатации конструкций – крановых, технологических, полезных и т. д.;
- включение в решение задачи сочетаний, кроме вероятностных свойств, суммы случайных процессов нагрузок, также учета других вероятностных параметров, определяющих совместное силовое воздействие;
- принятие во внимание логических соотношений между вариантами загружений;
- решение задачи сочетаний для предельных состояний второй группы при учете эксплуатационных расчетных значений нагрузок.

Здесь важно соблюсти правильное соотношение общего и частного, поскольку слишком специализированный подход хоть и может иметь практическую ценность, в малой степени влияет на общее продвижение в анализе проблемы.

### **Литература**

- [1] Айзен А. М. О сочетании случайных нагрузок на конструкции / А. М. Айзен, Д. М. Ротштейн // Строительная механика и расчет сооружений. – 1984. – № 6. – С. 13–16.
- [2] Артеменко В. В. Программа вычисления расчетных сочетаний усилий при сложной логической взаимосвязи между нагрузками / В. В. Артеменко, В. Н. Гордеев // Вычислительная и организационная техника в строительном проектировании. – 1967. – № 2. – С. 10–14.

- [3] Расчет строительных конструкций по предельным состояниям / [Балдин В. А., Гольденблат И. И., Коченов В. И., Пильдиш М. Я., Таль К. Э.]. – М. : Стройиздат, 1951. – 272 с.
- [4] Болотин В. В. Об оценке долговечности при стационарных случайных нагрузках / В. В. Болотин // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 1959. – № 9. – С. 38–46.
- [5] Болотин В. В. Применение статистических методов для оценки прочности конструкций при сейсмических воздействиях / В. В. Болотин // Известия АН СССР : инженерный журнал. – 1959. – Т. 27. – С. 58–69.
- [6] Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике / В. В. Болотин. – М. : Госстройиздат, 1961. – 278 с.
- [7] Болотин В. В. О сочетании случайных нагрузок, действующих на сооружение / В. В. Болотин // Строительная механика и расчет сооружений. – 1962. – №2. – С. 1–5.
- [8] Болотин В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений / В. В. Болотин. – М. : Стройиздат, 1971. – 351 с.
- [9] Болотин В. В. К статистической интерпретации норм расчета строительных конструкций / В. В. Болотин // Строительная механика и расчет сооружений. – 1977. – № 1. – С. 8–11.
- [10] Болотин В. В. О принципах назначения расчетных нагрузок на сооружения / В. В. Болотин, В. А. Отставнов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1979. – № 5. – С. 3–5.
- [11] Болотин В. В. К расчету конструкций глубоководных нефтепромысловых сооружений на сочетании нагрузок / В. В. Болотин, В. П. Чирков, А. Н. Щербаков // Строительная механика и расчет сооружений. – 1980. – № 5. – С. 6–10.
- [12] Васильев А. А. Об уточнении расчетных вертикальных нагрузок от мостовых кранов / А. А. Васильев, Ю. С. Кунин, А. Т. Яковенко // Промышленное строительство. – 1974. – № 6. – С. 31–33.
- [13] Гордеев В. Н. Выбор неблагоприятных сочетаний нагрузок как решение задачи многокритериальной оптимизации / В. Н. Гордеев, В. В. Артеменко, Е. И. Минькович // Численные методы расчета и оптимизации строительных конструкций. – М. : ЦНИИСК им.Кучеренко, 1989. – С. 26–32.
- [14] Дривинг А. Я. Рекомендации по применению экономико-статистических методов при расчетах сооружений с чисто экономической ответственностью / А. Я. Дривинг ; ЦНИИСК. – М. : 1972. – 61 с.

