

УДК 624.072

## Залежність висоти пружного ядра від значення згинального моменту для несиметричного двотавру

Перетяцько Ю.Г., к.т.н., Ляшенко І.Ю., к.т.н.

Харківський національний університет будівництва та архітектури, України

**Анотація.** В аналітичному виді отримано залежності висоти пружного ядра від значення згинального моменту для несиметричних двотаврів. Ці залежності є необхідними для визначення прогинів пружно-пластичних балок із несиметричних двотаврів.

**Аннотация.** В аналитическом виде получены зависимости высоты упругого ядра от значения изгибающего момента для несимметричных двутавров. Эти зависимости необходимы для определения прогибов упругопластических балок из несимметричных двутавров.

**Abstract.** In analytical form the relation of elastic core height from bending moment values for asymmetric I-beams are received. These relations are required to determine deflections of elastic-plastic beams made of unsymmetrical I-beams.

**Ключові слова:** несиметричні двотаври, пружно-пластичні балки, згинаючий момент, пружне ядро.

**Стан проблеми.** Проблема полягає в тому, що існуючі норми [1] з проектування сталевих конструкцій не дають відповіді на питання: які прогини балок мають місце при їх розрахунку у пружно-пластичній стадії? Також ця проблема є невисвітленою і в сучасній навчальній літературі [2–5].

**Мета роботи** – в аналітичному вигляді дати теоретичну основу для відповіді на це запитання.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Ключова залежність між прогином балки  $w$  та напіввисотою пружного ядра  $c$  її поперечного перерізу має вид [6–8]:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{\sigma_T}{E \cdot c}. \quad (1)$$

У свою чергу розмір  $c$  залежить від величини згинального моменту  $M$  і при поперечному згині є функцією координати  $x$ , що змінюється по довжині балки:

$$c(x) = f(M(x)). \quad (2)$$

Інтегрування (1) в аналітичному вигляді є можливим лише для обмеженої кількості задач [6, 7]. Чисельні крокові методи [7, 8] дозволяють інтегрувати рівняння (1) без будь-яких обмежень. Найбільш сучасними і універсальними, у тому числі, й для згаданих задач, є чисельні методи, що спираються на метод скінченних елементів (МСЕ) [9] і, на відміну від виразу (1), дозволяють ураховувати вплив дотичних напружень на значення прогинів пружно-пластичних балок при поперечному згині. У той же час слід зазначити, що цей вплив для значної кількості практичних задач є досить незначним, і вираз (1) для них залишається прийнятним.

Конкретні вирази функції (2) для прямокутних перерізів наведені, зокрема, в [6, 10–12], а для симетричних двотаврових перерізів у дещо різних формах – у [7, 8].

**Ціль дослідження** полягає в отриманні аналітичного виразу функції (2) для несиметричних двотаврових перерізів, оскільки у відомій авторам літературі він є відсутнім.

**Постановка задачі.** Розв'язок задачі ґрунтується на ідеалізованій діаграмі Прандтля для ідеального пружно-пластичного матеріалу, яка прийнята також в [1]. Також вважається, що в перерізах, де розвиваються пластичні деформації, вплив поперечної сили несуттєвий, і ним нехтуємо. Розв'язок задачі будемо для статично визначених балок, тобто функцію, що описує зміну згинального моменту по довжині балки  $M=M(x)$ , вважаємо відомою. Спочатку балка працює пружно, але при збільшенні на неї навантаження на її ділянці, де  $M=M_{max}$ , у поперечних перерізах за межами пружного ядра починають розвиватися пластичні деформації, які, як і при пружній роботі, описуються гіпотезою плоских перерізів.

**Розв'язок задачі.** Розв'язок даної задачі для несиметричних двотаврових перерізів є більш складним, ніж для симетричних, та має наступні особливості:

- 1) нейтральна вісь  $z_I-z_I$  не співпадає з центральною віссю  $z-z$  (рис. 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12), тому перш за все необхідно визначити її положення;
- 2) третя, пружно-пластична стадія НДС балки, за якої існує нерівність  $M_T < M_{pl} < M_{lim}$ , для більшості несиметричних двотаврових перерізів включає в себе декілька проміжних стадій.

Для несиметричного двотавру поставлену задачу будемо розв'язувати, виходячи з того, що нейтральна вісь  $z_I-z_I$ , а також центральна вісь  $z-z$ , по відношенню до середини стінки двотавру є дещо зміщеними до верхньої полиці (рис. 1, 3, 5, 7, 9, 11).

У даній задачі для **несиметричного двотавру** у залежності від значення згинального моменту  $M$ , що зростає при навантаженні, маємо **6 можливих випадків**:

- **випадок 1:** максимальні нормальні напруження у крайніх волокнах нижньої полиці досягли границі текучості  $\sigma_{p,max} = \sigma_T$  (рис. 1) – границя лінійно-пружної роботи та початку текучості (аналог 2-ї стадії для симетричних перерізів);
- **випадок 2:** пластичні деформації та відповідні їм напруження  $\sigma_T$  поширені на частині нижньої полиці; верхня полиця – у пружній стадії  $\sigma < \sigma_T$  (рис. 3);
- **випадок 3:** пластичні деформації у нижній полиці та у нижній частині стінки (рис. 5);
- **випадок 3а:** пластичні деформації та відповідні їм напруження  $\sigma_T$  частково поширені на обидві полиці; цей випадок має місце замість випадку 3 для двотаврів із **незначною асиметрією** (рис. 12);
- **випадок 4:** пластичні деформації та відповідні їм напруження  $\sigma_T$  у нижній полиці та у нижній частині стінки, а також частково у верхній полиці (рис. 7);
- **випадок 5:** пластичні деформації та відповідні їм напруження  $\sigma_T$  – у полицях та на частині стінки; пружне ядро лише у межах стінки (рис. 10).

Розглянемо послідовно ці випадки.

**Випадок 1: максимальні нормальні напруження у крайніх волокнах нижньої полиці досягли границі текучості  $\sigma_{max,p} = \sigma_T$ .**

Рівняння  $\sigma_{max,p} = \sigma_T$  (рис. 1) вказує на досягнення границі лінійно-пружної роботи перерізу та початку текучості (аналог 2-ї стадії для симетричних перерізів).

За умови пружної роботи за виразами (3), (4), (5) для несиметричного двотавру маємо відповідно: розмір  $y_1$ , що визначає положення центральної осі z-z (рис. 1)

$$y_1 = \frac{b_{f,\varepsilon} \cdot t_{f,\varepsilon} \left( h - \frac{t_{f,\varepsilon}}{2} \right) + b_{f,H} \cdot t_{f,H} \frac{t_{f,H}}{2} + t_w \cdot h_w \left( \frac{h_w}{2} + t_{f,H} \right)}{b_{f,\varepsilon} \cdot t_{f,\varepsilon} + b_{f,H} \cdot t_{f,H} + t_w \cdot h_w}; \quad (3)$$

момент інерції перерізу  $J_z$

$$J_z = \frac{b_{f,\delta} \cdot t_{f,\delta}^3}{12} + b_{f,\delta} \cdot t_{f,\delta} \left( h - y_1 - \frac{t_{f,\delta}}{2} \right)^2 + \frac{b_{f,H} \cdot t_{f,H}^3}{12} + b_{f,H} \cdot t_{f,H} \left( y_1 - \frac{t_{f,H}}{2} \right)^2 + \frac{t_w \cdot h_w^3}{12} + t_w \cdot h_w \left( y_1 - t_{f,H} - \frac{h_w}{2} \right)^2 \quad (4)$$

та пружні моменти опору для верхніх  $W_z^e$  та нижніх  $W_z^H$  крайніх волокон

$$W_z^e = \frac{J_z}{(h - y_1)}; \quad W_z^H = \frac{J_z}{y_1}. \quad (5)$$

Ураховуючи прийняту для перерізу умову несиметричності, при значенні згинального моменту  $M = M_T$  у нижніх крайніх волокнах розтягнутої нижньої полиці максимальні нормальні напруження першими досягнуть значення

$$\sigma_{\max,p} = \sigma_T, \quad (6)$$

При цьому сам момент пов'язаний з цими напруженнями залежністю:

$$M_T = \sigma_T \cdot W_z^H. \quad (7)$$

Оскільки в наступних випадках задачі, виходячи із заданої епюри нормальних напружень та попереднього визначення положення нейтральної осі, ми будемо безпосередньо обчислювати відповідний згинальний момент  $M$ , нижче продемонструємо цей підхід для даного випадку, обчисливши значення  $M_T$ .

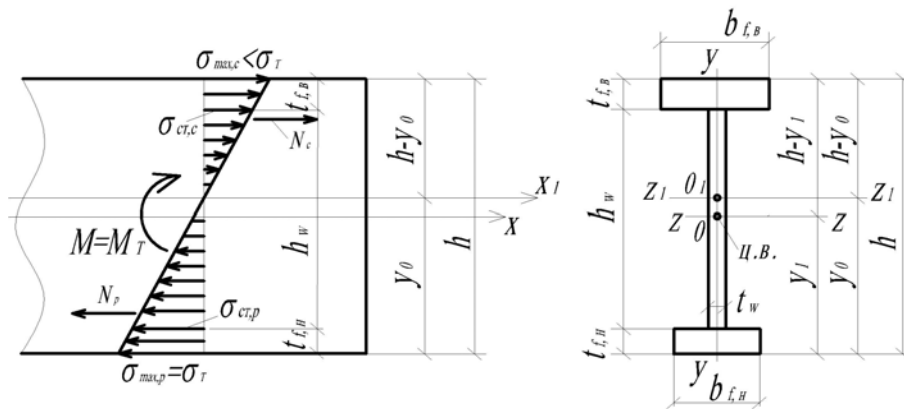


Рис. 1. До обчислення згинального моменту  $M = M_T$  для несиметричного двотавру. Випадок 1-ий: границя пружної роботи

Максимальні нормальні стискальні напруження  $\sigma_{c,max}$  у крайніх волокнах верхньої полиці подамо у наступному вигляді з використанням умови подібності відповідних трикутників на епюрі  $\sigma$ :

$$\sigma_{max,c} = \sigma_T \frac{(h - y_0)}{y_0}. \quad (8)$$

Покажемо, що нейтральна вісь  $z_1$ -  $z_1$  у пружній стадії співпадає з центральною віссю  $z$ - $z$  (рис. 1). Для цього запишемо умову, що сумарна поздовжня сила в перерізі при згині (як чистому, так і поперечному) дорівнює нулю:

$$N = N_p - N_c = 0, \text{ тобто } N_p = N_c, \quad (9)$$

де  $N_p$  – поздовжня сила, що є рівнодіючою розтягувальних напружень;  $N_c$  – протилежна за напрямком до  $N_p$  поздовжня сила, що є рівнодіючою стискальних напружень.