- [15] Екимов В. В. Приложение методов теории вероятностей к проблеме общей прочности корабля / В. В. Екимов // Труды НТО Судпрома. – 1957. – Том VII, № 11.
- [16] Кантор С. Л. О сочетании случайных нагрузок / С. Л. Кантор, С. А. Тимашев // Проблемы надежности в строительном проектировании (Свердловск). – 1972. – С. 81–86.
- [17] Кикин А. И. Повышение долговечности металлических конструкций промышленных зданий / А. И. Кикин, А. А. Васильев, Б. Н. Кошутин. – М. : Стройиздат, 1969. – 415 с.
- [18] Кошутин Б. Н. Исследование вертикальных и горизонтальных воздействий от мостовых кранов методом статистического моделирования / Б. Н. Кошутин, Ю. С. Кунин, С. А. Ницета // Облегченные конструкции покрытий зданий (Ростов-на-Дону). – 1979. – С. 5–10.
- [19] Кудзис А. П. Оценка надежности железобетонных конструкций / А. П. Кудзис. – Вильнюс : Мокслас, 1985. – 156 с.
- [20] Лосицкая К. С. Определение коэффициента сочетания нагрузок / К. С. Лосицкая // Исследования по строительной механике и методам расчета : научные труды ЦНИИСК им. Кучеренко. – 1981. – С. 129–136.
- [21] Лосицкая К. С. Определение коэффициента сочетания нагрузок вероятностным методом / К. С. Лосицкая // Строительная механика и расчет сооружений. – 1984. – № 1. – С. 8–13.
- [22] Материалы Международного совещания по расчету строительных конструкций (Москва, декабрь 1958) / АСИА СССР. – М. : Госстройиздат, 1961. – 260 с.
- [23] Матгозиев Х. М. Вероятностный метод решения задачи сочетания метеорологических и длительных нагрузок : автореферат дисс. ... канд. техн. наук / Х. М. Матгозиев ; МИСИ. – Москва, 1987. – 17 с.
- [24] Пашинский В. А. Методика определения коэффициентов сочетания усилий от снеговых, ветровых и крановых нагрузок / В. А. Пашинский // Строительная механика и расчет сооружений. – 1988. – № 2. – С. 73–76.
- [25] Перельмутер А. В. Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций / А. В. Перельмутер. – [3-е изд., перераб. и доп.] – М. : Издательство АСВ, 2007. – 256 с.
- [26] Нагрузки и воздействия на здания и сооружения / [Перельмутер А. В., Гордеев В. Н., Лантух-Лященко А. И., Махинько А. В., Пашинский В. А., Пичугин С. Ф. ]; под общ. ред. А. В. Перельмутера. – М. : Изд-во СКАД СОФТ, Изд-во АСВ, Изд-во ДМК Пресс, 2014. – 596 с.

- [27] Писчиков В. Г. Методика учета изменчивости и вероятности сочетаний ветровых, снеговых и крановых нагрузок / В. Г. Писчиков // Комиссия № 23 по основным инженерным требованиям к надежности сооружений Международного совета по научным исследованиям и обмену опытом в области строительства. – К. : 1967. – С. 1–22.
- [28] Пичугин С. Ф. Надежность стальных конструкций производственных зданий / С. Ф. Пичугин. – М. : Издательство АСВ, 2011. – 456 с.
- [29] Пичугин С. Ф. Крановые нагрузки на строительные конструкции / С. Ф. Пичугин. – Полтава : ООО «АСМИ», 2014. – 504 с.
- [30] Пичугин С. Ф. Сочетания кратковременных нагрузок, представленных в дискретной форме / С. Ф. Пичугин, А. И. Нечипоренко // Надежность и реконструкция – 88 : мат. конф. — Волгоград , 1988. –С. 47–48.
- [31] Пичугин С. Ф. Методика вычисления коэффициентов сочетаний нагрузок / С. Ф. Пичугин, В. А. Пашинский // Вопросы надежности железобетонных конструкций. – Куйбышев, 1982. – С. 94–97.
- [32] Пичугін С. Ф. Чисельно-аналітична методика розрахунку надійності елементів будівельних конструкцій / С. Ф. Пичугін, А. В. Махінько // Будівельні конструкції : зб. наук. пр. – К. : НДІБК, 2005. – С. 242–251.
- [33] Райзер В. Д. Теория надежности сооружений / В. Д. Райзер. – М. : Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2010. – 384 с.
- [34] Ржаницын А. Р. Метод определения допустимых нагрузок на сооружения / А. Р. Ржаницын // Исследовательские работы по инженерным конструкциям ; вып. II. – М. : Стройиздат, 1949. – С. 62–88.
- [35] Ржаницын А. Р. Статистическое обоснование расчетных коэффициентов / А. Р. Ржаницын // Материалы к теории расчета конструкций по предельному состоянию ; вып. II.— М. : Госстройиздат, 1949. – С. 18–52.
- [36] Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов / А. Р. Ржаницын. – [1-е изд.]. – М. : Стройиздат, 1949. – [2-е изд.]. – М. : Стройиздат, 1954. – 287 с.
- [37] Ржаницын А. Р. Расчет конструкций на сочетания нагрузок / А. Р. Ржаницын. // Проблемы надежности в строительном проектировании. – Свердловск, 1972. – С. 184–191.
- [38] Ржаницын А. . Учет сочетаний нагрузок, переменных во времени / А. Р. Ржаницын // Строительная механика и расчет сооружений. – 1976. – № 2. – С. 15–19.