Як видно із рис. 2, кожна із сил  $N_p$  та  $N_c$  має по 2 складові:

$$N_p = N_1 + N_2; \quad (10)$$

$$N_c = N_3 + N_4. \quad (11)$$

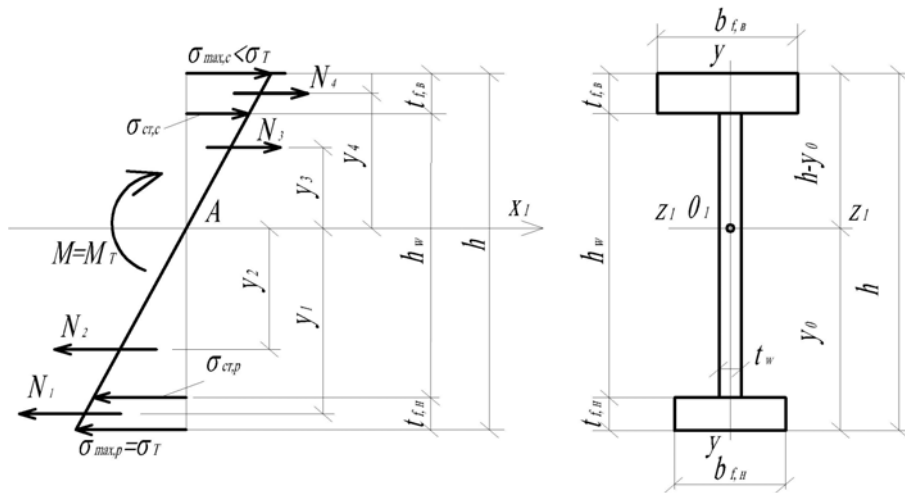


Рис. 2. До обчислення згинального моменту  $M = M_T$  за заданою епюрою нормальних напружень. Випадок 1-ий: границя пружної роботи

Сили  $N_1$ ,  $N_4$  діють відповідно у нижній та верхній полицях. На епюрі  $\sigma$  ці ділянки є прямокутними трапеціями з основами: більша –  $\sigma_T$  та  $\sigma_{\max,c}$ ; верхня –  $\sigma_{cm,p}$  та  $\sigma_{cm,c}$ .

Сили  $N_2$ ,  $N_3$  діють у стінці. На епюрі  $\sigma$  їх ділянки є прямокутними трикутниками з основами: нижня –  $\sigma_{cm,p}$  та  $\sigma_{cm,c}$ .

Вирази для напружень  $\sigma_{cm,p}$  та  $\sigma_{cm,c}$ , що діють на межах нижньої та верхньої полиць із стінкою, знаходимо із умови подібності трикутників (див. епюру  $\sigma$ ):

$$\sigma_{cm,p} = \sigma_T \frac{(y_0 - t_{f,h})}{y_0}; \quad (12)$$

$\sigma_{cm,c} = \sigma_{\max,c} \frac{((h - y_0) - t_{f,e})}{(h - y_0)}$ , або з урахуванням (8):

$$\sigma_{cm,c} = \sigma_T \frac{(h - y_0)}{y_0} \cdot \frac{((h - y_0) - t_{f,e})}{(h - y_0)} = \sigma_T \frac{(h - y_0 - t_{f,e})}{y_0}. \quad (13)$$

Безпосередньо за рис. 2 можемо записати:

$$N_1 = \frac{1}{2}(\sigma_T + \sigma_{cm,p})b_{f,h} \cdot t_{f,h}; \quad N_2 = \frac{1}{2}\sigma_{cm,p} \cdot t_w(y_0 - t_{f,h});$$

або з урахуванням (12):

$$N_1 = \frac{1}{2}(\sigma_T + \sigma_T \frac{(y_0 - t_{f,h})}{y_0})b_{f,h} \cdot t_{f,h} = \frac{1}{2}\sigma_T \left[ 1 + \frac{(y_0 - t_{f,h})}{y_0} \right] b_{f,h} \cdot t_{f,h}; \quad (14)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}\sigma_T \frac{(y_0 - t_{f,h})}{y_0} t_w(y_0 - t_{f,h}) = \frac{1}{2}\sigma_T \frac{(y_0 - t_{f,h})^2}{y_0} t_w. \quad (15)$$

Підставляємо (14), (15) у (10):

$$N_p = \frac{1}{2}\sigma_T \left[ \left( 1 + \frac{(y_0 - t_{f,h})}{y_0} \right) b_{f,h} \cdot t_{f,h} + \frac{(y_0 - t_{f,h})^2}{y_0} t_w \right]. \quad (16)$$

Аналогічно запишемо:

$$N_3 = \frac{1}{2}\sigma_{cm,c} \cdot t_w(h - y_0 - t_{f,e}); \quad N_4 = \frac{1}{2}(\sigma_{\max,c} + \sigma_{cm,c})b_{f,e} \cdot t_{f,e};$$

або з урахуванням (8), (13):

$$N_3 = \frac{1}{2} \sigma_T \frac{(h - y_0 - t_{f,\varepsilon})}{y_0} t_w \cdot (h - y_0 - t_{f,\varepsilon}) = \frac{1}{2} \sigma_T \frac{(h - y_0 - t_{f,\varepsilon})^2}{y_0} t_w; \quad (17)$$

$$N_4 = \frac{1}{2} \left( \sigma_T \frac{(h - y_0)}{y_0} + \sigma_T \frac{(h - y_0 - t_{f,\varepsilon})}{y_0} \right) b_{f,\varepsilon} \cdot t_{f,\varepsilon}, \text{ або}$$

$$N_4 = \frac{1}{2} \sigma_T \left[ \frac{(h - y_0)}{y_0} + \frac{(h - y_0 - t_{f,\varepsilon})}{y_0} \right] b_{f,\varepsilon} \cdot t_{f,\varepsilon}. \quad (18)$$

Підставляємо (17), (18) в (11):

$$N_c = \frac{1}{2} \sigma_T \left[ \frac{(h - y_0)}{y_0} + \frac{(h - y_0 - t_{f,\varepsilon})}{y_0} \right] b_{f,\varepsilon} \cdot t_{f,\varepsilon} + \frac{1}{2} \sigma_T \frac{(h - y_0 - t_{f,\varepsilon})^2}{y_0} t_w. \quad (19)$$

Підставимо (16), (19) у друге рівняння (9):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma_T \left[ \left( 1 + \frac{(y_0 - t_{f,h})}{y_0} \right) b_{f,h} \cdot t_{f,h} + \frac{(y_0 - t_{f,h})^2}{y_0} t_w \right] = \\ & = \frac{1}{2} \sigma_T \left[ \frac{(h - y_0)}{y_0} + \frac{(h - y_0 - t_{f,\varepsilon})}{y_0} \right] b_{f,\varepsilon} \cdot t_{f,\varepsilon} + \frac{1}{2} \sigma_T \frac{(h - y_0 - t_{f,\varepsilon})^2}{y_0} t_w. \end{aligned} \quad (20)$$

Виконаємо очевидні алгебраїчні перетворення над рівнянням (20):

$$\begin{aligned} & (y_0 + (y_0 - t_{f,h})) b_{f,h} \cdot t_{f,h} + (y_0 - t_{f,h})^2 t_w = \\ & = \left[ (h - y_0) + (h - y_0 - t_{f,\varepsilon}) \right] b_{f,\varepsilon} \cdot t_{f,\varepsilon} + (h - y_0 - t_{f,\varepsilon})^2 t_w; \quad \text{або} \\ & (2y_0 - t_{f,h}) b_{f,h} t_{f,h} + (y_0^2 - 2y_0 t_{f,h} + t_{f,h}^2) t_w = \\ & = (2h - 2y_0 - t_{f,\varepsilon}) b_{f,\varepsilon} t_{f,\varepsilon} + (h^2 + y_0^2 + t_{f,\varepsilon}^2 - 2hy_0 - 2ht_{f,\varepsilon} + 2y_0 t_{f,\varepsilon}) t_w. \end{aligned} \quad (21)$$

Розв'яжемо (21) відносно розміру  $y_0$ :

$$y_0 = \frac{b_{f,\varepsilon} t_{f,\varepsilon} \left( h - \frac{t_{f,\varepsilon}}{2} \right) + b_{f,h} \frac{t_{f,h}^2}{2} + \frac{1}{2} (h^2 + t_{f,\varepsilon}^2 - 2ht_{f,\varepsilon} - t_{f,h}^2) t_w}{(b_{f,h} t_{f,h} + b_{f,\varepsilon} t_{f,\varepsilon} + h_w t_w)}. \quad (22)$$

Порівнюючи вирази (22) і (3), бачимо, що у них по різному записані треті доданки у чисельниках. Покажемо, що вони рівні. Претворимо третій доданок у чисельнику виразу (22), підставивши в нього рівність  $h = h_w + t_{f,\epsilon} + t_{f,\eta}$  (рис. 2):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(h^2 + t_{f,\epsilon}^2 - 2 \cdot h \cdot t_{f,\epsilon} - t_{f,\eta}^2)t_w = \\ & = \frac{1}{2}t_w \left[ (h_w + t_{f,\epsilon} + t_{f,\eta})^2 + t_{f,\epsilon}^2 - 2(h_w + t_{f,\epsilon} + t_{f,\eta})t_{f,\epsilon} - t_{f,\eta}^2 \right] = \\ & = \frac{1}{2}t_w (h_w^2 + t_{f,\epsilon}^2 + t_{f,\eta}^2 + 2h_w t_{f,\epsilon} + 2h_w t_{f,\eta} + 2t_{f,\epsilon} t_{f,\eta} + t_{f,\epsilon}^2 - \\ & - 2h_w t_{f,\epsilon} - 2t_{f,\epsilon} t_{f,\epsilon} - 2t_{f,\epsilon} t_{f,\eta} - t_{f,\eta}^2) = \\ & = \frac{1}{2} \cdot t_w \cdot (h_w^2 + 2h_w t_{f,\eta}) = t_w \cdot h_w \cdot \left( \frac{h_w}{2} + t_{f,\eta} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Вираз (23) співпав із третім доданком у чисельнику виразу (3) і, отже, вираз (22) можемо подати у вигляді:

$$y_0 = \frac{b_{f,\epsilon} \cdot t_{f,\epsilon} \left( h - \frac{t_{f,\epsilon}}{2} \right) + b_{f,\eta} \frac{t_{f,\eta}^2}{2} + t_w \cdot h_w \left( \frac{h_w}{2} + t_{f,\eta} \right)}{(b_{f,\eta} \cdot t_{f,\eta} + b_{f,\epsilon} \cdot t_{f,\epsilon} + h_w \cdot t_w)}, \quad (24)$$

тобто маємо рівність розмірів  $y_0 = y_1$ , що у свою чергу доводить, що нейтральна вісь  $z_I - z_I$  у розглянутому **випадку пружної роботи** співпадає з центральною віссю  $z - z$ .