- [39] Ржаницын А. Р. Перегрузки и их сочетания / А. Р. Ржаницын // Строительная механика и расчет сооружений. – 1977. – № 4. – С. 11–15.
- [40] Ржаницын А. Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность / А. Р. Ржаницын. – М. : Стройиздат, 1978. – 239 с.
- [41] Ржаницын А. Р. Учет совместного действия нагрузок на сооружения / А. Р. Ржаницын, Ю. Д. Сухов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1974. – № 4. – С. 40–43.
- [42] Снарскис Б. И. О связи метода оптимальных значений с методом предельных состояний / Б. И. Снарскис // Проблемы надежности в строительном проектировании. – Свердловск, 1972. – С. 206–211.
- [43] Снарскис Б. И. Основы теории запасов несущей способности строительных конструкций : автореф. дис. ... канд. техн. наук / Б. И. Снарскис ; ЦНИИСК. – М., 1969. – 35 с.
- [44] Стрелецкий Н. С. Об исчислении запасов прочности сооружений / Н. С. Стрелецкий // Сборник трудов МИСИ : № 1. – М. : Изд. МИСИ, 1938. – С. 4–32.
- [45] Стрелецкий Н. С. Основы статистического учета коэффициента запаса прочности сооружений / Н. С. Стрелецкий. – М. : Стройиздат, 1947. – 94 с.
- [46] Стрелецкий Н. С. К вопросу развития методики расчета по предельным состояниям / Н. С. Стрелецкий. – М. : МИСИ, 1966. – 30 с.
- [47] Сухов Ю. Д. Вероятностный метод определения коэффициента сочетаний постоянной нагрузки с временными / Ю. Д. Сухов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1985. – № 1. – С. 3–7.
- [48] Тимашев С. А. Надежность больших механических систем / С. А. Тимашев. – М. : Наука, 1982. – 184 с.
- [49] Тимашев С. А. Практические методы расчета надежности механических систем при действии сочетания случайных нагрузок / С. А. Тимашев, В. А. Штерензон // Исследования в области надежности инженерных сооружений : сборник трудов. – Л. : ЛенПСП, 1979. – С. 36–51.
- [50] Уваров Б. Ю. Методика исследования совместного воздействия нагрузок от подвесных однопролетных кранов и снега на покрытие промышленного здания / Б. Ю. Уваров, П. Д. Окулов // Строительство и архитектура : известия вузов. – 1982. – № 11. – С. 5–9.
- [51] Ужполявичус Б. Б. Вероятностно-статистический расчет при проектировании и контроле сопротивления строительных

- конструкцій / Б. Б. Ужполявичус // Строительная механика и расчет сооружений. – 1985. – № 3. – С. 3–7.
- [52] Федоров Е. И. Расчет конструкций на действие нагрузок, представленных в виде дискретных марковских процессов / Е. И. Федоров // Расчет строительных конструкций : труды ЦНИИСК ; вып. 42. – М. : Стройиздат, 1976. – С. 132–143.
- [53] Федоров Е. И. Вероятностно-оптимизационный расчет конструкций находящихся под действием нескольких нагрузок / Е. И. Федоров // Исследование нагрузок на сооружения и надежность строительных конструкций. – М. : ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко, 1986. – С. 108–124.
- [54] Федоров Е. И. О выборе коэффициента сочетания нагрузок / Е. И. Федоров, К. С. Лосицкая // Строительная механика и расчет сооружений. – 1980. – № 1. – С. 18–21.
- [55] Федоров Е. И. Построение функции надежности строительных конструкций, находящихся под действием нескольких нагрузок / Е. И. Федоров, Х. М. Матгозиев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1985. – № 3. – С. 5–8.
- [56] Хоциалов Н. Ф. Запасы прочности / Н. Ф. Хоциалов // Строительная промышленность. – 1929. – № 10. – С. 840–844.
- [57] Чирков В. П. Вопросы надежности механических систем / В. П. Чирков. – М. : Знание, 1981. – 121 с.
- [58] Чирков В. П. К определению расчетных сочетаний нагрузок / В. П. Чирков // Строительная механика и расчет сооружений. – 1980. – № 3. – С. 10–14.
- [59] Чирков В. П. Применение методов теории надежности к обоснованию расчетных нагрузок на сооружения / В. П. Чирков, С. А. Кисляков // Труды МЭИ. – 1982. – Вып. 578. – С. 90–98.
- [60] Шпете Г. Надежность несущих строительных конструкций / Г. Шпете. – М. : Стройиздат, 1994. – 288 с.
- [61] Яковенко А. Т. Изучение сочетаний вертикальных нагрузок от мостовых кранов в производственных зданиях : автореф. дис. ... канд. техн. наук / А. Т. Яковенко ; МИСИ. – М. :, 1975. – 13 с.
- [62] Ang A. H-S., Tang W. H. Probability Concepts in Engineering Planning and Design / A. H-S. Ang, W. H. Tang. – New York : John Wiley, 1975. – 368 p.
- [63] Minimum Design Loads for Building and Other Structures : ASCE/SEI 7-10: – Reston : American Society of Civil Engineers, 2010. – 124 p. – (American National Standard)
- [64] Augusti G. Probabilistic methods in structural engineering / G. Augusti, A. Baratta, F. Casciati. – London : Chapman & Hall, 1984. – 570 p. – (Русский перевод: Аугусти Г., Баратта А., Кашиати Ф.)

- Вероятностные методы в строительном проектировании. – М. : Стройиздат, 1988. – 584 с.)
- [65] Ballio G. Combination values of the actions for level 1 verifications their evaluation via fully probabilistic methods / G. Ballio, F. Casciati, I. Faravelli // Proceedings of the 3-th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR-81). – Amsterdam : Elsevier, 1982. – P. 627–637.
- [66] Benjamin J. R. Statistics and Decision for Civil Engineers / J. R. Benjamin, C. A. Cornell. – New York : McGraw-Hill, 1970. – 684 p.
- [67] Cornell C. A. Bounds on the Reliability of Structural Systems / C. A. Cornell // American Society of Civil Engineers : Journal of the Structural Division ASCE. – February, 1967. – Vol. 93, No. ST. – P. 171–200.
- [68] Cornell C. A. Structural Safety Specifications Based on Second Moment Reliability Analysis/ C. A. Cornell // Symposium on Concept of Safety (London, 1969) : Final report IABSE. – Zurich, 1969. – P. 235–246.
- [69] Cornell C. A. Vector process models for system reliability / C. A. Cornell, D. Veneziano, M. Grigoriu // Journal of Engineering Mechanics. – 1977. – Vol. 103, Issue 3. – P. 441–460.
- [70] Ditlevsen O. Generalized Second Moment Reliability Index / O. Ditlevsen // Journal of Structural Mechanics. – 1979. – Vol. 7, № 4. – P. 435–451.
- [71] Ditlevsen O. Probabilistic modeling of man-made load processes and their individual and combined effects / O. Ditlevsen, H. Madsen // Proceedings of the 3-rd International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR-81). – Amsterdam : Elsevier, 1982. – P. 103–134.
- [72] Ditlevsen O. Structural reliability methods / O. Ditlevsen, H. Madsen. – Chichester : John Wiley, 1996. – 372 p.
- [73] Elishakoff I. Probabilistic Theory of Structures / I. Elishakoff. – New York : Dover Publications, 1999. – 502 p.
- [74] Ellingwood B. Probability based Criteria for Structural Design / B. Ellingwood // Structural Safety. – 1982. – Vol. 1. – P. 15–26.
- [75] Ellingwood B. Probability Based Load Criteria. Load Factors and Load Combinations / B. Ellingwood, J. G. MacGregor, T. V. Calambos, C. A. Cornell // Proceedings of ASCE : Journal of Structural Division. – 1982. – Vol. 108, No. ST5. – P. 978–997.
- [76] Ellingwood B. Combining snow and earthquake loads for limit states design / B. Ellingwood, D. Rosowsky // Journal of Structural Engineering. – 1996. – Vol. 122, Issue 11. – P. 1364–1368.
- [77] El-Reedy M. Advanced Materials and Techniques for Reinforced Concrete Structural Reliability / M. El-Reedy. – Boca Raton, FL : CPC Press, 2009. – 314 p.