За рис. 2 визначимо плечі  $y_1, \dots, y_4$  для кожної із сил  $N_1, \dots, N_4$ :

$$y_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2\sigma_T + \sigma_{cm,p})}{(\sigma_T + \sigma_{cm,p})} t_{f,\eta} + (y_0 - t_{f,\eta}), \text{ або з урахуванням (12) після певних}$$

алгебраїчних перетворень остаточно маємо:

$$y_1 = \frac{6y_0^2 - 6y_0 t_{f,\eta} + 2t_{f,\eta}^2}{3(2y_0 - t_{f,\eta})}; \quad y_2 = \frac{2}{3}(y_0 - t_{f,\eta}); \quad y_3 = \frac{2}{3}(h - y_0 - t_{f,\epsilon}); \quad (25)$$

$$y_4 = (h - y_0 - t_{f,\epsilon}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{(2\sigma_{\max,c} + \sigma_{cm,c})}{(\sigma_{\max,c} + \sigma_{cm,c})} t_{f,\epsilon}, \text{ або з урахуванням (8), (13)}$$

остаточно:



$$y_4 = \frac{6h^2 - 12h \cdot y_0 - 6h \cdot t_{f,\varepsilon} + 6y_0^2 + 6y_0 \cdot t_{f,\varepsilon} + 2t_{f,\varepsilon}^2}{3(2h - 2y_0 - t_{f,\varepsilon})}. \quad (26)$$

Відповідно до рис. 2, подамо згинальний момент  $M_T$ , як суму моментів зазначених на рис. 2 поздовжніх сил відносно точки А:

$$M_T = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \quad (27)$$

Для запису виразу для згинального моменту  $M_T$  підставимо у (27) із (14), (15), (17), (18) та із (25), (26) вирази відповідних співмножників та після певних алгебраїчних перетворень отримаємо в остаточному вигляді:

$$\begin{aligned} M_T = & \frac{\sigma_T}{3y_0} \left\{ b_{f,n} \cdot t_{f,n} \cdot (3y_0^2 - 3y_0 \cdot t_{f,n} + t_{f,n}^2) + \right. \\ & \left. + \left[ (y_0 - t_{f,n})^3 + (h - y_0 - t_{f,\varepsilon})^3 \right] t_w + \right. \\ & \left. + b_{f,\varepsilon} \cdot t_{f,\varepsilon} \cdot (3h^2 - 6h \cdot y_0 - 3h \cdot t_{f,\varepsilon} + 3y_0^2 + 3y_0 \cdot t_{f,\varepsilon} + t_{f,\varepsilon}^2) \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

Слід відмітити, що вираз (28) є тотожним виразу (7), якщо в останній підставити вираз (5) з урахуванням (4) та (3) з урахуванням доведеної вище рівності  $y_0 = y_1$ .

**Випадок 2: пластичні деформації та відповідні їм напруження  $\sigma_T$  поширені на частині нижньої полиці; верхня полиця – у пружній стадії.**

Даний випадок виникає при незначному зростанні згинального моменту  $M = M_{pl}$  у порівнянні зі значенням  $M = M_T$ . При цьому пластичні деформації поширюються на нижню частину площі нижньої полиці, а верхня полиця перебуває у пружному стані (рис. 3).

Вирази для напружень  $\sigma_{\max,c}$ , що виникають у крайніх верхніх волокнах, та  $\sigma_{cm,p}$ ,  $\sigma_{cm,c}$ , які діють на межах нижньої та верхньої полиць із стінкою, знаходимо з умов подібності трикутників (див. епюру  $\sigma$  на рис. 4):

$$\begin{aligned} \sigma_{\max,c} = \sigma_T \frac{c_2}{c_1} = \sigma_T \frac{(h - y_0)}{c_1}; \quad \sigma_{cm,p} = \sigma_T \frac{(y_0 - t_{f,n})}{c_1}; \\ \sigma_{cm,c} = \sigma_T \frac{((h - y_0) - t_{f,\varepsilon})}{c_1} \end{aligned} \quad (29)$$

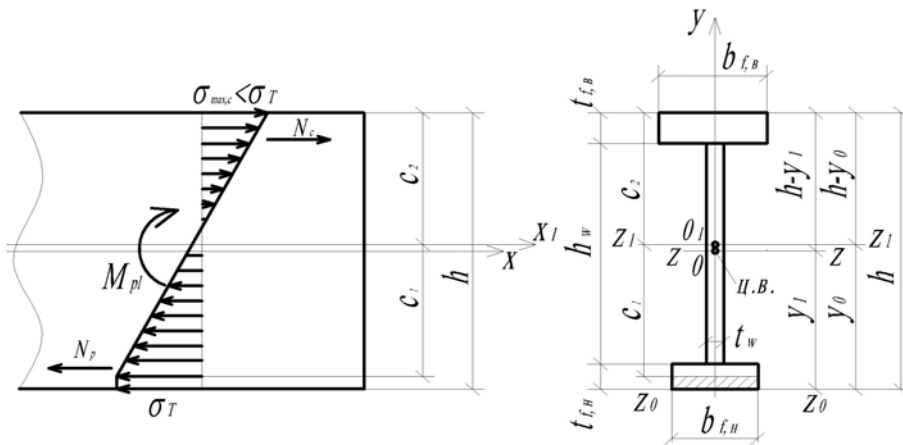


Рис. 3. До визначення залежності між  $M_{pl}$  та висотою пружного ядра  $c_1 + c_2$  для несиметричного двотавру. Випадок 2-ий: пластика на частині нижньої полиці; верхня полиця – у пружній стадії

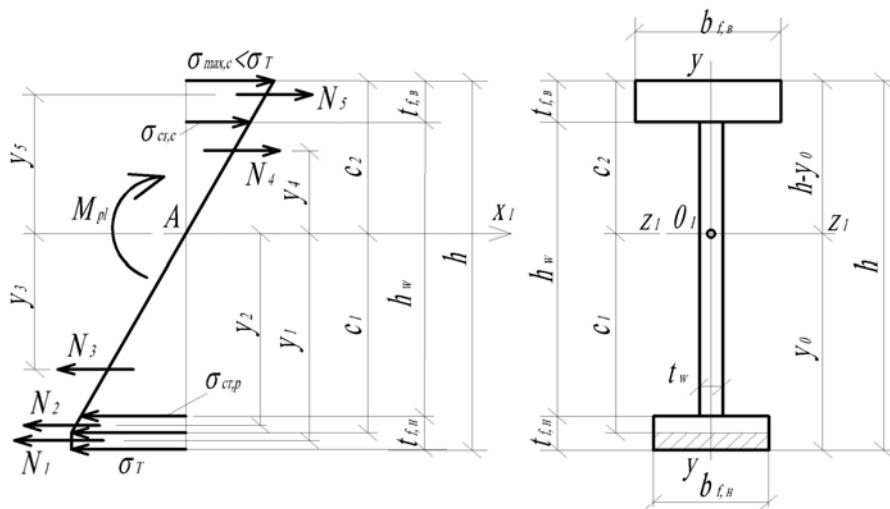


Рис. 4. До обчислення згинального моменту  $M_{pl}$  за заданою епюрою нормальних напружень. Випадок 2-ий: пластика на частині нижньої полиці; верхня полиця – у пружній стадії.

Безпосередньо за рис. 4 можемо записати:

$$N_1 = \sigma_T \cdot b_{f,h}(y_0 - c_1); \quad (30)$$

$N_2 = \frac{1}{2}(\sigma_T + \sigma_{cm,p})[c_1 - (y_0 - t_{f,h})]b_{f,h}$ , або з урахуванням (29) в остаточному вигляді:

$$N_2 = \frac{1}{2c_1}\sigma_T(c_1 + y_0 - t_{f,h})(c_1 - y_0 + t_{f,h})b_{f,h}; \quad (31)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\sigma_{cm,p} \cdot t_w \cdot (y_0 - t_{f,h}) = \frac{1}{2}\sigma_T \frac{(y_0 - t_{f,h})^2}{c_1} \cdot t_w; \quad (32)$$

$N_4 = \frac{1}{2}\sigma_{cm,c} \cdot t_w(h - y_0 - t_{f,e})$ , або з урахуванням (29):

$$N_4 = \frac{1}{2}\sigma_T \frac{(h - y_0 - t_{f,e})^2}{c_1} t_w; \quad (33)$$

$N_5 = \frac{1}{2}(\sigma_{\max,c} + \sigma_{cm,c})b_{f,e} \cdot t_{f,e}$ , або з урахуванням (29):

$$N_5 = \frac{1}{2c_1}\sigma_T(2h - 2y_0 - t_{f,e})b_{f,e} \cdot t_{f,e}. \quad (34)$$

Маємо квадратне рівняння відносно розміру  $y_0$ , що фіксує положення нейтральної осі  $z_I - z_I$  і, в свою чергу, залежить від розміру  $c_1$  (рис. 4):

$$A_1 y_0^2 + A_2 y_0 + A_3 = 0. \quad (35)$$

Це рівняння, як і у попередньому випадку, отримано із умови відсутності у перерізі сумарної поздовжньої сили. Коефіцієнти рівняння (35) мають вигляд:

$$\begin{aligned} A_1 &= b_{f,h}; \quad A_2 = -2(b_{f,h} \cdot t_{f,h} + b_{f,e} \cdot t_{f,e} + c_1 \cdot b_{f,h} + h_w \cdot t_w); \\ A_3 &= c_1^2 \cdot b_{f,h} + b_{f,h} \cdot t_{f,h}^2 + 2h \cdot b_{f,e} \cdot t_{f,e} - b_{f,e} \cdot t_{f,e}^2 + \\ &+ (t_{f,e}^2 - t_{f,h}^2 + h^2 - 2ht_{f,e}) \cdot t_w. \end{aligned} \quad (36)$$

Корені рівняння (35) відомі:

$$y_0 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1 \cdot A_3}}{2A_1}. \quad (37)$$

Відповідно до рис. 4 згинальний момент  $M_{pl}$  є сумою моментів поздовжніх сил відносно точки  $A$ , що знаходиться на нейтральній осі  $O_1X_1$ :

$$M_{pl} = N_1 \cdot y_1 + N_2 \cdot y_2 + N_3 \cdot y_3 + N_4 \cdot y_4 + N_5 \cdot y_5. \quad (38)$$