- [78] Eurocode. Basis of structural design : EN 1990:2001. – Brussels : CEN, 2002. – 89 p. – (European Standard).
- [79] Faravelli I. A proposal on load combination for level 1 formats / I. A. Faravelli // Engineering Structures. – 1982. – Vol. 4. – P. 197–206.
- [80] Ferry-Borges J. Structural safety / J. Ferry-Borges, M. Castanheta. – Lisbon : Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, 1968/ – 150 p. – [2nd edit, 1971. – 217 p.].
- [81] Fiessler B. Entwicklung von Regeln zur Kombination stochastischer Lasten für die Tragwerksbemessung / B. Fiessler. – München : Sonderforschungsbereich 96; Laboratorium für d. Konstruktiven Ingenieurbau, Techn. Univ. Dissertation, 1983. – 98 S.
- [82] Freudenthal A. M. Allowable Stress and Safety of Structures / A. M. Freudenthal // Journal of Association of Engineers in Palestine, 1938. – P. 149–153 (на ивриті).
- [83] Freudenthal A. M. The safety of structures / A. M. Freudenthal // Proceedings of the ASCE. – 1947. – Vol. 112, № 1. – P. 125–180 – (Preprint / Transactions of the ASCE ; Paper No. 2296 ; 1945).
- [84] Freudenthal A. M. The safety of structures / A. M. Freudenthal // Transactions of the ASCE. – 1947. – Vol. 112. – P. 125–159.
- [85] Freudenthal A. M. Safety and the Probability of Structural Failure / A. M. Freudenthal // Transactions of the ASCE. – 1954. – Vol. 80, Proc. Paper No. 468.
- [86] Freudenthal A. M. Safety and Probability of Structural Failure / A. M. Freudenthal // Transactions of the ASCE. – 1956. – Vol. 121, Proc. Paper No. 2843. – P. 1337–1375.
- [87] Freudenthal A. M. The Analysis of Structural Safety / A. M. Freudenthal, J. M. Garrelts, M. Shinozuka // American Society of Civil Engineers : Journal of the Structural Division. – February 1966. – Vol. 92, No. ST1. – P. 267–325.
- [88] Galambos T. V. Probability-based load criteria: assessment of current design practice / T. V. Galambos, B. Ellingwood, J. G. MacGregor, C. A. Cornell // Proceedings of ASCE : Journal of the Structural Division. – 1982. – Vol. 108, No. ST5. – P. 959–977.
- [89] Gaver D. P. On Combinations of Random Loads / D. P. Gaver, P. A. Jacobs // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1981. – Vol. 40, No. 3. – P. 454–466.
- [90] Designers Guide to Eurocode 1: Actions on Buildings: EN 1991-1-1 and 1-3 to 1-7. Actions on Structures: General Rules and Actions on Buildings (and 1991-1.5 to 1.7) / [Gulvanessian H.; Calgaro J-A., Formichi P., Harding, G.] – London : Thomas Telford Publishing, 2009. – 312 p.



- [91] Hasofer A. M. Exact and Invariant Second-Moment Code Format / A. M. Hasofer, N. C. Lind // American Society of Civil Engineers : Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1974. – Vol. 100, No. EM1. – P. 111–121.
- [92] Housner G. W. Characteristic of strong-motion earthquakes / G. W. Housner // Bulletin of Seismic Society of America. – 1947. – Vol. 43, №2. – P. 19–31.
- [93] Pearce Howard T. Stochastic Combination of Load Effects / Howard T. Pearce, Y. K. Wen // Journal of Structural Engineering : Proc. ASCE. – 1984. – Vol. 110. – P. 1613–1629.
- [94] General principles on reliability for structures : ISO 2394:1998. – European Standard Agency, 1999. – 72 p.
- [95] Iwankiewicz R. Combination of Random Loads Idealized as Intermittent, Non-Adjoining Processes / R. Iwankiewicz // Proceedings of the 8th IFIP WG 7.5 Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems (Poland). – Krakow, 1998. – P. 173–180.
- [96] Kanda J. Simplified load combination factor for snow load / J. Kanda // Structural Safety. – 1993. – Vol. 13, Issues 1–2. – P. 45–51.
- [97] Konishi I. Safety and reliability analysis of long span suspension bridges subjected to earthquake and wind forces / I. Konishi, N. Takaota // Proceeding of Second International Conference on Structural Safety and Reliability. – Düsseldorf, 1977.
- [98] Larrabee R. D. Combination of various load processes / R. D. Larrabee, C. A. Cornell // Journal of Structural Division ; ASCE. – 1981. – Vol. 107. – P. 223–239.
- [99] Lewis E. V. A study of midship bending moments in irregular heat seas / E. V. Lewis // Journal of Ship Research. – 1957. – Vol.1, №1. – P. 30–47.
- [100] Lind N. C. The Design of Structural Design Norms / N. C. Lind // American Society of Civil Engineers : Journal of Structural Mechanics. – 1973. – Vol. 1, No. 3. – P. 357–370.
- [101] MacCrimmon R. A. Crane-Supporting Steel Structures. Design Guide / R. A. MacCrimmon // Canadian Institute of Steel Construction. – Niagara Falls, Ontario, Canada : Acres International, 2005 – 122 p.
- [102] Madsen H. O. Load Models and Load Combinations : Report No. R 113 / H. O. Madsen // Technical University of Denmark. – Lyngby : Struct. Res. Lab, 1979.
- [103] Madsen H. O. Methods of structural safety / H. O. Madsen, S. Krenk, N. C. Lind. – Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1986. – 312 p.
- [104] Maier M. Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften anstatt nach zulässigen Spannungen / M. Maier. – Berlin : Springer Verlag, 1926. – 73 p.

- [105] Melchers R. Structural reliability analysis and prediction / R. Melchers. – Chichester : Ellis Horwood Wiley, 1999. – 416 p.
- [106] Murzewski J. W. Combination of actions for codified design / J. W. Murzewski // Structural Safety. – 1993. – Vol. 13, Issues 1–2. – P. 113–135.
- [107] Structural and Crane Load. Design Criteria for Steel Building Systems : NBCC:2005 – Ottawa : National Research Council of Canada, 2010. – (National Building Code of Canada).
- [108] Östlund L. Load combination in codes / L. Östlund // Structural Safety. – 1993. – Vol. 13, Issues 1–2. – P. 83–92.
- [109] Plot M. Nor sur la nation de coefficient de securite / M. Plot // Annals des ponts et chaussées. – Paris , 1936. – Vol. II, Fase 7.
- [110] Poutanen T. Load combination / T. Poutanen // IABSE Workshop on Safety, Failures and Robustness of Large Structures (Tuusula, Finland, February 14-15, 2013).
- [111] Probabilistic Model Code [Электронный ресурс] – Joint Committee on Structural Safety, 2000. – Режим доступа: [http://www.jcss.byg.dtu.dk/Publications/Probabilistic\\_Model\\_Code.aspx](http://www.jcss.byg.dtu.dk/Publications/Probabilistic_Model_Code.aspx). – Название с экрана.
- [112] Pugsley A. G. A Philosophy of Aeroplane Strength Factors / A. G. Pugsley // British Aeronautical Research Committee. Report and Memorandum. – 1942. – No. 1906.
- [113] Rackwitz R. Reliability of Systems under Renewal Pulse Loading / R. Rackwitz // Proceedings of ASCE : Journal of Engineering Mechanics. – 1985/ – Vol. 111, No. 9. – P. 1175–1184.
- [114] Rackwitz R. On the combination of non-stationary rectangular wave renewal processes / R. Rackwitz // Structural Safety. – 1993. – Vol. 13, Issues 1–2. – P. 21–28.
- [115] Rackwitz R. An algorithm for the calculation of structural reliability under combined loading / R. Rackwitz, B. Flessler // Berichte zur Sicherheitsthorie der Bauwerke. – München : Lab. f. Konstr. Ing. – 1977. – P. 489–494.
- [116] Rackwitz R. Structural reliability under combined random load sequences / R. Rackwitz, B. Flessler // Computers & Structures. – 1978. – Volume 9, Issue 5. – P. 489–494.
- [117] Shinizuka M. Probability of structural failure under random loading / M. Shinizuka // American Society of Civil Engineers : Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1964/ – Vol. 80. – P. 147–170.
- [118] Shinozuka M. Notes on the Combinations of Random Loads / M. Shinozuka // Probability Based Load Criteria for the Design of Nuclear Structures : A Critical Review of the State-of-the-Art. – February 1981. – BLN Report No. NUREG/CR 1979.