Склавши за рис. 4 вирази для плечей  $y_1, \dots, y_5$  для кожної із сил  $N_1, \dots, N_5$  та підставивши їх разом з виразами (30)...(34) у (38), отримуємо обернену до (2) потрібну залежність:

$$M(x) = M_{pl}(x) = \varphi(c_1(x)), \quad (39)$$

яка для даного випадку має остаточний вигляд:

$$\begin{aligned} M_{pl} = & \frac{1}{3c_1} \sigma_T \left[ \frac{3}{2} c_1 b_{f,h} (y_0^2 - c_1^2) + (c_1 - y_0 + t_{f,h}) b_{f,h} \times \right. \\ & \times (c_1^2 + c_1 y_0 + y_0^2 - 2y_0 t_{f,h} - t_{f,h} c_1 + t_{f,h}^2) + (y_0 - t_{f,h})^3 t_w + \\ & \left. + (h - y_0 - t_{f,e})^3 t_w + b_{f,e} t_{f,e} \times \right. \\ & \left. (3h^2 - 6hy_0 - 3ht_{f,e} + 3y_0^2 + 3y_0 t_{f,e} + t_{f,e}^2) \right]. \quad (40) \end{aligned}$$

Необхідно визначити межі зміни розміру  $c_1$ . Межа між розглянутими випадками – 1-м та 2-м має місце (див. рис. 2 та рис. 4) за умови:

$$c_1 = y_0. \quad (41)$$

Дійсно, підставивши (41) у (40), остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned} M_{pl} = & \frac{\sigma_T}{3y_0} \left\{ b_{f,h} \cdot t_{f,h} (3y_0^2 - 3y_0 \cdot t_{f,h} + t_{f,h}^2) + \right. \\ & \left. + [(y_0 - t_{f,h})^3 + (h - y_0 - t_{f,e})^3] t_w + \right. \\ & \left. + b_{f,e} \cdot t_{f,e} (3h^2 - 6hy_0 - 3ht_{f,e} + 3y_0^2 + 3y_0 t_{f,e} + t_{f,e}^2) \right\}. \quad (42) \end{aligned}$$

Вирази (42) та (28) співпали, тобто при  $c_1 = y_0$  маємо  $M_{pl} = M_T$ .

Звідси робимо висновок, що розглянутий щойно другий випадок починається за умови:

$$c_1 \geq y_0, \quad (43)$$

де  $y_0$  визначається за виразом (22).

Розглянемо також, за якої умови матимемо **другу границю**, за якої справедливими будуть отримані вище вирази для **випадку 2**. Ця умова також впливає безпосередньо із рис. 4: розмір  $c_1$  для даного випадку може змінюватися в межах:

$$c_{1,\max} = y_0 \geq c_1 \geq c_{1,\min} = y_0 - t_{f,n}, \quad (44)$$

тобто, відповідно до зростання значення згинального моменту  $M_{pl} \geq M_T$ , зменшуватись від  $c_1 = c_{1,\max} = y_0$  до  $c_1 = c_{1,\min} = y_0 - t_{f,n}$ . Тому для другої границі маємо умову:

$$c_1 = y_0 - t_{f,n}. \quad (45)$$

Зауважимо, що у виразі (45) значення розміру  $y_0$  є іншим, ніж обчислений за виразом (37) та присутній у лівій частині нерівності (44). Підставивши (45) в рівняння (35), знаходимо:

$$y_0 = \frac{2b_{f,n}t_{f,n}^2 + 2hb_{f,\varepsilon}t_{f,\varepsilon} - b_{f,\varepsilon}t_{f,\varepsilon}^2 + (t_{f,\varepsilon}^2 - t_{f,n}^2 + h^2 - 2ht_{f,\varepsilon})t_w}{2(b_{f,\varepsilon}t_{f,\varepsilon} + b_{f,n}t_{f,n} + h_w t_w)}. \quad (46)$$

Актуальним для розглянутої задачі є питання: чи можливо у **випадку 2** і за яких умов досягнення максимальними стискальними напруженнями  $\sigma_{\max,c}$  границі текучості:

$$\sigma_{\max,c} = \sigma_T? \quad (47)$$

Дослідження показали, що якщо при інших рівних умовах ширина меншої за площею полиці (у нас вона нижня) не буде менша за розмір  $b_{f,n}^*$ , тобто

$$b_{f,n} \geq b_{f,n}^*, \quad (48)$$

то буде виконуватися умова (47). В інших випадках замість (47) завжди матимемо у верхніх крайніх волокнах напруження:

$$\sigma_{\max,c} < \sigma_T. \quad (49)$$

Розмір  $b_{f,n}^*$  визначається із квадратного рівняння

$$B_1 \cdot y_0^2 + B_2 \cdot y_0 + B_3 = 0, \quad (50)$$

де

$$\begin{aligned} B_1 &= 4t_{f,n}(-3t_{f,n} + 4h); \\ B_2 &= 8(t_{f,n}b_{f,\epsilon}t_{f,\epsilon} + t_{f,n}h_w t_w + 2b_{f,\epsilon}t_{f,\epsilon}h + 2hh_w t_w - \\ &- 4hb_{f,\epsilon}t_{f,\epsilon} + 2b_{f,\epsilon}^2 t_{f,\epsilon}^2 - 2t_w t_{f,\epsilon}^2 + 2t_w t_{f,n}^2 - 2t_w h^2 + 4t_w h t_{f,\epsilon}); \\ B_3 &= 4b_{f,\epsilon}^2 t_{f,\epsilon}^2 + 4h_w^2 t_w^2 + 8b_{f,\epsilon}t_{f,\epsilon}h_w t_w. \end{aligned} \quad (51)$$

Корені рівняння (50) відомі:

$$b_{f,n}^* = \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4B_1 B_3}}{2B_1}. \quad (52)$$

Можна довести, що підкореневий вираз (визначник) у (52) є завжди додатним числом.

### Випадок 3: пластичні деформації у нижній полиці та нижній частині стінки

Даний випадок є продовженням попереднього за умови, що при продовженні зростання згинального моменту  $M = M_{pl}$  пластичні деформації поширюються на всю нижню полицю та нижню частину стінки, а верхня полиця перебуває у пружному стані (рис. 5).

Відповідно до рис. 6 максимальні стискаючі нормальні напруження у верхній полиці та стінці описуються наступними виразами:

$$\sigma_{\max,c} = \sigma_T \frac{c_2}{c_1} = \sigma_T \frac{(h - y_0)}{c_1}; \quad \sigma_{cm,c} = \sigma_T \frac{((h - y_0) - t_{f,\epsilon})}{c_1}. \quad (53)$$

Вони є аналогічними виразам (29).

Значення розміру  $y_0$ , що фіксує положення нейтральної осі  $z_I - z_I$  (рис. 5, 6), у даному випадку описується квадратним рівнянням:

$$A_1 y_0^2 + A_2 y_0 + A_3 = 0, \quad (54)$$

коефіцієнти якого мають наступні вирази:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= t_w; \quad A_2 = -2(t_w c_1 + h t_w - t_{f,\delta} t_w + b_{f,\delta} t_{f,\delta}); \\
 A_3 &= 2t_w t_{f,\delta} c_1 - 2b_{f,\delta} t_{f,\delta} c_1 + t_w c_1^2 + h^2 t_w + t_{f,\delta}^2 t_w - 2h t_{f,\delta} t_w + \\
 &+ 2h b_{f,\delta} t_{f,\delta} - b_{f,\delta} t_{f,\delta}^2.
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

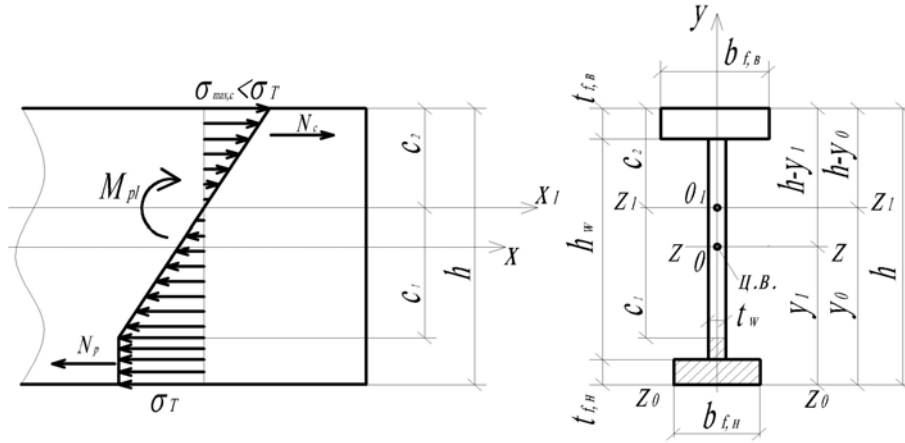


Рис. 5. До визначення залежності між  $M_{pl}$  та висотою пружного ядра  $c_1 + c_2$  для несиметричного двотавру. Випадок 3-й: пластика у нижній полиці та нижній частині стінки

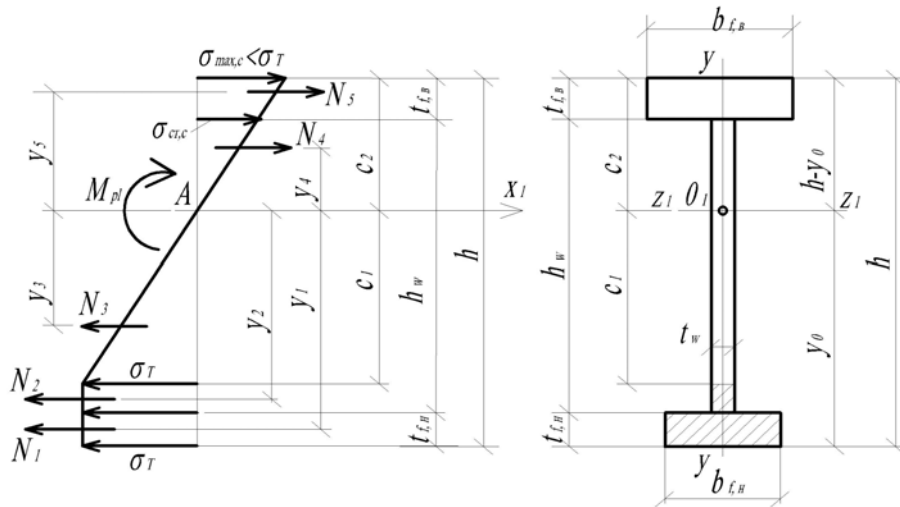


Рис. 6. До обчислення згинального моменту  $M_{pl}$  за заданою епюрою нормальних напружень. Випадок 3-й: пластика у нижній полиці та нижній частині стінки

Корені рівняння (54) відомі:

$$y_0 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1}. \quad (56)$$

Вираз (56) з урахуванням (55) є зв'язком між величинами  $c_1$  і  $y_0$ .