- [119] Shinozuka M. Stochastic Characterization of Loads and Load Combinations / M. Shinozuka // Proceedings of the 3-th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR-81). – Amsterdam : Elsevier, 1982. – P. 57–76.
- [120] Śniady P. A train of pulses in load modeling / P. Śniady, R. Sieniawska, S. Zukowski // Structural Safety. – 1993. – Vol. 13, Issues 1–2. – P. 29–43.
- [121] St. Denis M. On the motions of ships in confused seas / M. St. Denis, W.J. Pierson // Transactions : The Society of Naval Architects and Marine Engineers (SNAME). – 1953. – Vol.61. – P. 280–357.
- [122] Sýkora M. Comparison of Load Combination Models for Probabilistic Calibrations / M. Sýkora, M. Holický // Proceedings of 11th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering ICASP-11 (Netherlands). – Leiden : Taylor & Francis/Balkema, 2011. – P. 977–985.
- [123] Thoft-Christensen P. Load Combinations / P. Thoft-Christensen, M. J. Baker // Structural Reliability Theory and Its Applications. – Berlin-Heidelberg : Springer, 1982. – P. 161–175.
- [124] Thoft-Christensen P. Structural reliability theory and its applications / P. Thoft-Christensen, M. J. Baker. Berlin : Springer, 1982. – 267 p.
- [125] Tichy M. Combination of Structural Action (level 1 approach) / M. Tichy // Acta Technika ČSAV. – 1974. – № 2.
- [126] Todinov M.T. Reliability and risk models: setting reliability requirements / M. T. Todinov. – New York : John Wiley, 2005. – 322 p.
- [127] Turkstra C. I. Load Combinations in Codified Structural Design / C. I. Turkstra, H. O. Madsen // Proceedings of ASCE : Journal of the Structural Division. – 1980. – Vol. 106, No. ST12. – P. 2527–2543.
- [128] Turkstra C. I. Probabilistic design formats. Theory of Structural Design Decisions / C. I. Turkstra // Solid Mechanics Division : Studies ; Series No. 2. – Waterloo, ONT : University of Waterloo, 1970.
- [129] Turkstra C. J. Theory of structural design decision // Solid Mechanics Division : Study No. 2. – Waterloo, ONT. : University of Waterloo, 1970.
- [130] Wang Zijiang. A New Combination Method of Temperature and Vehicle Load Effects Based on SHM Data / Zijiang Wang, Hu Rongpan, Li Shunlong // Advanced Engineering Forum. – 2012/ – Vol. 5. – P. 157–161.
- [131] Wen Y. K. Statistical combination of extreme loads / Y. K. Wen // ASCE : Journal of Structural Division. – 1977. – Vol. 103. – P. 1079–1093.
- [132] Wen Y. K. A Clustering Model for Correlated Load Processes / Y. K. Wen // ASCE : Journal of Structural Engineering. – 1981. – Vol. 107, No. 5. – P. 965–983.

- [133] Wen Y. K. Structural load modeling and combination for performance and safety evaluation *Developments in civil engineering* / Y. K. Wen. – Amsterdam : Elsevier, 1990.
- [134] Wen Y. K. Reliability-based design under multiple loads / Y. K. Wen // *Structural Safety*. – 1993. – Vol. 13, Issues 1–2. – P. 3–19.
- [135] Wierzbicki W. Safety of Structures as a Probability Problem / W. Wierzbicki. – Warsaw : Przegląd Techniczny, 1936. – 690 p.
- [136] Yasuhiro Mori. Probability models of combinations of stochastic loads for limit state design / Mori Yasuhiro, Kato Takahiro, Murai Kazuko // *Structural Safety*. – 2003. – Vol. 25. – P. 69–97.
- [137] Wen Yi-Kwei. Statistical Combination of Extreme Loads / Yi-Kwei Wen // *Journal of the Structural Division*. – 1977. – Vol. 103, No. 5. – P. 1079–1093.
- [138] Wen Yi-Kwei. Stochastic Dependencies in Load Combination / Yi-Kwei Wen // *Proceedings of the 3-th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR-81)*. – Amsterdam : Elsevier, 1982. – P. 89–103.

*Надійшла до редакції 23.07.2015 р.*