Відповідно до рис. 6, маємо згинальний момент  $M_{pl}$ , як суму моментів поздовжніх сил відносно точки А, що знаходиться на нейтральній осі  $0_1X_1$ :

$$M_{pl} = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 + N_5y_5, \quad (57)$$

або у остаточному вигляді:

$$\begin{aligned} M_{pl} = \sigma_T \left[ b_{f,h} t_{f,h} \left( y_0 - \frac{t_{f,h}}{2} \right) + \frac{1}{2} t_w \left( (y_0 - t_{f,h})^2 - c_1^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} t_w c_1^2 + \frac{1}{3c_1} (h - y_0 - t_{f,e})^3 t_w + \frac{1}{3c_1} b_{f,e} t_{f,e} \times \right. \\ \left. \times (3h^2 - 6hy_0 - 3ht_{f,e} + 3y_0^2 + 3y_0 t_{f,e} + t_{f,e}^2) \right] \quad (58) \end{aligned}$$

Задаючи значення розміру  $c_1$ , за (56) обчислюємо розмір  $y_0$ , а за (58) – відповідне значення згинального моменту  $M_{pl}$ .

Визначимо границі можливих значень розміру  $c_1$ , за яких справедливими будуть отримані вище вирази для **випадку 3**.

Безпосередньо з рис. 6 впливає умова для **першої границі**:

$$c_{1,\max} = y_0 - t_{f,h}. \quad (59)$$

Для **другої границі** є умова:

$$\sigma_{\max,c} = \sigma_T, \text{ або } \sigma_T \frac{(h - y_0)}{c_1} = \sigma_T, \text{ звідки} \quad (60)$$

$$c_{1,\min} = h - y_0. \quad (61)$$

Таким чином, маємо нерівність:

$$c_{1,\max} = y_0 - t_{f,h} \geq c_1 \geq c_{1,\min} = h - y_0. \quad (62)$$

Як і раніше, значення розміру  $y_0$  для лівої і правої частин нерівності (62) є різними.



Підставимо (59) в рівняння (54), яке перетвориться на лінійне, звідки маємо його розв'язок:

$$y_0 = \frac{(2b_{f,n} - t_w)t_{f,n}^2 + 2hb_{f,e}t_{f,e} - b_{f,e}t_{f,e}^2 + (h^2 + t_{f,e}^2 - 2ht_{f,e})t_w}{2(h_w t_w + b_{f,e}t_{f,e} + b_{f,n}t_{f,n})}. \quad (63)$$

Вираз (63) співпав з виразом (46). Значення  $y_0$  із (63) підставляємо в (59) та отримуємо значення  $c_1 = c_{1,\max}$  для границі між випадками 2 і 3.

Підставимо (61) в рівняння (54). Його коефіцієнти отримають наступні вирази:

$$\begin{aligned} A_1 &= 4t_w; \quad A_2 = -2(3ht_w - t_{f,e}t_w + t_w t_{f,n} + b_{f,e}t_{f,e} - b_{f,n}t_{f,n}); \\ A_3 &= 2h(b_{f,e}t_{f,e} - b_{f,n}t_{f,n}) - b_{f,e}t_{f,e}^2 + (2h^2 + t_{f,e}^2 + \\ &+ t_{f,e}^2 + 2ht_{f,n} - 2ht_{f,e})t_w. \end{aligned} \quad (64)$$

Значення розміру  $y_0$  знаходимо за (56) з урахуванням (64) та підставляємо в (61) для обчислення другої границі зміни розміру  $c_1 = c_{1,\min}$ .

**Випадок 4: пластичні деформації у нижній полиці та нижній частині стінки, а також частково у верхній полиці**

Даний випадок є продовженням попереднього за умови, що при продовженні зростання згинального моменту  $M = M_{pl}$  пластичні деформації поширюються на частину верхньої полиці (рис. 7).

Головною відмінністю даного випадку від попередніх є те, що завдяки симетричності епюри нормальних напружень у межах пружного ядра (рис. 7), розміри  $c_1$  та  $c_2$  (див. рис. 4, 6) стають рівними між собою:

$$c_1 = c_2 = c. \quad (65)$$

Відповідно до рис. 8 максимальні стискальні нормальні напруження у верхній частині стінки описуються наступним виразом:

$$\sigma_{cm,c} = \sigma_T \frac{(h - y_0 - t_{f,e})}{c}, \quad (66)$$

що з урахуванням (65) співпадає з другим виразом (53).

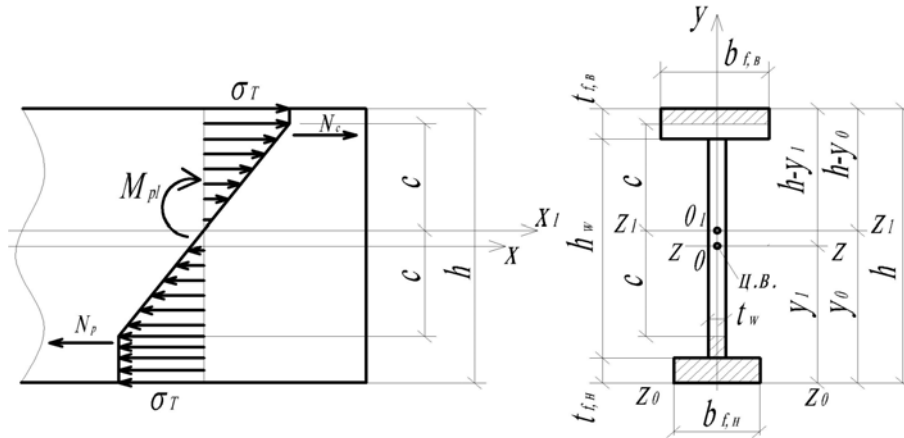


Рис. 7. До визначення залежності між  $M_{pl}$  та напіввисотою пружного ядра  $c$  для несиметричного двотавру. Випадок 4-й: пластика у нижній полиці, на нижній частині стінки та на частині верхньої полиці

Значення розміру  $y_0$ , що фіксує положення нейтральної осі  $z_1$ -  $z_1$  (рис. 7, 8), у даному випадку знаходимо із квадратного рівняння:

$$A_1 y_0^2 + A_2 y_0 + A_3 = 0, \quad (67)$$

коефіцієнти якого мають наступні вирази:

$$\begin{aligned} A_1 &= b_{f,e} - t_w; \quad A_2 = 2(t_w c + h t_w - t_{f,e} t_w - h b_{f,e} + b_{f,e} t_{f,e} + b_{f,e} c); \\ A_3 &= 2b_{f,n} t_{f,n} c - 2t_w t_{f,n} c - t_w c^2 - h^2 t_w - t_{f,e}^2 t_w + 2h t_{f,e} t_w + \\ &+ b_{f,e} h^2 + b_{f,e} t_{f,e}^2 - 2h b_{f,e} t_{f,e} - 2b_{f,e} h c + b_{f,e} c^2, \end{aligned} \quad (68)$$

тобто,

$$y_0 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3}}{2A_1}. \quad (69)$$

Вираз (69) з урахуванням (68) є зв'язком між величинами  $c$  і  $y_0$ .

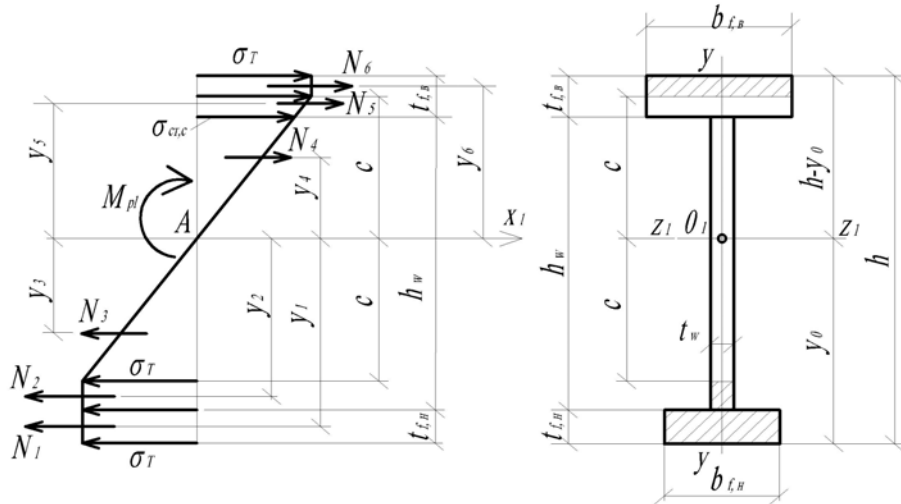


Рис. 8. До обчислення згинального моменту  $M_{pl}$  за заданою епюрою нормальних напружень. Випадок 4-й: пластика у нижній полиці, на нижній частині стінки та на частині верхньої полиці

Відповідно до рис. 8 маємо згинальний момент  $M_{pl}$ , як суму моментів поздовжніх сил відносно точки А, що знаходиться на нейтральній осі  $0_1X_1$ :

$$M_{pl} = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 + N_5y_5 + N_6y_6, \quad (70)$$

або у остаточному вигляді:

$$\begin{aligned} M_{pl} = & \sigma_T b_{f,h} t_{f,h} (y_0 - \frac{t_{f,h}}{2}) + \sigma_T t_w (y_0 - t_{f,h} - c) \frac{1}{2} (y_0 - t_{f,h} + c) + \\ & + \frac{1}{2} \sigma_T \cdot t_w \cdot c \cdot \frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{2} \sigma_T \frac{(h - y_0 - t_{f,s})^2}{c} t_w \cdot \frac{2}{3} (h - y_0 - t_{f,s}) + \\ & + \frac{1}{2c} \sigma_T \cdot b_{f,s} (c^2 - h^2 - y_0^2 - t_{f,s}^2 + 2hy_0 + 2ht_{f,s} - 2t_{f,s}y_0) \times \\ & \times \frac{(2h^2 + 2y_0^2 + 2c^2 + 2t_{f,s}^2 + 2hc - 2y_0c - 2t_{f,s}c - 4hy_0 - 4ht_{f,s} + 4t_{f,s}y_0)}{3(c + h - y_0 - t_{f,s})} + \\ & + \sigma_T \cdot b_{f,s} \cdot (h - y_0 - c) \cdot \frac{1}{2} (h - y_0 + c). \end{aligned} \quad (71)$$

Визначимо границі можливих значень розміру  $c$ , за яких справедливими будуть отримані вище вирази для **випадку 4**.

Безпосередньо із рис. 8 маємо:

$$c_{\max} = h - y_0; \quad (72)$$

$$c_{\min} = h - y_0 - t_{f,\varepsilon}, \quad (73)$$

тобто,

$$c_{\max} = h - y_0 \geq c \geq c_{\min} = h - y_0 - t_{f,\varepsilon}. \quad (74)$$

Задаючи значення розміру  $c$ , за (69) обчислюємо розмір  $y_0$ , а за (71) – відповідне значення згинального моменту  $M_{pl}$ .

Щоб скористатись виразами (72), (73), спочатку необхідно визначити відповідні значення розміру  $y_0$ , що входять до цих виразів.

Підставимо (72) замість  $c$  в рівняння (67). Його коефіцієнти отримають наступні вирази:

$$\begin{aligned} A_1 &= 4t_w; \quad A_2 = -2(3ht_w - t_{f,\varepsilon}t_w + t_w t_{f,h} + b_{f,\varepsilon}t_{f,\varepsilon} - b_{f,h}t_{f,h}); \\ A_3 &= -2h(b_{f,h}t_{f,h} - b_{f,\varepsilon}t_{f,\varepsilon}) - 2ht_w(t_{f,\varepsilon} - t_{f,h}) + \\ &+ (2h^2 + t_{f,\varepsilon}^2)t_w - b_{f,\varepsilon}t_{f,\varepsilon}^2. \end{aligned} \quad (75)$$

Значення розміру  $y_0$  знаходимо за (69) з урахуванням (75) та підставляємо в (72) для обчислення верхньої границі зміни розміру  $c = c_{\max}$ .

Підставимо (73) замість  $c$  в рівняння (67). Його коефіцієнти отримають наступні вирази:

$$\begin{aligned} A_1 &= 4t_w; \quad A_2 = -2(3ht_w - 3t_w t_{f,\varepsilon} + t_w t_{f,h} - b_{f,h}t_{f,h} + b_{f,\varepsilon}t_{f,\varepsilon}); \\ A_3 &= -2b_{f,h}t_{f,h}h + 2b_{f,h}t_{f,h}t_{f,\varepsilon} + 2t_w t_{f,h}h - 2t_w t_{f,h}t_{f,\varepsilon} + \\ &+ 2h^2t_w - 2b_{f,\varepsilon}t_{f,\varepsilon}^2 + 2t_{f,\varepsilon}^2t_w - 4ht_{f,\varepsilon}t_w + 2hb_{f,\varepsilon}t_{f,\varepsilon} \end{aligned} \quad (76)$$

Значення розміру  $y_0$  знаходимо за (69) з урахуванням (76) та підставляємо в (73) для обчислення нижньої границі зміни розміру  $c = c_{\min}$ .

Як показують числові розрахунки, величина  $c_{\min}$  в окремих випадках може приймати значення:

$$c = c_{\min} = 0, \quad (77)$$

тобто за умови (77) зникає пружне ядро.

Цікаво: яке ж значення матиме розмір  $y_0$  за умови (77)? Для відповіді на це запитання розв'яжемо квадратне рівняння (67) з урахуванням (77), коефіцієнти якого приймуть вид:

$$\begin{aligned} A_1 &= b_{f,\varepsilon} - t_w; \quad A_2 = 2(ht_w - t_{f,\varepsilon}t_w - hb_{f,\varepsilon} + b_{f,\varepsilon}t_{f,\varepsilon}); \\ A_3 &= -h^2t_w - t_{f,\varepsilon}^2t_w + 2ht_{f,\varepsilon}t_w + b_{f,\varepsilon}h^2 + b_{f,\varepsilon}t_{f,\varepsilon}^2 - 2hb_{f,\varepsilon}t_{f,\varepsilon}. \end{aligned} \quad (78)$$

За умов (78) дискримінант у (69) перетворюється на нуль:

$$DET = A_2^2 - 4A_1A_3 = 0. \quad (79)$$

Тоді із (69) з урахуванням (79) отримуємо рівні корені:

$$y_0 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1} = \frac{-A_2 \pm 0}{2A_1} = -\frac{A_2}{2A_1}. \quad (80)$$

Підставимо в (80) значення відповідних величин із (78):

$$\begin{aligned} y_0 &= -\frac{2(ht_w - t_{f,\varepsilon}t_w - hb_{f,\varepsilon} + b_{f,\varepsilon}t_{f,\varepsilon})}{2(b_{f,\varepsilon} - t_w)} = \\ &= -\frac{[(h - t_{f,\varepsilon})t_w - (h - t_{f,\varepsilon})b_{f,\varepsilon}]}{(b_{f,\varepsilon} - t_w)} = \frac{(h - t_{f,\varepsilon})(b_{f,\varepsilon} - t_w)}{(b_{f,\varepsilon} - t_w)}, \end{aligned}$$

або остаточно:

$$y_0 = h - t_{f,\varepsilon}, \quad (81)$$

тобто вирази (77), (81) свідчать про те, що за відсутності пружного ядра нейтральна вісь  $z_I - z_I$  (рис. 7, 8) проходить через границю верхньої полиці двотавру із його стінкою. Оскільки умова (77) відповідає повному вичерпанню несучої здатності перерізу, то при  $c = c_{\min} = 0$  згинальний момент  $M_{pl}$  досягає свого максимального граничного значення  $M_{pl} = M_{\lim}$  і у даному випадку його слід визначати відповідно до рис. 9 за виразом (82) замість виразу (71) з урахуванням (81):

$$M_{\lim} = \sigma_T(S_{z_1}^P + S_{z_1}^c), \text{ або в остаточному вигляді:}$$

$$M_{lim} = \sigma_T \left[ b_{f,H} t_{f,H} \left( y_0 - \frac{t_{f,H}}{2} \right) + \frac{1}{2} t_w (y_0 - t_{f,H})^2 + \right. \\ \left. + b_{f,\delta} t_{f,\delta} \left( h - y_0 - \frac{t_{f,\delta}}{2} \right) + \frac{1}{2} t_w (h - y_0 - t_{f,\delta})^2 \right], \quad (82)$$

де  $S_z^p, S_z^c$  – статичні моменти розтягнутої та стиснутої частин перерізу (взяті за абсолютною величиною):

$$S_{z_1}^p = \int_{A_p} y_1 dA; \quad S_{z_1}^c = \int_{A_c} y_1 dA, \quad (83)$$

$$y_0 = \frac{b_{f,\delta} t_{f,\delta} - b_{f,H} t_{f,H} + t_w (h - t_{f,\delta} + t_{f,H})}{2 t_w}. \quad (84)$$

Зауважимо, що вираз (81) є частинним випадком виразу (84).

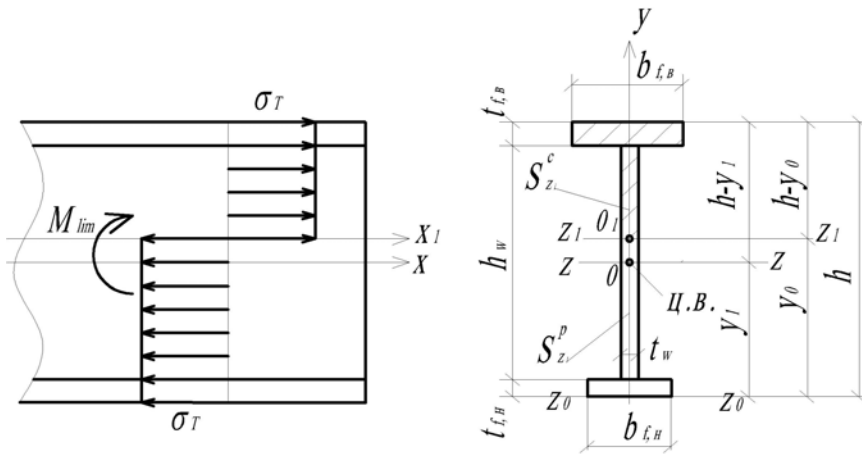


Рис. 9. До обчислення граничного значення згинаючого моменту  $M_{lim}$  для несиметричного двотавру

#### Випадок 5: пружне ядро лише у межах стінки

Даний випадок є продовженням попереднього за умови, що при продовженні зростання згинального моменту  $M = M_{pl}$  пластичні деформації, окрім полиць, також поширюються на верхню та нижню частини стінки (рис. 10). Значення розміру  $y_0$ , що фіксує положення нейтральної осі  $z_1$ -  $z_1$  (рис. 10, 11), у даному випадку знаходимо за наступним виразом:

$$y_0 = \frac{b_{f,\text{в}} t_{f,\text{в}} - b_{f,\text{н}} t_{f,\text{н}} + t_w (h - t_{f,\text{в}} + t_{f,\text{н}})}{2t_w} \quad (85)$$

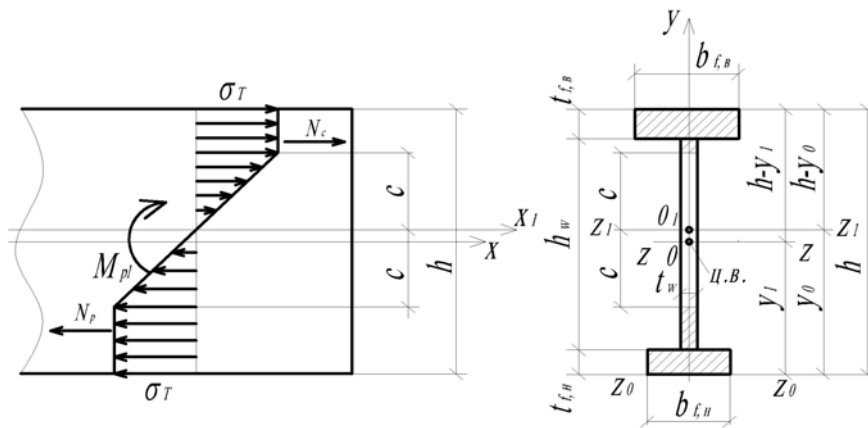


Рис. 10. До визначення залежності між  $M_{pl}$  та напіввисотою пружного ядра  $c$  для несиметричного двотавру. Випадок 5-й: пружне ядро лише у межах стінки

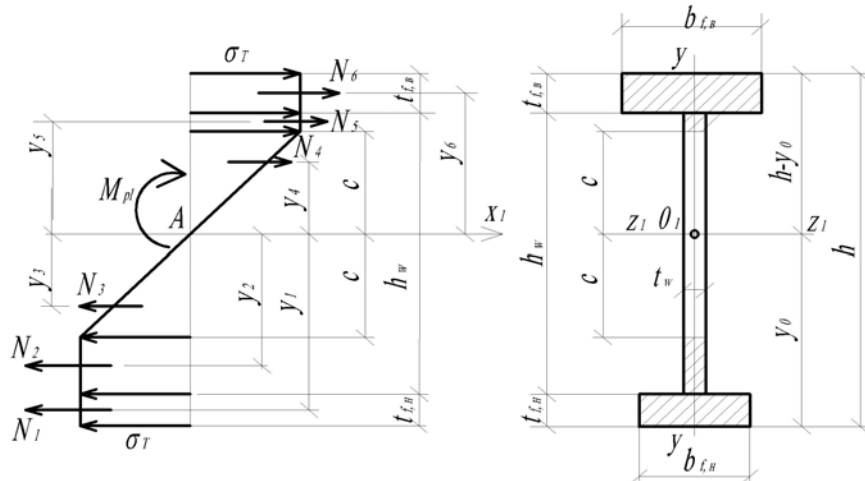


Рис. 11. До обчислення згинального моменту  $M_{pl}$  за заданою епюрою нормальних напружень. Випадок 4-й: пружне ядро лише у межах стінки

Як видно із (85), розмір  $y_0$  і, відповідно, положення нейтральної осі  $z_1 - z_1$  у даному випадку не залежить від значення напіввисоти пружного ядра  $c$ . При цьому, вираз (85) співпав з виразом (84), що мав місце у випадку повного вичерпання несучої здатності. Відмічена особливість полягає у

тому, що коли пружне ядро лежить лише в межах стінки (рис. 11) і має обернено симетричну відносно нейтральної осі  $z_I - z_I$  епюру нормальних напружень, незалежно від розміру  $c$  сили  $N_3$  та  $N_4$  є рівними і протилежно направлені, а **прирости** протилежно діючих сил  $N_3$  та  $N_4$  із зменшенням розміру  $c$  також будуть рівними і взаємно урівноваженими, незалежно від висоти пружного ядра.

Відповідно до рис. 11 маємо згинальний момент  $M_{pl}$  як суму моментів поздовжніх сил відносно точки А, що знаходиться на нейтральній осі  $O_1X_1$ :

$$M_{pl} = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 + N_5y_5 + N_6y_6. \quad (86)$$

або у остаточному вигляді:

$$M_{pl} = \sigma_T \left[ b_{f,h} t_{f,h} \left( y_0 - \frac{t_{f,h}}{2} \right) + b_{f,e} t_{f,e} \left( h - y_0 - \frac{t_{f,e}}{2} \right) + \frac{1}{2} t_w (h^2 + t_{f,e}^2 + t_{f,h}^2) + t_w (y_0^2 + y_0 t_{f,e} - y_0 t_{f,h} - h y_0 - h t_{f,e}) - \frac{1}{3} t_w c^2 \right]. \quad (87)$$

Визначимо границі можливих значень розміру  $c$ , за яких справедливими будуть отримані вище вирази для **випадку 5**.

Безпосередньо із рис. 11 маємо:

$$c_{\max} = h - y_0 - t_{f,e}; \quad (88)$$

$$c_{\min} = 0, \quad (89)$$

тобто,

$$c_{\max} = (h - y_0 - t_{f,e}) \geq c \geq c_{\min} = 0. \quad (90)$$

Задаючи значення розміру  $c$  за умови (90), за (87) обчислюємо відповідне значення згинального моменту  $M_{pl}$ .

До речі, оскільки, як було зазначено вище, значення  $y_0$  (див. вираз (85)) не залежить від значення  $c$ , можна, на відміну від попередніх випадків, вираз (87) розв'язати відносно розміру  $c$ :



$$c = \pm \left\{ \frac{3}{t_w} \left[ b_{f,H} t_{f,H} \left( y_0 - \frac{t_{f,H}}{2} \right) + b_{f,\varepsilon} t_{f,\varepsilon} \left( h - y_0 - \frac{t_{f,\varepsilon}}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} t_w (h^2 + t_{f,\varepsilon}^2 + t_{f,H}^2) + t_w (y_0^2 + y_0 t_{f,\varepsilon} - y_0 t_{f,H} - h y_0 - h t_{f,\varepsilon}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{M_{pl}}{\sigma_T} \right] \right\}^{1/2}. \quad (91)$$

Тоді, на відміну від попередніх випадків, задаючи значення згинального моменту  $M_{pl}$ , за (91) обчислюємо відповідне значення розміру  $c$ .

Обчислимо граничне значення згинального моменту  $M_{pl}$ , виходячи із умови (89), за якої зникає пружне ядро.

Якщо  $c = c_{\min} = 0$ , то замість (87) отримуємо:

$$M_{pl} = M_{\lim} = \sigma_T \left[ b_{f,H} t_{f,H} \left( y_0 - \frac{t_{f,H}}{2} \right) + b_{f,\varepsilon} t_{f,\varepsilon} \left( h - y_0 - \frac{t_{f,\varepsilon}}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} t_w (h^2 + t_{f,\varepsilon}^2 + t_{f,H}^2) + t_w (y_0^2 + y_0 t_{f,\varepsilon} - y_0 t_{f,H} - h y_0 - h t_{f,\varepsilon}) \right]. \quad (92)$$

Покажемо, що вирази (92) та (82) є еквівалентними. Для цього приведемо (82) до виду:

$$M_{\lim} = \sigma_T \left[ b_{f,H} t_{f,H} \left( y_0 - \frac{t_{f,H}}{2} \right) + b_{f,\varepsilon} t_{f,\varepsilon} \left( h - y_0 - \frac{t_{f,\varepsilon}}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} t_w (2y_0^2 + 2y_0 t_{f,\varepsilon} - 2y_0 t_{f,H} - 2h y_0 - 2h t_{f,\varepsilon} + h^2 + t_{f,\varepsilon}^2 + t_{f,H}^2) \right],$$

або

$$M_{\lim} = \sigma_T \left[ b_{f,H} t_{f,H} \left( y_0 - \frac{t_{f,H}}{2} \right) + b_{f,\varepsilon} t_{f,\varepsilon} \left( h - y_0 - \frac{t_{f,\varepsilon}}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} t_w (h^2 + t_{f,\varepsilon}^2 + t_{f,H}^2) + t_w (y_0^2 + y_0 t_{f,\varepsilon} - y_0 t_{f,H} - h y_0 - h t_{f,\varepsilon}) \right]. \quad (93)$$

Дійсно, вираз (93) співпав з виразом (92).

**Випадок 3а:** пластичні деформації та відповідні їм напруження  $\sigma_T$  мають місце лише у частинах полиць

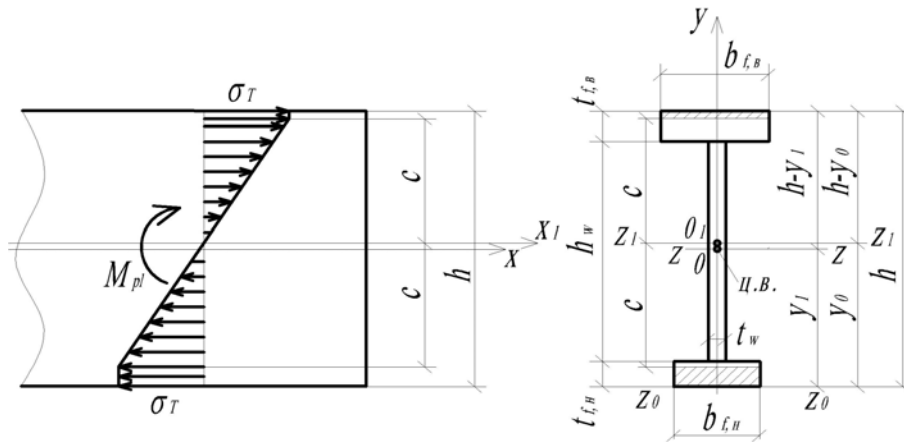


Рис. 12. До визначення залежності між  $M_{pl}$  та напіввисотою пружного ядра  $c$  для несиметричного двотавру. Випадок 3а: пластика у межах полиць

**Випадок 3а** (рис. 12, 13) є можливим замість **випадку 3** для двотаврів з невеликою асиметричністю. Він настає після **випадку 2** і при подальшому зростанні згинаючого моменту  $M = M_{pl}$  переходить у **випадок 4**.

Вирази для напружень  $\sigma_{cm,p}$  та  $\sigma_{cm,c}$ , що діють на межах нижньої та верхньої полиць із стінкою, знаходимо із умови подібності трикутників (рис. 13):

$$\sigma_{cm,p} = \sigma_T \frac{(y_0 - t_{f,n})}{c}; \quad \sigma_{cm,c} = \sigma_T \frac{((h - y_0) - t_{f,b})}{c}. \quad (94)$$

Значення розміру  $y_0$ , що фіксує положення нейтральної осі  $z_1$ -  $z_1$  (рис. 12, 13), у даному випадку знаходимо із квадратного рівняння:

$$A_1 y_0^2 + A_2 y_0 + A_3 = 0, \quad (95)$$

коєфіцієнти якого мають наступні вирази:

$$A_1 = -\frac{1}{2c}(b_{f,h} - b_{f,e});$$

$$A_2 = \frac{1}{c}[(b_{f,h} - t_w)t_{f,h} - (b_{f,e} - t_w)(h - t_{f,e})] + b_{f,h} + b_{f,e}; \quad (96)$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}(b_{f,h} - b_{f,e})c - \frac{1}{2c}[(b_{f,h} - t_w)t_{f,h}^2 - (b_{f,e} - t_w)(h - t_{f,e})^2] - b_{f,e}h.$$

тобто,

$$y_0 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1}. \quad (97)$$

Вираз (97) з урахуванням (96) є зв'язком між величинами  $c$  і  $y_0$ .

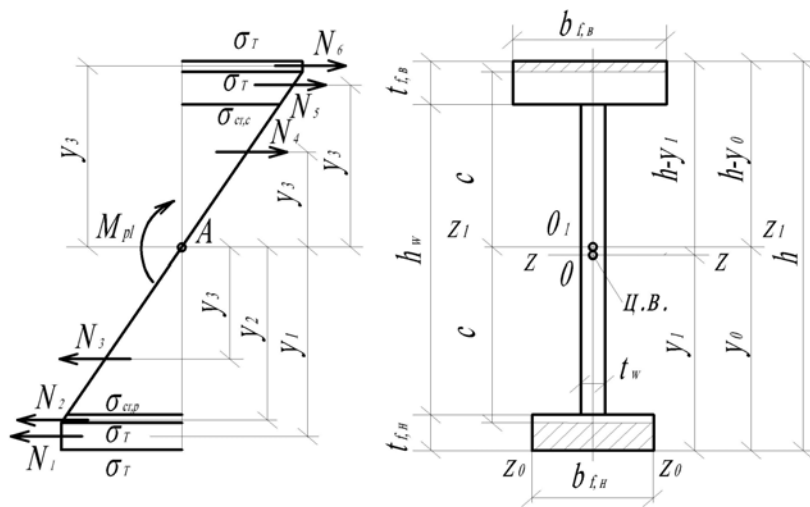


Рис. 13. До обчислення згинального моменту  $M_{pl}$  за заданою епюрою нормальних напружень. Випадок 3а: пластика у межах полиць

Відповідно до рис. 13, подамо згинальний момент  $M_{pl}$  як суму моментів зазначених на рис. 13 поздовжніх сил відносно точки А, що знаходиться на нейтральній осі  $0_1X_1$ :

$$M_{pl} = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 + N_5y_5 + N_6y_6, \quad (98)$$

або в остаточному виді:

$$\begin{aligned}
 M_{pl} = & \sigma_T b_{f,h} (y_0 - c) \frac{1}{2} (y_0 + c) + \frac{1}{2} \left[ \sigma_T + \sigma_T \frac{(y_0 - t_{f,h})}{c} \right] \times \\
 & \times \left[ (y_0 - t_{f,h}) + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{c}{c + (y_0 - t_{f,h})} \right) (c - y_0 + t_{f,h}) \right] + [c - (y_0 - t_{f,h})] b_{f,h} + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \sigma_T \frac{(y_0 - t_{f,h})}{c} \right] (y_0 - t_{f,h}) t_w \frac{2}{3} (y_0 - t_{f,h}) + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \sigma_T \frac{((h - y_0) - t_{f,\epsilon})}{c} \right] [(h - y_0) - t_{f,\epsilon}] t_w \frac{2}{3} (h - y_0 - t_{f,\epsilon}) + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \sigma_T \frac{((h - y_0) - t_{f,\epsilon})}{c} \right] [(h - y_0) - t_{f,\epsilon}] t_w \frac{2}{3} (h - y_0 - t_{f,\epsilon}) + \\
 & + \left[ (h - y_0 - t_{f,\epsilon}) + \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{c}{(c + h - y_0 - t_{f,\epsilon})} \right] (c - h + y_0 + t_{f,\epsilon}) \right] + \\
 & + \sigma_T b_{f,\epsilon} (h - y_0 - c) \frac{1}{2} (h - y_0 + c).
 \end{aligned} \tag{99}$$

Встановимо границі можливих значень взаємозв'язаних величин  $c$  і  $y_0$  для даного випадку.

Перехід від **випадку 2** до **випадку 3а** (перша границя) настає за умови (47) у вигляді

$$c_{\max} = h - y_{0,\min}, \tag{100}$$

що безпосередньо впливає із рис. 4, 13.

Підставивши (100) у рівняння (95), отримуємо квадратне рівняння відносно розміру  $y_0 = y_{0,\min}$ :

$$A_1 y_0^2 + A_2 y_0 + A_3 = 0, \tag{101}$$

коефіцієнти якого приймають вигляд:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -4b_{f,h}; \\
 A_2 &= 2(b_{f,\epsilon} t_{f,\epsilon} + b_{f,h} t_{f,h} + t_w h_w + 2b_{f,h} h); \\
 A_3 &= b_{f,\epsilon} t_{f,\epsilon}^2 - b_{f,h} t_{f,h}^2 - b_{f,h} h^2 - t_w h^2 + t_w t_{f,h}^2 - \\
 & - t_w t_{f,\epsilon}^2 - 2hb_{f,\epsilon} t_{f,\epsilon} + 2ht_{f,\epsilon} t_w = 0.
 \end{aligned} \tag{102}$$

Тоді

$$y_0 = y_{0,\min} = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1}. \quad (103)$$

Знайшовши за (103) величину  $y_0 = y_{0,\min}$ , за (100) визначасмо відповідне значення розміру  $c = c_{\max}$ .

Перехід від **випадку 3а** до **випадку 4**, як це впливає безпосередньо із рис. 8, 13, настає за наступної умови:

$$c_{\min} = y_{0,\max} - t_{f,n}. \quad (104)$$

Підставивши (104) у (94), на межі нижньої полиці із стінкою отримуємо:

$$\sigma_{ст,p} = \sigma_T, \quad (105)$$

що, відповідно до рис. 8, 13, є умовою границі для **випадків 3а і 4**.

Підставивши (104) у рівняння (95), отримуємо квадратне рівняння відносно розміру  $y_0 = y_{0,\max}$ :

$$A_1 y_0^2 + A_2 y_0 + A_3 = 0, \quad (106)$$

коефіцієнти якого приймають вигляд:

$$\begin{aligned} A_1 &= 4b_{f,\epsilon}; \\ A_2 &= 2(b_{f,\epsilon}t_{f,\epsilon} + b_{f,n}t_{f,n} + t_w h_w - 2b_{f,\epsilon}h - 2b_{f,\epsilon}t_{f,n}); \\ A_3 &= b_{f,\epsilon}(t_{f,\epsilon}^2 + t_{f,n}^2 + h^2 - 2 \cdot t_{f,\epsilon}h + 2t_{f,n}h) - 2b_{f,n}t_{f,n}^2 + \\ &+ t_w(2ht_{f,\epsilon} - h^2 + t_{f,n}^2 - t_{f,\epsilon}^2). \end{aligned} \quad (107)$$

Тоді

$$y_0 = y_{0,\max} = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1}. \quad (108)$$

Знайшовши за (108) величину  $y_0 = y_{0,\max}$ , за (104) визначасмо відповідне значення розміру  $c = c_{\min}$ .

Дослідимо визначник *DET* рівняння (106) на предмет його невід'ємних значень:

$$DET = A_2^2 - 4A_1A_3 \geq 0. \quad (109)$$

Підставивши у (109) вирази (107) та прирівнявши ліву частину (109) до нуля, отримуємо квадратне рівняння відносно розміру  $b_{f,n}$ :

$$B_1 y_0^2 + B_2 y_0 + B_3 = 0, \quad (110)$$

коефіцієнти якого мають вигляд:

$$\begin{aligned} B_1 &= t_{f,n}^2; \\ B_2 &= 2(b_{f,\sigma} t_{f,\sigma} t_{f,n} + t_{f,n} h_w t_w - 2b_{f,\sigma} t_{f,n} h - 2 \\ &\quad - b_{f,\sigma} t_{f,n}^2 + 4b_{f,\sigma} t_{f,n}^2); \\ B_3 &= b_{f,\sigma}^2 (4t_{f,\sigma} h - 4t_{f,\sigma} t_{f,n} - 3t_{f,\sigma}^2) + 2b_{f,\sigma} t_w [(t_{f,\sigma} - 2h) \cdot h_w - \\ &\quad - 2(h_w t_{f,n} + 2h t_{f,\sigma} - h^2 + t_{f,n}^2 - t_{f,\sigma}^2)] + h_w^2 t_w^2. \end{aligned} \quad (111)$$

Корені рівняння (110) відомі:

$$b_{f,n}^* = \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4B_1B_3}}{2B_1}. \quad (112)$$

Можна довести, що підкореневий вираз (визначник) у (112) є завжди додатним числом.

Таким чином, якщо при інших рівних умовах ширина меншої за площею полиці (у нас вона нижня) не буде менша за розмір  $b_{f,n}^*$ , тобто:

$$b_{f,n} \geq b_{f,n}^*, \quad (113)$$

то буде виконуватися умова (109).

### **Висновки**

1. У процесі розвитку пружно-пластичних деформацій у балках із несиметричних двотаврів при роботі останніх до повного вичерпання несучої здатності виділено 6 можливих випадків, які у залежності від співвідношення розмірів перерізів несиметричних двотаврів можуть реалізовуватися у наступних послідовностях: 1-й, 2-й, 3-й, 4-й випадки; 1-й, 2-й, 3-й, 4-й та 5-й випадки; 1-й, 2-й, 3-й, 4-й та 5-й випадки. Числові приклади з підтвердженням цього автори планують подати у наступній публікації даного наукового збірника.

2. Для усіх вище зазначених випадків отримано аналітичні залежності, що пов'язують між собою висоту пружного ядра із значенням згинального моменту, а також встановлено для кожного випадку границі зміни розмірів пружного ядра, які, у свою чергу, пов'язані із положенням нейтральної осі.

3. Аналітичні залежності, що пов'язують між собою висоту пружного ядра із значенням згинального моменту, необхідні для обчислення прогинів пружно-пластичних балок із несиметричних двотаврів.

### **Література**

- [1] Сталеві конструкції. Норми проектування, виготовлення і монтажу : ДБН В.2.6-198:2014. – Вид. офіц. – К. : Мінрегіонбуд України, 2014. – 199 с. – (Державні будівельні норми України).
- [2] Клименко Ф. Є. Металеві конструкції : підр. для вузів / Ф. Є. Клименко, В. М. Барабаш. – Львів : Видавництво «Світ», 1994. – 278 с.
- [3] Металлические конструкции. Общий курс : учеб. для вузов / [Веденников Г. С., Беленя Е. И., Игнатъева В. С. и др.]; под ред. Г. С. Веденникова. – [7 изд., перераб. и доп.]. – М. : Стройиздат, 1998. – 760 с.
- [4] Металлические конструкции : учеб. для строит. вузов. В 3 т. Т.1. Элементы конструкций / [Горев В. В., Уваров Б. Ю., Филиппов В. В. и др.]; под ред. В. В. Горева. – [2-е изд., перераб. и доп.] – М. : Высш. шк., 2001. – 551 с.
- [5] Металеві конструкції : Загальний курс : підручник для вищих навчальних закладів / [Нілов О. О., Пермяков В. О., Шимановський О. В., Білик С. І., Лавріненко Л. І., Белов І. Д., Володимирський В. О] ; під загальною редакцією О.О. Нілова та О.В. Шимановського. – [Видання 2-е, перероблене і доповнене] / К. :Видавництво «Сталь», 2010. – 869 с.
- [6] Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов / А. Р. Ржаницын. – М. : Стройвоенмориздат, 1049. – 235 с.
- [7] Мразик А. Расчет и проектирование стальных конструкций с учетом пластических деформаций / А. Мразик, М. Шкалоуд, М. Тохачек ; пер. с чеш. В. П. Поддубного ; под ред. Г. Е. Бельского. – М. : Стройиздат, 1986. – 456 с.
- [8] Перетятко Ю. Г. Пружно-пластична робота двотаврових балок / Ю. Г. Перетятко, І. Ю. Перетятко // Науковий вісник будівництва. – Харків : ХДТУБА, 2011. – Вип. 62. – С. 107–112.

- [9] Перетяцько Ю. Г. Деформації пружно-пластичних двотаврових балок / Ю. Г. Перетяцько, В. В. Рюмін, І. Ю. Перетяцько // Современные строительные конструкции из металла и древесины : сборник научных трудов. – Одесса : ОГАСА, 2011. – № 15, Ч. 3 – С. 178–183.
- [10] Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М. : Высшая школа, 1968. – 512 с.
- [11] Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 544 с.
- [12] Тербушко О. И. Основы теории упругости и пластичности / О. И. Тербушко. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 320 с.

*Надійшла до редколегії 7.07.2015 р.*